00053244

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 02 July, 2018

OPERUM NEWTONI.

TOMUS TERTIUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

52244

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI
ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

TOM. III.

Gx-B-18

LONDINI:
EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXXII.

00053244

IN HOC TOMO CONTINENTUR

IPSIUS NEWTONI,

I. *Principiorum Liber Tertius, de Syſtemate Mundi,* Pag. 1
II. *De Mundi Syſtemate,* 176
III. *Theoria Lunæ,* 243
IV. *Lectiones Opticæ,* 250

EDITORIS,

De Viribus Centralibus quæ rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervant.

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI TERTII PRINCIPIORUM.

	Regulæ Philoſophandi.	Pag. 1
	Phænomena.	5
SECT. I.	*De Cauſis Syſtematis Mundani.*	11
SECT. II.	*De Quantitate Errorum Lunarium.*	57
SECT. III.	*De Quantitate Æſtûs Marini.*	104
SECT. IV.	*De Præceſſione Æquinoctiorum.*	111
SECT. V.	*De Cometis.*	121

DE

MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur; uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt, ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea, ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur, qui principia priùs evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quàm plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulò legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones, hìc citatas, pro lubitu conſulat.

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & veræ ſint, & earum phænomenis explicandis ſufficiant.

DICUNT utique Philoſophi: Natura nihil agit fruſtra; & fruſtra fit per plura, quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt, & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque Effectuum naturalium ejuſdem generis eædem aſſignandæ ſunt Cauſæ, quatenus fieri poteſt.

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtiâ; deſcenſûs lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terrâ & in Planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt; ideoque generales ſtatuendæ ſunt, quotquot cum experimentis ge-

neraliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem ſomnia temerè confingenda non ſunt, nec à Naturæ analogiâ recedendum eſt, cùm ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium; & inde non horum tantùm corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur; & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi, & duras eſſe, & impenetrabiles, & mobiles, & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas, & ſibi mutuò contiguas, ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus; & partes diviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe, ex Mathematicâ certum eſt. Utrum verò partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi, & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento, quòd particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quòd non ſolùm partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quòd indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuò, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem in Solem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit, per hanc Regulam, quòd corpora omnia in ſe mu-

De Mundi Systemate

tuò gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de Gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen Gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minimè affirmo. Per vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt. Gravitas, recedendo à Terra, diminuitur.

REGULA IV.

In Philoſophiâ experimentali, Propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accuratè, aut quamproximè, haberi debent, donec alia occurrerint Phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur, aut exceptionibus obnoxiæ.

Hoc fieri debet, ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

([a]) Confer Librum poſthumum de Syſtemate Mundi § 6.

PHÆNO-

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro. LIBER TERTIUS.

CONSTAT ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronomi; & idem ex Tabulâ ſequente manifeſtum eſt ([a]).

Satellitum Jovialium tempora periodica.

$1^{d}.18^{h}.27'.34''.$ $3^{d}.13^{h}.13'.42''.$ $7^{d}.3^{h}.42'.36''.$ $16^{d}.16^{h}.32'.9''.$

Diſtantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex obſervationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis.
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299 ([b])	

([b]) TEMPORA

Quibus Satellites Jovis converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	I	II	III	IV
	152854″	306822″	618156″	1441929″
Temporum rat.	1	2,007	4,044	9,433
Rat. dupl.	1	4,028	16,353	88,983

DISTANTIÆ

Satellitum à Centro Jovis ex Eclipſibus Satellitum à Caſſino obſervatis.

	I	II	III	IV
	5,666	9	14,383	25,3
Diſtantiarum rat.	1	1,5882	2,5383	4,4646
Rat. Triplicatæ	1	4,006	16,354	88,991

Vides miram planè convenientiam Rationum quæ diſtantiarum ſunt triplicatæ, cum iis quæ ſunt duplicatæ temporum.

DE MUNDI SYSTEMATE

Elongationes ſatellitum Jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit, ut ſequitur. Elongatio maxima heliocentrica Satellitis quarti à centro Jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit; & prodiit, in mediocri Jovis à Terrâ diſtantiâ, 8′. 16″ circiter. Ea Satellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit; & prodiit, in eâdem Jovis à Terrâ diſtantiâ, 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum Satellitum, in eâdem Jovis à Terrâ diſtantiâ, ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56′. 47″, & 1′. 51″. 6″.

Diameter Jovis micrometro in teleſcopio pedes 123 longo ſæpiùs capta fuit; & ad mediocrem Jovis à Sole vel Terrâ diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quàm 40″, nunquam minor quàm 38″, ſæpiùs 39″. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt 40″ vel 41″. Nam lux Jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum Jovis in longioribus & perfectioribus teleſcopiis, quàm in brevioribus & minùs perfectis. Tempora quibus Satellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus Jovis, ab initio ingreſſûs ad initium exitûs, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ diſtantiâ, prodiit, per tranſitum Primi ſatellitis, $37\frac{1}{8}''$; & per tranſitum Tertii, $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam, quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus Jovis obſervatum fuit, & inde diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ diſtantiâ, prodiit 37″ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris Jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpectivè.

PHÆ-

(ᶜ) TEMPORA

Quibus Satellites Saturni converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	I	II	III	IV	V
	163107″	236482″	390312″	1377672″	6853620″
Temporum rationes	1	1,450	2,393	8,446	42,02
Rationes duplicatæ	1	2,102	5,726	71,33	1765,6

DISTANTIÆ

PHÆNOMENON II.

Planetas Circumſaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

LIBER TERTIUS.

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d.21^h.18'.27''$. $2^d.17^h.41'.22''$. $4^d.12^h.25'.12''$. $15^d.22^h.41'.14''$. $79^d.7^h.48'.00''$.

Daſtantiæ Satellitum à centro Saturni in ſemidiametris Annuli.

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis	1,93.	2,47.	3,45.	8.	23,35. (c)

Quarti ſatellitis elongatio maxima à centro Saturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproximè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro Saturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ Satellitum à centro Saturni in ſemidiametris Annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum Annuli ut 3 ad 7, & diameter Annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719, prodiit 43″. Et inde diameter Annuli, in mediocri Saturni à Terrâ diſtantiâ, eſt 42″; & diameter Saturni, 18″. Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quòd magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem

DISTANTIÆ Satellitum à centro Saturni Caſſino obſervatæ.

	I	II	III	IV	V
	1,95	2,5	3,5	8	24
Diſtantiarum rationes	1	1,2820	1,7950	4,1025	12,307
Rationes triplioatæ	1	2,107	5,783	69,05	1864,0

tionem

De Mundi Systemate

tionem lucis in terminis illorum corporum quàm in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter Saturni haud major quàm 16″.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios, Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum, orbibus ſuis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi, ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt; dimidiatâ è regione Solis; falcatâ cis Solem, per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plenâ facie, prope Solis conjunctionem, & gibboſâ in quadraturis, certum eſt, quòd is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur: hos enim luce à Sole mutuatâ ſplendere, ex umbris ſatellitum in ipſos projectis manifeſtum eſt.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel Solis circa Terram vel Terræ circa Solem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ mediocrium diſtantiarum à Sole.

Hæc à *Keplero* (d) inventa ratio in confeſſo ad apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive Sol circa Terram, ſive Terra circa Solem revolvatur. Ac de menſurâ quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent,

(d) Vide Kepleri Harmonicen Mundi, p. 189, et Epitomen Aſtron. Copern. p. 501.

(e) TEMPORA

Quibus Planetæ converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	☿	♀	⊖	♂	♃	♄
	Dies					
	88 —	224,666	365,25	687, —	4332,5	10759,33
Temporum rationes	1	2,553	4,150	7,807	49,23	122,26
Rationes duplicatæ	1	6,516	17,22	60,941	2423,0	14947,0

dent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabulâ ſequente videre licet.

LIBER TERTIUS.

Planetarum ac Telluris tempora periodica circa Solem reſpectu Fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac Telluris diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710. (*)

De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole diſputandi non eſt locus, cùm hæ per eorum elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes ſatellitum Jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas deſcribere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu Terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: at Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celeriùs tamen in Periheliis ac tardiùs in Apheliis, ſic ut arearum æquabi-

DISTANTIÆ

Planetarum à Sole medias ſumendo earum quæ à Keplero et Bullialdo poſitæ ſunt.

	☿	♀	⊖	♂	♃	♄
	3869	7240	10000	15235	52108	95260
Diſtantiarum rationes	1	1,8713	2,5846	3,9372	13,468	24,621
Rationes triplicatæ	1	6,551	17,26	61,03	2443	14925

De Mundi Systemate

lis ſit deſcripto. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprimè demonſtratur per Eclipſes ſatellitum; quibus eclipſibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem deſcribere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias in hiſce Phænomenis negligo (f).

(f) Locum hunc de Phænomenis in Libro poſthumo de Mundi Syſtemate eleganter pertractatum habes, § 1—9.

PROPO-

PROPOSITIONES.

SECTIO I.

LIBER TERTIUS.

De Cauſis Syſtematis Mundani.

PROP. I. THEOR. I.

Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

PATET pars prior Propoſitionis per Phænomenon primum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per Phænomenon primum, & Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ ejuſdem libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon ſecundum.

PROP. II. THEOR. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Phænomenon quintum, & Propoſitionem ſecundam libri primi: & pars poſterior per Phænomenon quartum, & Propoſitionem quartam ejuſdem libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quàm minima à ratione duplicatâ (por Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem, efficere deberet.

De Mundi Systemate

PROP. III. THEOR. III.

Vim, quâ Luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere Terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.[g]

Patet aſſertionis pars prior per Phænomenon ſextum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantùm trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) quòd ſi diſtantia Lunæ à centro Terræ ſit ad ſemidiametrum terræ ut D ad 1; vis, à quâ motus talis oriatur, ſit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciprocè ut ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quàm duplicata inverſè, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit. Oritur verò ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hîc negligendus eſt. Actio Solis quatenus Lunam diſtrahit à Terrâ, eſt ut diſtantia Lunæ à Terrâ quamproximè; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. 1.) eſt ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ Solis vi tantillâ, vis reliqua, quâ Luna retinetur in orbe, erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam pleniùs conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris, quâ Luna retinetur in orbe, augeatur primò in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ ſemidiametri Terræ ad mediocrem diſtantiam centri Lunæ à centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad ſuperficiem Terræ; poſito quòd vis illa, deſcendendo ad ſuperficiem Terræ, perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROP.

(g) Posito utique Lunam, in orbe circulari, cujus diameter bis ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium eſſet, circum Terram in centro ejus circuli immobilem, ſpatio menſis quem vocant periodici, æquabili cum motu ferri; calculis exquiſitè ſubductis, invenio rectam, quæ diametri ejus circuli arcûſque à Lunâ ſcrupuli primi ſpatio conficiendi proportione ſit tertia, invenio, inquam, hanc rectam pedum Pariſienſium 15,009. Atque hoc eſt ſpatium, quod corpus, vi illâ incitatum, quâ Luna in orbe illo circulari retinenda eſſet, rectâ cadendo, ſcrupuli primi ſpatio conficeret.

Prop.

PROP. IV. THEOR. IV.

Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à Terrâ in ſyzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum* & pleroſque Aſtronomorum, 59; ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium*, 60; ſecundum *Copernicum*, $60\frac{1}{3}$; ſecundum *Streetum*, $60\frac{2}{5}$; & ſecundum *Tychonem*, $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quàm Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecimâ vel decimâ quintâ parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti à *Gallis* menſurantibus definitum eſt: & ſi Luna motu omni privari fingatur, ac demitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per Corol. Prop. III.) in orbe ſuo retinetur, deſcendat in Terram; hæc, ſpatio minuti unius primi cadendo, deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propoſitionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propoſitionis quartæ ejuſdem libri, confecto. Nam arcûs illius, quem Luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15, dig. 1, & lin. $1\frac{4}{9}$ (g). Unde cùm vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicatâ diſtantiæ ratione inverſâ, ideoque ad ſuperficiem Terræ major ſit partibus 60×60 quàm ad Lunam; corpus, vi illâ in re-

(g) (Prop. IV. Cor. 9.) Sed vis, quæ Lunam in orbe illo retineret, cùm differentia ſit virium quarum major centrum Terræ, minor centrum Solis reſpicit, vi illâ centrum Terræ reſpiciente minor erit: atque eâ ratione minor quâ numerus 17775 minor numero 17875. (Prop. III. Cor.) Augeatur igitur ſpatium illud pedum pariſienſium 15,009 pro hâc ratione; veniet ſpatium ped. pariſ. 15,093 = 15 ped. 1 dig. 1 lin. $\frac{7}{17}$.

gionibus

De Mundi Systemate

gionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet, ſpatio minuti unius primi, pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi Gravia reverâ deſcendunt in Terram. Nam Penduli, in latitudine Lutetiæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius.* Et altitudo, quam Grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem Penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius)* ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis, quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem Terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos; ideoque (per Reg. I & II.) eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab eâ diverſa eſſet, corpora, viribus utriſque conjunctis Terram petendo, duplo velociùs deſcenderent; & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcriberent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam ([h]).

Calculus hic fundatur in hypotheſi, quòd Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna moveantur circum Solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, diſtantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri poteſt per Prop. LX. Lib. I. ([i])

Scholium.

Demonſtratio Propoſitionis ſic fuſiùs explicari poteſt. Si Lunæ plures circum Terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate Saturni vel Jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem Planetarum à *Keplero* detectam; & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Terræ, per Prop. I. hujus. Et ſi earum infima

([h]) Vid. De Syſt. Mundi § 10.

([i]) Nempe radius orbis circularis, quem Luna circum Terram, in centro orbis immobilem, menſis periodici quem vocant ſpatio, conficeret, is minor eſſet quàm Lunæ, circum centrum gravitatis, quod ipſi cum Terrâ eſt commune, circumactæ, à centro Terræ diſtantia. (Lib. I. Prop. LX.) Hanc ob cauſam Newtonus radium orbis illius circularis 60 ſemidiametrorum terreſtrium poſuit, cùm diſtantia Lunæ, ſi maximæ minimæque ſumatur media, ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium

infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium propè tangeret: hujus vis centripeta, quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè; efficeretque, ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ, quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in Terram; idque eâdem cum velocitate, quâ Gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa, quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à Gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in Terram, more corporum in verticibus montium: eadem lunula, vi utrâque conjunctâ, duplo velociùs deſcenderet. Quare cùm vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum Terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per Reg. I & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, quâ Luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos Gravitatem dicere ſolemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplo velociùs cadat, quàm corpora gravia ſolent cadere.

PROP. V. THEOR. V.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumſaturnios in Saturnum, & Circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri [k].

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumſaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumſolarium circa Solem, ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea (per Reg. II.) à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cùm demonſtratum ſit quòd vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Sa-

trium cùm ſemiſſe haud minor ſit. Quâ in re non malè ſe conjeciſſe ex eo perſuadere inſtituit, quòd ſi radium illum ſemidiametrorum ſexaginta pro eâ ratione augeas, quâ, manente gravitatis lege, diſtantia Lunæ à Terrâ mobili radium illum ſuperare debet, veniet planè longitudo ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium cum ſemiſſe pro diſtantiâ illâ, qualem ferè eam Aſtronomi conſtituerunt. Vide Opus Poſth. De Syſtem. Mundi §. 11.

(k) De Syſt. Mundi § 12.

De Mundi Systemate

turno & Sole decreſcant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terrâ.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cùm attractio omnis per motûs legem tertiam mutua ſit, Jupiter in ſatellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuò per Corol. 1 & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem, ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares; Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam, quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur, Centripetam appellavimus. Eandem jam Gravitatem eſſe conſtat, & propterea Gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ Luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes Planetas per Reg. I, II & IV.

PROP. VI. THEOR. VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis (l).

Deſcenſus gravium omnium in Terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aëris perexiguâ reſiſtentiâ oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervârunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arenâ, Sale communi, Ligno, Aquâ, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis.

(l) De Syſt. Mund. § 18, 19.

tionis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & Aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unà & redibant diutiſſimè. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1 & 6. Prop. XXIV. Lib. 2.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis Actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem Lunæ, & unà cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; &, per jam antè oſtenſa, certum eſt quòd temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Lunâ, ideoque quòd ſunt ad quantitatem materiæ in Lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus, ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc Terrâ noſtrâ. Et eodem argumento Planetæ circumſolares, ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quàm maximè regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. 1. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quàm cæteri: motus ſatellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. 1.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à Sole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate materiæ ſuæ, quàm Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta d ad e: diſtantia inter centrum Solis & cen-

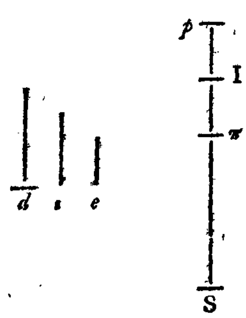
LIBER TERTIUS.

De Mundi Syſtemate

trum orbis Satellitis, major ſemper foret quàm diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione ſubduplicatâ quàm proximè; uti calculo quodam inito inveni. Et ſi Satelles minùs gravis eſſet in Solem in ratione illâ *d* ad *e*, diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole minor foret quàm diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illâ ſubduplicatâ (m). Ideoque ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in ſolem, parte tantùm milleſimâ gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole major vel minor quàm diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quintâ diſtantiæ ſatellitis extimi à centro Jovis (n): quæ quidem orbis eccentricitas foret valdè ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia. Aliqua autem ſunt per Corol. 1 & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minùs, quàm pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratiâ corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

(m) Nempe ut diſtantiarum inæqualitas virium inæqualitatem compenſaret. Sit SI diſtantia Jovis à Sole media. Vis autem acceleratrix illa quæ unum aliquem ex ejus ſatellitibus, puta extimum, ad diſtantiam SI à ſole conſtitutum, verſus centrum Solis impelleret, major ſit vi acceleratrice quæ Jovem ipſum impellit, pro ratione rectæ *d* ad *e*. Duarum *d*, *e* capiatur ι proportione media. Capiatur S*p*, ad quam SI rationem habeat eam quam ι ad *d*. Si Satelles extimus in orbe quodam circumagatur, cujus centrum ſit *p*, erit S*p* media Satellitis, orbem illum percurrentis, à Sole diſtantia. Vis autem, quâ Satelles in Solem impellitur in *p*, erit ad vim quæ eundem impelleret in I, ut SI^2 ad SP^2, ſive ut ι^2 ad d^2, ſive denique ut *e* ad *d*. Sed vis, quâ Jupiter in Solem impellitur in I, ad vim, quæ Satellitem in I in ſolem impelleret, rationem habet quam *e* ad *d*. Vis igitur acceleratrix, quâ Satelles in Solem impellitur in diſtantiâ S*p*, æqualis erit vi quâ Jupiter in Solem impellitur in diſtantiâ SI. In orbe igitur illo, cujus centrum eſſet *p*, Satelles, ad mediam à Sole diſtantiam conſtitutus, pariter cum



pore Lunæ: ſi horum pondera eſſent ad corpora partium exter- narum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quàm ſuprà oſtenſum eſt. LIBER TERTIUS.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa Terram ſunt, gravia ſunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per Reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si Æther, aut corpus aliud quodcunque, vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minùs gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in Formâ materiæ, poſſet idem per mutationem Formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quàm maximè gravitant; & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quàm probatum eſt in Corollario ſuperiore.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica Fluidi quo regio Aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ Argenti Vivi, vel Auri, vel corporis alterius

cum Jove ipſo pro materiæ ſuæ modo in Solem impelleretur. In ulteriori orbitæ ſuæ ſemicirculo minùs, in citeriori magis. Quamobrem haud multo magis ab hoc orbe aberraret, quàm ab illo cujus centrum corpus ipſum Jovis occuparet, ſi vires æquales in æqualibus à Sole diſtantiis corpus utrumque, Jovis et Satellitis, in Solem urgerent. Quòd ſi vis quæ Satellitem, ad diſtantiam sI conſtitutum, in Solem impelleret, vi Jovem impellente minor eſſet pro ratione rectæ e ad d, ſimili prorſus argumentatione efficeretur, centrum orbitæ, quam Satelles ſine inſigni aliquâ motûs ſui perturbatione percurrere poſſet, in puncto π conſtituendum; cujus diſtantia à Sole, $s\pi$, ad Jovis à Sole diſtantiam sI, rationem haberet quàm e ad ϵ.

(n) Nempe diſtantia Ip, vel Iπ : sI = 1 : 2000. Sed sI eſt ad mediam Satellitis extimi à Jove diſtantiam ut 443 ad 1; Aſtronomis ſic definientibus (*De La Caille Leçons Element.* § 673.) Ex æquo perturbate Ip vel Iπ ad mediam Satellitis extimi à Jove diſtantiam ut 443 ad 2000; major itaque Ip vel Iπ quàm ut habeat ad mediam Satellites extimi à Jove diſtantiam rationem eam quàm 1 ad 5.

cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec Aurum neque aliud quodcunque corpus in Aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in Fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quòd ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rareſieri poſſint, Vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis Gravitatis diverſi eſt generis à vi Magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minùs, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ quàm vis gravitatis, & in receſſu à Magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicatâ, ſed ferè triplicatâ, quantùm ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

PROP. VII. THEOR. VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis (°).

Planetas omnes in ſe mutuò graves eſſe jam antè probavimus, ut & gravitatem in unumquemque, ſeorſim ſpectatum, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde conſequens eſt (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) Gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porro cùm planetæ cujuſvis, A, partes omnes graves ſint in planetam quemvis B, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motûs Legem tertiam) æqualis ſit; planeta B in partes omnes planetæ A viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. Q. E. D.

Corol. I. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus

(°) De Syſt. Mund. § 20—24.

in

in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in Gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire, & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quòd corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hâc lege gravitare deberent in ſe mutuò, cùm tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: reſpondeo, quòd gravitas in hæc corpora, cùm ſit ad gravitatem in Terram totam ut ſunt hæc corpora ad Terram totam, longè minor eſt, quàm quæ ſentiri poſſit. LIBER TERTIUS.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra (p).

Poſtquam inveniſſem Gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciprocè proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus: dubitabam, an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compoſitâ, an verò quàm proximè. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accuratè obtineret, prope ſuperficiem Planetæ, ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV & LXXVI. Libri primi & ipſarum Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de quâ hîc agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas (q). Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inverſè; & pondera ad ſuperficies Planetarum, aliaſve quaſvis à centro diſtantias, majora ſunt vel mi-

(p) De Syſt. Mund. § 25, 26. (q) De Syſt. Mund. § 13—17.

nora

nora (per hanc Propoſitionem) in duplicatâ ratione diſtantiarum inverſâ. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, ſatellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, ſatellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circum Terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantiâ mediocri Veneris à Sole, & cum elongationibus maximis heliocentricis ſatellitis extimi circumjovialis à centro Jovis, 8′. 16″. ſatellitis Hugeniani à centro Saturni 3′. 4″. & Lunæ à centro terræ 10′. 33″. computum ineundo [r]; inveni quòd corporum æqualium, & à centro Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter diſtantium, pondera ſint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivè; & auctis vel diminutis diſtantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium

(r) *Computationis ineundæ hæc eſt ratio.*

Datur, ex Aſtronomorum decretis, ratio triplicata ejus quam media Stellæ Veneris à Sole diſtantia habet ad diſtantiam Stellæ Jovis à Sole mediam. Sed et diſtantiæ Jovis à Sole ad Satellitis extimi à Jove diſtantiam triplicata ratio datur. Dabitur igitur ratio triplicata ejus, quam diſtantia Satellitis extimi Jovialis à Jove habet ad mediam ſtellæ Veneris à Sole diſtantiam. (Dat. 8.) Hæc autem ejus rationis duplicata erit, quam tempus converſionis Satellitis extimi circa Jovem ad tempus habet, quo Satelles ille converſionem ſuam abſolveret, ſi diſtantia ejus à Jovis centro in eam diduceretur, quæ mediæ Veneris à Sole diſtantiæ æqualis eſſet. (Lib. 1. Prop. xv.) Datur autem tempus converſionis Satellitis extimi circa Jovem. Dabitur igitur tempus, quo idem Satelles, ad diſtantiam à Jovis centro mediæ Stellæ Veneris à Sole diſtantiæ æqualem evectus, converſionem abſolveret. (Dat. 2.) Sed datum eſt tempus converſionis Veneris circa Solem. Data eſt igitur horum temporum duplicata ratio. Quare et temporum duplicatæ contraria dabitur. Sed duplicatæ horum temporum contraria eſt ipſa Virium ratio, quibus Satelles extimus in Jovem, & Venus in Solem impellerentur, in æqualibus utique hujuſce à Sole illius à Jove diſtantiis. Quare et virium illarum ratio data. Q. E. I.

Formulæ computandi Algebraicæ.

Notis ♀, ⊖, ♃, ♄ ſignificentur mediæ ſtellæ Veneris, Telluris noſtræ, Jovis et Saturni à Sole diſtantiæ. Notis ☽, A, B mediæ Lunæ noſtræ, Satellitis extimi Jovialis, et Satellitis Hugeniani à centro Terræ, Jovis, vel Saturni diſtantiæ. Literâ V ſignificetur tempus converſionis ſtellæ Veneris in orbe ſuo: literis *l*, *j*, *h*, tempora quibus Luna noſtra, Satelles extimus Jovialis, et Satelles Hugenianus converſiones ſuas abſolvunt: literis S, T, J, Σ ſignificentur vires acceleratrices quibus in æqualibus à centro Solis, Terræ, Jovis vel Saturni diſtantiis corpora in centra illa ſingulatim impelluntur.

Jam ♀³ : ♃³ = 6,551 : 2443. (Not. [c].)

Et ♃³ : A³ = R³ : $\overline{\text{ſin. }'8 - ''16}|^3$.

Ex æquo ♀³ : A³ = 6,551 × R³ : 2443 × $\overline{\text{ſin. }'8 - ''16}|^3$.

Literâ *x* ſignificetur tempus, quo Satelles extimus Jovialis converſionem ſuam abſolveret, ſi ad illam evectus eſſet à Jovis centro diſtantiam, quæ diſtantiæ ♀ à Sole æqualis eſſet.

Erit igitur 2443 × $\overline{\text{ſin. }'8 - ''16}|^3$: 6,551 × R³ (= A³ : ♀³) = $j^2 : x^2$. (Lib. 1. Prop. xv.)

$$\text{Unde } x^2 = \frac{j^2 \times 6{,}551 \times R^3}{2443 \times \overline{\text{ſin. }'8 - ''16}|^3}.$$

Sed

um corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in diſtantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum ſuperficiebus, erunt ut 10000, 943, 529, & 435 reſpectivè (s). Quanta ſint pondera corporum in ſuperficie Lunæ dicetur in ſequentibus. LIBER TERTIUS.

Corol. 2. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in Planetis ſingulis. Nam quantitates materiæ in Planetis ſunt ut eorum vires in æqualibus diſtantiis ab eorum centris; id eſt, in Sole, Jove, Saturno ac Terrâ ſunt ut $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivè (t). Si parallaxis Solis ſtatuatur major vel minor quàm 10″. 30‴, debebit quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates Planetarum. Nam pon-

Sed $v^2 : x^2 = J : s$. Quare $s = \frac{x^2 \times J}{v^2}$; vel pro J ſcribendo 1, $s = \frac{j^2 \times 6{,}551 \times R^3}{2443 \times \overline{\text{ſin.}\ '8 - ''16}|^3 \times v^2} = 1064$: nimirum pro j^2, v^2, poſitis $\overline{16{,}689}|^2$, $\overline{224{,}666}|^2$. Quare vis Jovialis erit ad vim Solarem ut 1 ad 1064.

Simili modo ſi pro Σ ſcribatur 1, efficietur $s = \frac{b^2 \times 6{,}551 \times R^3}{14925 \times \overline{\text{ſin.}\ '3 - ''4}|^3 \times v^2} = 3114$, nimirum pro v^2 poſito, ut antè, $\overline{224{,}666}|^2$; pro b^2, $\overline{15{,}945}|^2$. Quare vis Saturnia erit ad vim Solarem ut 1 ad 3114.

Ad vim Terreſtrem inveniendam, ſtatuo parallaxin Solis horizontalem, in mediâ ejus à Tellure diſtantiâ, ″8,83, ſive ″8 — ‴50, qualis ea à Cl. Maſkelyno definita eſt. (Mayer. Tab.) Promenſe, quem vocant, periodico, per literam *l* deſignato, uſurpo brevius quoddam temporis ſpatium, quod ad tempus illud *l* rationem habeat ejus, quæ eſt numeri 17775 ad numerum 17875, ſubduplicatam. Nam tali tempore Luna converſionem ſuam abſolveret, ſi ceſſante vi Solari vim Terreſtrem ſolam et integram perciperet. Hoc tempus literâ λ ſignificetur. Radium denique orbitæ circularis, quam Luna, ceſſante tum vi Solis, tum propriâ quâ ipſa Terram incitat, circum Terram immobilem tempore λ ſcriberet; hujus orbitæ radium cum Newtono ſtatuo ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium. Et calculis ad priorum exemplum ſubductis, poſitâ $T = 1$, veniet $s = \frac{\lambda^2 \times 6{,}551 \times R^3}{17{,}26 \times \overline{\text{ſin.}\ '8 - ''50}|^3 \times v^2} = 329006$. Quare vis Terreſtris erit ad vim Solarem ut 1 ad 329006.

Pondera igitur Corporum æqualium in Solem, Jovem, Saturnum et Terram, in æqualibus à centris eorum diſtantiis erunt ut $1, \frac{1}{1064}, \frac{1}{3114}, \frac{1}{329006}$, ſive ut numeri 10000. 9,3972. 3,2108. 0,030394.

(s) NIMIRUM ſi Jovis, Saturni et Telluris noſtræ ſemidiametri è Sole viſæ, necnon Solis ſemidiameter è tellure viſa, in mediâ utique corporis cujuſque à Sole diſtantiâ, tales eſſent quales cum ſui ſeculi Aſtronomis Newtonus eas æſtimavit, veras diametrorum rationes numeri à Newtono poſiti ſatis exquiſitè exhiberent; 10000, 997, 791, 109. Cùm verò ſemidiametri è Sole viſæ, in mediis à Sole diſtantiis, Jovis quidem ſit ″18,5; Saturni, ″8; Terræ, ″8,83 (modò rectè eas Juniores definiant) exiſtente Solis ipſius ſemidiametro, qualis è Tellure maximam inter minimamque media cernitur, ′16 — ″3, veræ ſemidiametrorum rationes hiſce ferè numeris exponendæ erunt.

☉ 10000 ♃ 1001,0 ♄ 791 ⊕ 91,69.

Inde verò, et ex virium in æqualibus diſtantiis rationibus, quas ſuprà poſuimus, venient virium in ſuperficiebus rationes, quales hi numeri præ ſe ferunt

☉ 10000 ♃ 937,7 ♄ 512,69 ⊕ 361,5.

(t) Verius $1, \frac{1}{1064}, \frac{1}{3114}, \frac{1}{329006}$.

2 dera

De Mundi Systemate

dera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109; & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè; & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400 (u). Denſitas Terræ, quæ prodit ex hoc computo, non pendet à parallaxi Solis, ſed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hîc rectè definitur (x). Eſt igitur Sol paulo denſior quàm Jupiter, & Jupiter quàm Saturnus, & Terrâ quadruplo denſior quàm Sol. Nam per ingentem ſuum calorem Sol rareſcit. Luna verò denſior eſt quàm Terra, ut in ſequentibus patebit.

Corol. 4. Denſiores igitur ſunt Planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt Planetæ, cæteris paribus, qui ſunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diverſis utique diſtantiis à Sole collocandi erant Planetæ, ut quilibet, pro gradu denſitatis, calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi Terra locaretur in orbe Saturni, rigeſceret; ſi in orbe Mercurii, in vapores ſtatim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe Mercurii

(u) Quod ſi tales ſint diametrorum inter ſe, & ponderum rationes, quales nos poſuimus; Denſitates horum numerorum inter ſe proportiones gerent 100; 93,67; 64,78; 394,26. Poſtremò ſi omnia cum terrenis conferre placeat, Terræ, Jovis, Saturni et Solis diametri his ferè numeris

	♁	♃	♄	☉
exponi poſſint;	1	11	8,6	109
Hiſce magnitudines	1	1331	636	1295029
Hiſce, vires abſolutæ ſive corpora	1	309	105+	329006
Hiſce vires ad ſuperficies	1	2,6	1,4	27,66
Hiſce denique denſitates	1	$\frac{10}{42}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{39}$

(x) Significent literæ D, d Solis et Terræ diametros; literæ Δ, δ denſitates, ſignificantibus utique literis S, T, vires Solis Terræque abſolutas. Erit igitur $\Delta : \delta = S \times d^3 : T \times D^3$. Unde $\delta = \frac{T \times D^3 \times \Delta}{S \times d^3}$. Vel pro Δ ſcribendo 1, $\delta = \frac{T \times D^3}{S \times d^3}$. Significet litera s Solis ſemidiametrum è Terrâ viſam, in mediâ utique Solis diſtantiâ; litera π, parallaxin ejus horizontalem mediam. Erit igitur $D^3 : d^3 = \overline{\text{ſin. } s}^3 : \overline{\text{ſin. } \pi}^3$. Unde $\frac{D^3}{d^3} = \frac{\overline{\text{ſin. } s}^3}{\overline{\text{ſin. } \pi}^3}$. Hinc $\delta = \frac{T \times \overline{\text{ſin. } s}^3}{S \times \overline{\text{ſin. } \pi}^3}$. Jam vero $\frac{T}{S} =$

27,26 ×

Mercurii quàm apud nos: & Thermometro expertus ſum, quòd ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium verò non eſt, quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cùm materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat. LIBER TERTIUS.

PROP. IX. THEOR. IX.

Gravitatem, pergendo à ſuperficiebus Planetarum deorſum, decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quàm proximè.

Si materia Planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc Propoſitio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROP. X. THEOR. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In Scholio Propoſitionis XL. Lib. 2. oſtenſum eſt quòd globus Aquæ congelatæ, in Aëre noſtro liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentiâ Aëris amitteret motûs ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quàm proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum Terræ noſtræ denſiorem eſſe, quàm ſi totus ex Aquâ conſtaret, ſic

$\frac{17{,}26 \times \overline{\text{ſin.}\ {}^{\prime}8 - {}^{\prime\prime}50}^3 \times V^2}{\lambda^2 \times 6{,}551 \times R^3}$ (per formulam generalem vis Solaris ſuprà traditam (Not. [u].) Vel, ſi pro quantitate datâ $\frac{17{,}26 \times V^2}{\lambda^2 \times 6{,}551 \times R^2}$ ponatur A, $\frac{T}{S} = A \times \overline{\text{ſin.}\ {}^{\prime}8 - {}^{\prime\prime}50}^3$. Vel magis generaliter $\frac{T}{S} = \frac{A \times B^3 . \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3}{d^3}$, ſignificante literâ B radium orbitæ circularis, quam Luna, ceſſante tum Solis vi, tum ipſius propriâ, tempore λ circa Terram immobilem conficeret. Nam $\overline{\text{ſin.}\ {}^{\prime}8 - {}^{\prime\prime}50}^3$ illud eſt, quod fit augendo cubum è ſinu parallaxeos ſolis horizontalis pro ratione triplicatâ ejus, quam ſemidiameter Terræ ad radium illius orbitæ Lunaris habet. Hinc autem efficietur $\delta = \frac{A \times B^3 . \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3 \times \overline{\text{ſin.}\ s}^3}{d^3 \times \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3} = \frac{A \times B^3 \times \overline{\text{ſin.}\ s}^3}{d^3}$. Literâ p ſignificetur parallaxis Lunæ horizontalis, qualem utique ad diſtantiam B ea haberet. Erit $B^3 : d^3 = R^3 : \overline{\text{ſin.}\ p}^3$. Unde $\frac{B^3}{d^3} = \frac{R^3}{\overline{\text{ſin.}\ p}^3}$, et $\delta = \frac{A \times R^3 \times \overline{\text{ſin.}\ s}^3}{\overline{\text{ſin.}\ p}^3}$. Quare δ, Terræ denſitas, è ſinu anguli p definienda eſt, nullâ parallaxeos ſolaris ratione habitâ. Angulus autem ille p ad veram Lunæ parallaxin mediam rationem datam habet; eam utique, quam media Lunæ à Terrâ mobili diſtantia ad diſtantiam B.

DE MUNDI SYSTEMATE

colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quàm aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eâque de cauſâ globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quàm aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſitâ. Et par eſt ratio Terræ noſtræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc, ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento, maculæ ſolares leviores ſunt quàm materia lucida ſolaris, cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materia omnis gravior, quo tempore maſſa fluida erat, centrum petebat. Unde cùm terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quàm aqua; & paulo inferiùs in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt, quòd copia materiæ totius in Terrâ quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit, quàm ſi tota ex Aquâ conſtaret; præſertim cùm Terram quaſi quadruplo denſiorem eſſe quàm Jovem jam antè oſtenſum ſit. Quare ſi Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret, in Medio ejuſdem denſitatis cum Aëre noſtro, motûs ſui partem ferè decimam (y). Verùm cùm reſiſtentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut Aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quàm Argentum Vivum, minùs reſiſtat in eâdem ratione; & Aer, qui partibus 860 levior eſt quàm Aqua, minùs reſiſtat in eâdem ratione: ſi aſcendatur in cœlos, ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia propè ceſſabit. Oſtendimus utique in Scholio ad Prop. XXII. Lib. 2. quòd

(y) NIMIRUM ſi litera D ſignificet diametrum Jovis, litera T tempus quo ſtella Jovis, cum velocitate illâ quam maximæ minimæque mediam habet, ſpatium in inani conficeret, quod eſſet ad $\frac{8}{3}$D ut denſitas materiæ quæ eſt in corpore Jovis ad denſitatem liquoris ejus, per quem iter ei faciendum eſt; tempore quovis alio t, globus Jovialis ex liquoris illius renixu partem velocitatis ſuæ amittet, quæ erit ad eam, quæ initio fuit, ut t ad T + t. (Lib. 2. Prop. XXXV. Cor. 7.) Puta igitur materiam quæ eſt in Jove pari cum Aquâ noſtrâ denſitate præditam; globum autem Jovis per liquorem aliquem ferri, qui Aerem noſtrum denſitate referat. Ita erit denſitas materiæ Jovialis ad denſitatem liquoris, per quem iter ei faciendum eſt, ut 860 ad 1. Et cùm Jovis diameter è Sole viſa amplitudinem habeat ''37, amplitudo arcûs cæleſtis, qui ad $\frac{8}{3}$D rationem habeat quam 860 ad 1, ea erit 23°—'36—''16. Talem verò arcum ſtella Jovis, cum velocitate mediâ, ſpatio dierum 283 cum ſemiſſe ferè abſolverit. Atque hoc erit ſpatium tempore, quod literâ T deſignavimus, conficiendum. Unde ſi pro t ponatur ſpatium dierum 30, erit t ad T + t ut 30 ad 310,5, hoc eſt ut 1 ad 10 propemodum. Velocitas igitur quam ſtella Jovis, ſi per Aerem noſtrum ferretur ſpatio dierum

quòd ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorùm ſupra Terram, Aër ibi rarior foret quàm ad ſuperficiem Terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, ſeu 7500000000000 ad 1 circiter [z]. Et hinc ſtella Jovis in Medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentiâ Medii non amitteret motûs ſui partem decimam centeſimam milleſimam [aa]. In ſpatiis utique Terræ proximis, nihil invenitur, quod reſiſtentiam creet, præter aërem, exhalationes, & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſimè exhauſtis, gravia intra vitrum liberrimè & ſine omni reſiſtentiâ ſenſibili cadunt; ipſum Aurum & Pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor, ſex, vel octo, ſimul incidunt in fundum, ut experientiâ compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur, aëre & exhalationibus vacuos, Planetæ & Cometæ, ſine omni reſiſtentiâ ſenſibili, per ſpatia illa diutiſſimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum Syſtematis Mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui Terram, alii Solem in centro ſyſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROP. XI. THEOR. XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quieſcet vel progredietur

dierum 30 amitteret, pars quaſi decima totius eſſet.

(z) Vide De Syſtem. Mundi § 68. & confer Sect. VI. Diſſertationis noſtræ de Aere et Barometro inter Acta Philoſophica Anni 1774 editæ.

(aa) Imo partem hujus decimæ centeſimæ milleſimæ ſexageſimâ haud multo majorem. Cùm enim ſtella Jovis, ſi cum velocitate ſuâ mediâ per inane ferretur, ſpatio dierum $283\frac{1}{2}$ longitudinem conficeret, quæ eſſet ad $\frac{8}{3}$D ut 860 ad 1 (Not. y); omnino longitudinem, quæ eſſet ad $\frac{8}{3}$D ut 860×7500000000000 ad 1, non niſi ſpatio dierum $283\frac{1}{2} \times 7500000000000$ conficeret. Si igitur ſtella Jovis per liquorem feratur eâ denſitate præditum, quæ ſit ad corporis Jovialis denſitatem, ut 1 ad 860×7500000000000, pro tempore T, in Corollario 7. Prop. XXXV. Libri ſecundi, ponendi erunt dies 2162500000000000, ſive Anni Ægyptiaci 5820000000000. Unde ſi pro t ponantur Anni Ægyptiaci 1000000, erit t ad $T+t$ ut 1 ad 5820000‑1; ſive numeris quod aiunt rotundis, ut 1 ad 6000000. Pars igitur velocitatis, quæ ſpatio annorum Ægyptiacorum 1000000 amittitur, ea decimæ centeſimæ milleſimæ quaſi ſexageſima erit.

gredietur uniformiter in directum. Sed, centro illo ſemper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur, contra Hypotheſin.

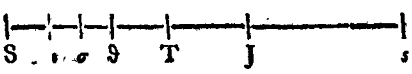
PROP. XII. THEOR. XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cùm (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo ſupra ſuperficiem ſolis. Eodem argumento, cùm materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 3021 ad 1, & diſtantia Saturni à Sole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem ſolis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, ſi Terra & Planetæ omnes ex unâ ſolis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ ſolis diametro à centro Solis diſtaret (bb). Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cùm centrum illud gravitatis perpetuò quieſcit, Sol, pro vario Planetarum ſitu, in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longè recedet (cc).

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cùm Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motûs perpetuò agitentur: perſpicuum eſt, quòd horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet,

(bb) Puta enim centra Solis, Telluris, Jovis et Saturni ad rectam eſſe: Solis quidem ad S, Terræ ad T, Jovis ad J, Saturni ad *s*. Sit ι locus centri gravitatis quod corporum duorum, Solis Joviſque, eſt commune. Quod trium, Solis, Jovis, et Saturni, eſt commune, ejus locus ſit σ; quod horum denique trium cum quarto terreſtri eſt commune, ejus locus ſit ϑ. Dico rectam Sϑ diametro Solis minorem eſſe. Ponatur ſemidiameter Solis = 1, ut diameter integra ſit 2. Jam cùm amplitudo ſemidiametri Solaris, qualis media ferè è tellure cernitur, ſit '16—"3, erit ST = 214. Unde cùm diſtantiæ Planetarum à Sole rationes inter ſe habeant quales ſuprà expoſuimus (Not. e) erit SI = 1116,1 et S*s* = 2040,4.



Jam verò cùm corpus Solis ſit ad corpus Jovis ut 1064 ad 1 (Not. r) erit SJ ad Sι ut 1065 ad 1. Sed SJ = 1116,1. Ergo Sι = 1,048. Sed S*s* = 2040,4. Quare ι*s* = 2039,352.

Rurſum cùm corpus Solis ſit ad corpora Jovis et Saturni ut 10000 ad 9,3972 & 3,2108 (Not. r)

2 erunt

eſſet, in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opi-
nio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cùm autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum ſolis quàm minimè diſcedit; & à quo idem adhuc minùs diſcederet, ſi modò ſol denſior eſſet & major, ut minùs moveretur.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Planetæ moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis; &, radiis ad centrum illud ductis, areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro ſolis; ſi Sol quieſceret, & Planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum Elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per Prop. I & XI. & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in ſe mutuò perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in Ellipſibus circa ſolem mobilem minùs perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omninò contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in Solem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni à Jove eſt ad diſtantiam Saturni à Sole ferè ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1067, ſeu 1 ad 211 circiter. Et

erunt corpora Solis Jovis et Saturni ad corpus Saturni ut 10012,6 ad 3,211. Unde ιs ad $\iota\sigma$ ut 10012,6 ad 3,211. Sed $\iota s = 2039,352$. Ergo $\iota\sigma = 0,654$.

Rurſus cùm corpus Solis ſit ad corpus Terræ ut 10000 ad 0,0304 (Not. [r]) calculis ſimiliter ſubductis invenietur $\sigma\vartheta = 0,0006$.

Hinc $s\iota = 1,048$

$\iota\sigma = 0,654$

$\sigma\vartheta = 0,0006$

Quare $s\vartheta = 1,703$ Sed diameter Solis erat 2. Quare $S\vartheta$ minor erit diametro Solari. Martis, Veneris, et Mercurii quanta ſint corpora, ignotum eſt. Haud tamen veriſimile eſt tanta ea eſſe, ut, centris omnium ad rectam ss poſitis, diſtantia centri gravitatis ſyſtematis totius diſtantiâ $s\vartheta$ eâ ratione major ſit, quâ numerus vicenarius numero 17 major eſt. At eâ ratione augeri oportet rectam $s\vartheta$, ut diametro Solari æqualis evadat.

([cc]) De Syſtem. Mundi § 28.

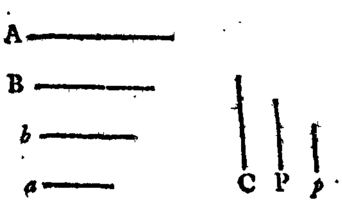
hinc

DE MUNDI SYSTEMATE

hinc oritur perturbatio orbis Saturni, in ſingulis planetæ hujus cum Jove conjunctionibus, adeo ſenſibilis, ut ad eandem Aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur; Aphelium nunc promovetur, nunc fortè retrahitur; & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem, à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari ferè poteſt, conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) Et propterea, ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum, & Jovis in Solem ſunt ferè ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 156609, ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longè minor eſt quàm ea ſaturnii ([dd]). Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longè minores, præterquam quòd orbis Terræ ſenſibiliter perturbatur à Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, ellipſin circum Solem in umbilico poſitum percurrit; &, radio ad ſolem ducto, areas in eâdem temporibus proportionales deſcribit; Terra verò circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur ([ee]).

PROP.

([dd]) Vide Tabulas Halleii Fff. 2. paginâ verſâ.
([ee]) De Syſtem. Mund. § 29.
([ff]) De Syſtem. Mund. § 30.



([gg]) EXPONATUR data quævis recta A; ſit alia *a* quæ ad illam A rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ terreſtris, qualem dato quovis temporis ſpatio, puta centum annis, vis Jovis effecerit, ad motum angularem habet, quem eodem temporis ſpatio vis Jovis in Aphelio orbitæ Martis effecerit. Motus autem angulares dico, quales è centro Solis, in mediâ corporis cujuſque à Sole diſtantiâ, cernerentur. Dico A ad *a* rationem habere ſuſquiplicatam ejus, quam diſtantia ſtellæ Martis à Sole media ad mediam Telluris ab eodem diſtantiam habet. Capiatur recta B, quæ habeat ad A rationem eam, quam motus angularis, quem ſpatio converſionis ſtellæ Martis circum Solem vis Jovis in Aphelio orbitæ ejus ſtellæ effecerit, ad motum angularem ejuſdem Aphelii â vi Jovis, dato quale poſuimus temporis ſpatio, efficiendum. Capiatur alia *b* quæ ad illam

B ra-

PROP. XIV. THEOR. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quieſcunt.

Aphelia quieſcunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem libri Prop. I. &, quieſcentibus planis, quieſcunt Nodi. Attamen à planetarum revolventium & cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hîc contemni poſſunt (ff).

Corol. 1. Quieſcunt etiam ſtellæ fixæ, propterea quòd datas ad Aphelia Nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque cùm nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis, ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum, ob immenſam corporum diſtantiam, nullos edent ſenſibiles effectus in regione ſyſtematis noſtri. Quinimo Fixæ, in omnes cœli partes æqualiter diſperſæ, contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

Cùm planetæ ſoli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parùm agant in ſe invicem: horum Aphelia & Nodi quieſcent, niſi quatenus à viribus Jovis, Saturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et indè colligi poteſt, per Theoriam gravitatis, quòd horum Aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu Fixarum, idque in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à Sole (gg). Ut ſi Aphelium

B rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ Terreſtris unius anni ſpatio à vi Jovis efficiendus, ad motum angularem Aphelii orbitæ Martis, qualem converſionis integræ ſtellæ Martis ſpatio vis Jovis in eo effecerit. Ita *b* ad *a* rationem habebit eam, quam motus angularis annuus Aphelii orbitæ Terreſtris, à vi Jovis oriundus, ad motum ejuſdem Aphelii, dato quali poſuimus temporis ſpatio, conficiendum. Sit recta C, quæ ad duas alias, P, *p*, rationes habeat quas datum temporis ſpatium, quo conficiuntur motus A, *a*, ad annos, ſi ita loqui liceat, Martialem et Terreſtrem ſingulatim. Jam cùm A et B ſint ut ſpatia motu æquabili, temporibus quæ ſunt ut C, P, conficienda, erit A ad B ut C ad P; vel ut rectangulum $C \times P$ ad quadratum ex P. Et cùm B et *b* ſint ut motus angulares, quos in apheliis Martis et Telluris vis Jovis, annorum Martialis Terreſtriſque ſpatiis, ſingulatim effecerit; et cùm anni illi ſint ut P, *p*, erit B ad *b* ut P^2 ad p^2. (Princip. Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 16.) Rurſum cùm *b* & *a* ſint ut ſpatia motu æquabili (nam de mediis Apheliorum motibus hìc agitur) temporibus quæ ſunt ut *p*, C conficienda, erit *b* ad *a* ut *p* ad C, vel ut quadratum ex *p* ad rectangulum $C \times p$.

Cùm igitur ſit $A : B = C \times P : P^2$; et $B : b = P^2 : p^2$; et $b : a = p^2 : p \times C$; ex æquo erit $A : a = P : p$.

Motus

DE MUNDI SYSTEMATE

Aphelium Martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu Fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc Propoſitione.

PROP. XV. PROB. I.

Invenire Orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſeſquiplicatâ temporum periodicorum, per Prop. xv. Lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

PROP. XVI. PROB. II.

Invenire orbium Eccentricitates & Aphelia.

Problema conſit per Prop. XVIII. Lib. I.

PROP.

Motus igitur angulares, quos in orbitarum Martialis Terreſtriſque apheliis, dato quovis temporis ſpatio, vis Jovis effecerit, ii temporum, quibus Martis Telluriſque globi converſiones ſuas ſingulatim abſolvunt, inter ſe rationem habent. Quæ autem temporibus illis ratio intercedit, ea ſeſquiplicata eſt ejus, quæ orbitarum axibus tranſverſis. (Lib. I. Prop. xv.) Motus igitur apheliorum angulares, à vi Jovis, rationem inter ſe habent diſtantiarum planetarum à Sole ſeſquiplicatam. Simili argumento concludemus motus angulares, à vi Saturni oriundos, eandem ſequiplicatam diſtantiarum rationem inter ſe ſervare. Quare et motus integri, à viribus illis conjunctis oriundi, eandem inter ſe rationem gerent. Q. E. D.

Ita ni fallor firmiſſimis rationibus geometricis probavimus, quæ de ſequiſplicatâ diſtantiarum ratione inter motus Apheliorum ſervandâ Newtonus pronuntiavit. Num igitur injuriâ dixero deliràſſe planè virum clariſſimum J. Bernouillum, cùm Newtonum dicat "nullo fundamento merâque apparentiâ nixum videri in conſtituendâ hâc ratione ſeſquiplicatâ." (Diſſert. de Syſtem. Carteſii.)

(hh) *Ex Inſtitutionibus Aſtronomicis Nicolai Mercatoris, p. 285 & ſeq.*

"Obſervatum eſt, quod præter motum in longitudinem & latitudinem, qualem Lib. 2. Sect. "II. expoſuimus, habeat quoque varias librationes circa ſui centrum, quibus maculæ transferuntur à medio orbe in ortum, occaſum, ſeptentrionem & auſtrum; & dum aliæ ex parte illuminatâ tranſeunt in obſcuram, aliæ contrà emergunt ex obſcurâ, & in lucidam concedunt. "Adhibito globo terreſtri, & elevato polo boreo ad ipſum Zenith, elige inſulam quandam ſub "æquatore ſitam, v. gr. D. Thomæ, quam ipſi cardini auſtri adjunges, ubi Meridianus Horizontem ſecat, & oculum tenebis in rectâ à centro per dictam inſulam continuatâ. Tum cogitato, hanc inſulam referre maculam Lunarem in ipſo centro diſci poſitam; & voluto globo "verſus ſiniſtram, donec Inſula ſeptem circiter gradûs conficiat in Horizonte, videbis omnes re-

"liquas

PROP. XVII. THEOR. XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motûs Legem I. & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Jupiter utique reſpectu fixarum revolvitur horis 9. 56′; Mars horis 24. 39′; Venus horis 23 circiter; Terra horis 23. 56′; Sol diebus $25\frac{1}{2}$, & Luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita ſe habere ex phænomenis manifeſtum eſt. Maculæ in corpore Solis ad eundem ſitum in diſco ſolis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, reſpectu Terræ; ideoque reſpectu fixarum Sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam verò Lunæ, circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt: hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus ſemper reſpiciet quamproximè, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc eſt libratio Lunæ in longitudinem: nam libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine Lunæ & inclinatione axis ejus ad planum Eclipticæ. Hanc librationis lunaris Theoriam D. *N. Mercator*, in Aſtronomiâ ſuâ initio anni 1676 editâ, ex literis meis pleniùs expoſuit (hh). Simili motu extimus Saturni ſatelles circa axem ſuum revolvi

" liquas partes telluris conſpicuas eodem motu vergere in ortum. Mox reductâ inſulâ ad Meri-
" dianum, & porro ad dextram ſeptem gradibus, videbuntur omnes partes globi conſpicuæ ver-
" gere in occaſum. Talis eſt libratio Lunæ in ortum & occaſum; quæ abſolvitur, dum Luna
" ab Apogeo redit ad Apogeon, perambulans octavam circiter partem diametri Lunaris prope
" centrum. Rurſus dictam inſulam pone ſub Meridiano; & fixo globo, move polum ultra &
" citra verticem ad ſeptem vel octo graduum ab eo diſtantiam; tum videbis, & inſulam, & re-
" liquas partes globi nunc in ſeptentrionem abſcedere, nunc rurſus in auſtrum nutare. Atque
" hujuſmodi eſt libratio Lunæ in ſeptentrionem & auſtrum, quæ abſolvitur, dum Luna à Nodo
" aſcendente revertitur ad eundem, & quam non ineptè vocaveris *librationem in latum*, eſtque
" priori illâ *in longum* aliquantò major. Cæterùm hæ duæ librationes Lunæ ſunt ſolutæ, nulli
" cum Sole congreſſui alligatæ, quanquam earum prior ab inæqualitate Lunæ menſtruâ nonni-
" hil augetur in quadraturis. Tertia verò reſpicit partem Lunæ illuminatam & obſcuram, ideó-
" que partim phaſibus menſtruis, partim verò ſitui nodorum accepta ferenda eſt. Concipietur
" autem quodammodo, ſi polum utrumque globi terreſtris deponas in Horizonte ligneo, ita ut
" alteruter eorum referat maculam in centro diſci Lunaris, & oculum teneas in axe continuato;
" Meridianum verò intelligas referre circulum illuminationis, qui diſcernat hemiſphærium Lunæ
" obſcurum ab illuminato, & ſit (phantaſiæ juvandæ gratiâ) pars ad lævam luci Solis expoſita,
" dum altera verſatur in umbrâ; & nequid deſit, pone primum Meridianum terreſtrem ſub Me-
" ridiano æneo. Jam ſi paululum dimoveas Meridianum primum ab æneo verſus lævam, videbis
" partes ſuperiores globi excedere è tenebris, & in lucem erumpere, dum inferiores è luce in
" tenebras abſcedunt: factâque reciprocatione, ſi revolvas primum Meridianum ad æneum, &
" ultrà ad dextram; contrarium evenire. Hæc libratio ſecundum Hevelium 5 circiter gradibus
" continetur, in limbo Lunæ computandis.

" Harum tam variarum atque implicitarum Librationum cauſas Hypotheſi elegantiſſimâ ex-
" plicavit

De Mundi Systemate

revolvi videtur, eâdem ſui facie ſaturnum perpetuò reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam, in eâ corporis parte quæ Terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quòd in parte corporis Jovi averſâ maculam habeat, quæ tanquam in corpore Jovis cernitur, ubicunque ſatelles inter Jovem & oculos noſtros tranſit.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Axes planetarum diametris, quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur, minores eſſe.

Planetæ, ſublato omni motu circulari, diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit, ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia, ſi fluida ſit, aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit; axem verò, deſcenſu ſuo ad polos, diminuet. Sic Jovis diameter (conſentientibus Aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento,

" plicavit nobis Vir Cl. Iſaac Newton, cujus Humanitati hoc & aliis nominibus plurimum debere me lubens profiteor. Hanc igitur hypotheſin, Lectori gratificaturus, exponam verbis, ut potero; nam delineationes in plano vix ſufficiunt huic negotio, præterquam quòd iis jam abundat hoc enchiridion. Itaque reverſus ad globum, cogita nunc illum repræſentare ſphæram, in quâ movetur Luna, cujus centrum occupet Tellus. Ipſum verò Lunæ globum credito polis & axe ſuo inſtructum, circa quem revolvatur motu æquabili ſemel menſe ſiderio, dum à Fixâ aliquâ digreſſa ad eandem revertitur; & æquator Lunaris ad firmamentum continuatus intelligatur congruere plano Horizontis lignei, & polus æquatoris Lunaris in firmamento immineat polo boreo globi ad Zenith elevato. Orbitam verò Lunæ concipito partim ſupra Horizontem ligneum attolli, partim verò infra eundem deprimi; quemadmodum in hoc ſitu globi conſpicitur Ecliptica (licèt angulus Æquatoris Lunaris & ejus Orbitæ fortè non ſit æquè magnus, atque hic, quem globus exhibet). Deinde finge tibi globulos duos æquales; quorum uterque Polis, Æquatore, & Meridiano unico primario inſigniatur; & uterque filo ſuſpendatur alterutri polorum alligato. Horum alter referat Lunam fictitiam motu æquabili ſecundum ductum Horizontis lignei circumlatam, atque eodem tempore circa axem ſuum revolutam reſpectu firmamenti; ita ut planum Meridiani primarii Lunaris perpetuò tranſeat per centrum Terræ. Alter verò globulus, veram Lunam imitatus, in orbitâ ſuâ feratur motu inæquali, nunc ſupra Horizontem ligneum emergens, nunc rurſus infra eundem deſcendens; ita ut planum Æquatoris hujus Lunæ veræ ſemper parallelum maneat plano Horizontis lignei, & planum Meridiani primarii ejuſdem Lunæ veræ ſemper parallelum plano Meridiani primarii Lunæ fictæ. Ita fiet, at Luna ficta eandem nobis faciem obvertens ſemper, nulli prorſus librationi ſit obnoxia.

mento, niſi Terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quàm ad polos, maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

PROP. XIX. PROB. III.

Invenire proportionem Axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noſter circa annum 1635 menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & obſervando differentiam latitudinum 2 *gr.* 28′ collegit menſuram gradûs unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt, hexapedarum Pariſienſium 57300 (kk).

Picartus menſurando arcum gradûs unius & 22′. 55″ in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradûs unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. *Caſſinus* ſenior menſuravit diſtantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Rouſſilion* ad obſervatorium Pariſienſe; & filius ejus addidit diſtantiam ab obſervatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Diſtantia tota erat hexapedarum $486156\frac{1}{2}$, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. $11\frac{5}{6}$″. Unde arcus gradûs unius prodit hexapedarum Pariſienſium 57061. Et ex his menſuris colligitur ambitus Terræ pedum Pariſienſium 123249600,

" noxiæ. At Luna vera, dum à Perigeo pergit ad Apogeon, præcedens Lunam fictam, Meridianum ſuum primarium oſtendit in medietate ſiniſtrâ ſui diſci, tot gradibus abeuntem à medio, quot ſunt inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. Ab Apogeo verò ad Perigeon deſcendens Luna vera ſequitur fictam, atque tum Meridianus primus veræ Lunæ recedit ab ejus medio ad dextram; hoc eſt, maculæ omnes vergunt in occaſum. Et cùm differentia inter mediam & veram Lunæ longitudinem in quadraturis evadat major, propter evectionem Syſtematis Lunaris à centro Telluris; hinc eſt, quòd in quadraturis librationes in longum cernuntur majores. Similiter intelligitur cauſa librationis in latum, quando Luna ſuperato nodo aſcendente (ſive ſectione Horizontis lignei & Orbitæ ſuæ) tendit ad limitem boreum; tum enim nobis, in centro Sphæræ poſitis, polus Lunæ boreus, & quæ ſint circa eum maculæ, abſconduntur; & polus auſtralis cum ſuis maculis in conſpectum venit: unde maculæ omnes conſpicuæ in boream tendere videntur. Contrarium accidit, Lunâ ad limitem auſtralem accedente. Ab iiſdem cauſis procedit macularum ex parte lucidâ in obſcuram tranſitus, & viciſſim. Nam in limite auſtrali polus Lunæ boreus à Sole illuſtratur, & quicquid eſt Zonæ frigidæ Arctico Lunari incluſum; dum frigida auſtralis in tenebris verſatur. Quòd ſi igitur Solem concipias in eâdem plagâ cum limite auſtrali, & Lunam poſt conjunctionem inde procedere ad nodum aſcendentem; tum maculæ ſuperiores, apud polum boreum ſitæ, paulatim unà cum ſuo polo à luce in tenebras concedunt, dum inferiores maculæ cum nodo auſtrali ex tenebris in lucem prorepunt. Contrarium eveniet ſemeſtri pòſt, cum Sol acceſſit ad limitem Lunæ boreum." Confer Lib. De Syſt. Mund. § 36.

(kk) Veriùs 57424.

DE MUNDI SYSTEMATE

& ſemidiameter ejus pedum 19615800, ex hypotheſi quòd Terra ſit ſphærica.

In latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit pedes Pariſienſes 15 dig. 1 lin. $1\frac{7}{9}$ ut ſuprà, id eſt, lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus pondus amiſſum eſſe partem undecimam milleſimam ponderis totius, & corpus illud grave, cadendo in Vacuo, deſcribet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius ſecundi.

Corpus in circulo, ad diſtantiam pedum 19615800 à centro, ſingulis diebus ſidereris horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens, tempore minuti unius ſecundi deſcribet arcum pedum 1433,46 (ll), cujus ſinus verſus eſt pedum 0,0523656, ſeu linearum 7,54064 (mm). Ideoque vis, quâ gravia deſcendunt in latitudine *Lutetiæ*, eſt ad vim centrifugam corporum in æquatore, à Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064 (nn).

Vis centrifuga corporum in æquatore Terræ eſt ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à Terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in duplicatâ ratione radii ad ſinum complementi latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267 (oo). Addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine illâ *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ, vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribet lineas 2177,267 (pp), ſeu pedes

(ll) Verius ni fallor 1430,4.
(mm) Veriùs pedum 0,0519151, ſeu linearum 7,47577.
(nn) Ut 2174 ad 7,47577.
(oo) Ut 7,47577 ad 3,23885.
(pp) 2177,239, ſeu pedes Pariſienſes 15, dig. 1, lin. 5,239.
(qq) Ut 2177,239 ad 7,47577.
(rr) 291,2 ad 1. Si igitur numeris quod aiunt rotundis rationem vis totius gravitatis Lutetiæ ad vim centrifugam corporum ſub æquatore eam ſtatueris, quam numerus 290 ad unitatem habet, haud multum à vero ut opinor aberraveris.

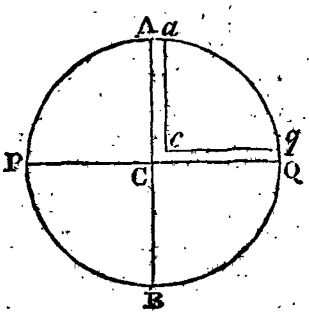
(ss) AD vires æſtimandas quibus Terra corpuſculum in polo Q poſitum verſus centrum ſui, C, trahat, intelligatur punctum P, in figurâ Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I. evaneſcente rectâ PA, cum ipſo A conjungi. Ita fient PS, AS æquales; & vires, quibus ſphærois ACBG corpuſculum in A vel P poſitum in centrum ſui trahat, ad vires quibus ſphæra, diametro AB ſcripta, idem corpuſculum incitaret, rationem habebunt quam $\frac{AS \times CS^2 - AS \times KMRK}{CS^2}$ ad $\frac{1}{3}AS$, ſive eam quam $CS^2 - KMRK$ ad $\frac{1}{3}CS^2$. Dato igitur quadrato ex CS, ad virium æſtimationem opus erit definire aream KMRK, ſive AMA, fig. p. 38. Hunc in finem ſectio conica, ARM ſpecie et magnitudine definienda erit.

Jam verò (in fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I.) ſi ſphæroideos axis AB diametro ejus CG ſit minor, ſectio conica KRM Ellipſis erit. Sit Z centrum ejus (fig. p. 38). Erit ZA ſemiaxis ejus tranſverſus. Ponatur Zr ſemiaxis ſecundus. E naturâ Ellipſeos erit $ZA^2 - ZB^2 : ZA^2 - ZS^2 = BM^2 : ST^2$.

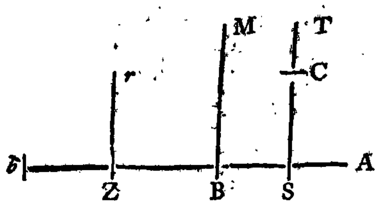
Convertendo

pedes Pariſienſes 15 dig. 1 & lin. 5,267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2177,267 ad 7,54064 (qq) ſeu 289 ad 1 (rr).

Unde ſi APBQ figuram Terræ deſignet jam non amplius ſphæricam, ſed revolutione ellipſeos circum axem minorem PQ genitam, ſitque ACQqca canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc, & inde ad æquatorem Aa pergens: debebit pondus aquæ, in canalis crure ACca, eſſe ad pondus aquæ in crure altero QCcq ut 289 ad 288; eo quòd vis centrifuga, ex circulari motu orta, partem unam è ponderis partibus 289 ſuſtinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure ſuſtinebit reliquas. Porro (ex Propoſitionis XCI. Corol. 2. Lib. 1.) computationem ineundo, invenio quòd ſi Terra conſtaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, & eſſet ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram foret ad gravitatem in eodem loco Q in ſphæram, centro C, radio PC vel QC deſcriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in ſphæroidem, convolutione ellipſeos APBQ circa axem AB deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, ut 125 ad 126 (ss). Eſt autem gravitas in loco A in Terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem



Convertendo & invertendo $ZS^2 - ZB^2 : ZA^2 - ZB^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Hoc eſt, ſi capiatur $Zb = ZB$, $bS \times BS : bA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.



Invertendo $bA \times AB$, ſive $2bA \times SB : bS \times SB = BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Sive $2bA : bS = BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Quare $bA : bS = \frac{1}{2} BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Dividendo $AS : Sb = ST^2 - \frac{1}{2} BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Sed punctis P, A (in fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. 1.) coeuntibus, erunt illæ BM, ST ipſis AB, AC æquales.
Quare $AS : Sb = AC^2 - \frac{1}{2} AB^2 : AB^2 - AC^2$.
Sed $AC^2 - \frac{1}{2} AB^2 = AS^2 + SC^2 - 2AS^2 = SC^2 - AS^2$.

Quare $AS : Sb = SC^2 - AS^2 : AB^2 - AC^2$.

Quare $Sb = \frac{AB^2 - AC^2}{SC^2 - AS^2} AS$.

Ponatur $AB^2 - AC^2 = p$, & $SC^2 - AS^2 = q$.

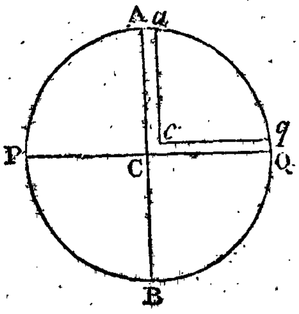
Erit igitur $Sb = \frac{p}{q} AS$: et $Bb = \frac{p}{q} AS - AS$. Quare $ZB = \frac{p}{2q} AS - \frac{1}{2} AS$.

Quare $ZA = \frac{p}{2q} AS + \frac{3}{2} AS = \frac{p+3q}{2q} AS$.

Vel, poſito $p + 3q = r$, $ZA = \frac{r}{2q} AS$. Unde datis AS, SC dabitur ZA.

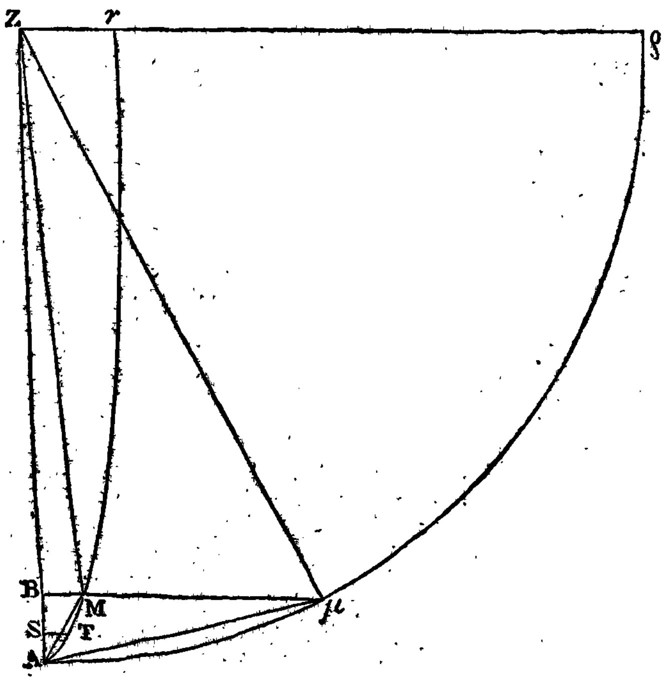
Jam

De Mundi Systemate



ſphæroidem & ſphæram: propterea quòd ſphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura, diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in A, in caſu utroque,

Jam $ZA^2 : Zr^2 = ZA^2 - ZB^2 : BM^2$ vel AB^2.
Permutando $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = Zr^2 : AB^2$.
Sed $ZA^2 : ZB^2 = r^2 : p^2 - 2pq + q^2$.
Quare $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = r^2 : r^2 - p^2 + 2pq - q^2$.
Sed $r^2 = p^2 + 6pq + 9q^2$.
Quare $r^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 8pq + 8q^2$.
Quare $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$.
Hinc $Zr^2 : AB^2$ vel $4AS^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$. Quare $Zr^2 : AS^2 = r^2 : 2pq + 2q^2$.
Sed $AS^2 : ZA^2 = 4q^2 : r^2$.
Ex æquo perturbatè $Zr^2 : ZA^2 = 2q : p + q$.
Unde $Zr : ZA = \sqrt{2}\sqrt{q} : \sqrt{p+q} = \sqrt{2}\sqrt{SC^2 - AS^2} : \sqrt{2AS^2}$.
Invertendo $ZA : Zr = AS : \sqrt{SC^2 - AS^2}$.



Datis igitur AS, SC, propter ZA jam antè inventam, dabitur etiam Zr.

Centro Z, radio ZA, ſcribatur circulus; qui rectis Zr, BM in punctis ϱ, μ occurrat: et jungatur $A\mu$.

Jam datis ZA, ZB, dabitur ſector circularis $ZA\mu$, necnon triangulum $Z\mu A$. Dabitur igitur ſegmentum circuli $A\mu A$, quo triangulum illud à ſectore abeſt. Dato autem ſegmento circulari $A\mu A$, dabitur Ellipticum AMA, quod ad circulare datam rationem habet, quam Zr ad ZA.

Ponatur jam $AS = 100$, $SC = 101$; ut ſphærois ACBG (fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. 1.) figuram induat, quam Newtonus Terræ poſuit.

Ita erit $p = 3 \times \overline{100}^2 - \overline{101}^2$
$q = \overline{101}^2 - \overline{100}^2 = 201$
$3q = 3 \times \overline{101}^2 - 3 \times \overline{100}^2$
$r = p + 3q = 2 \times \overline{101}^2$
$\frac{r}{2q} = \frac{\overline{101}^2}{201}$
Quare $ZA = 5075,12$.

Rurſum

que, diminuitur in eâdem ratione quàm proximè. Eſt igitur gravitas in A in ſphæram, centro C radio AC deſcriptam, ad gravitatem

Rurſum cùm ſit $ZA : zr = AS : \sqrt{SC^2 - AS^2} = 100 : \sqrt{201} =$ erit $zr = 719{,}523$.
Rurſum $ZB = ZA - AB = 5075{,}1 - 200 = 4875{,}1$.

Hinc arcus $A\mu$, cujus eſt coſinus ZB pro radio ZA, $= 16^{\circ} - 8' - 20''$.
Quare ſector circularis $ZA\mu = 3627522$.
Sed $B\mu$, ſinus arcûs $A\mu$ pro radio ZA, $= 1410{,}7$
Quare triangulum $Z\mu A = 3579744$.
Hinc ſegmentum circulare $A\mu A = 47778$.
Et ſegmentum Ellipſeos AMA, cùm ad ſegmentum circulare rationem habeat quam zr ad ZA, hoc eſt eam quam $719{,}5$ ad $5075{,}1$; idcirco $AMA = 6773{,}7$.

Jam verò $CS^2 = 10201$.
Quare $CS^2 - AMA = 3427{,}3$.
Sed $\frac{CS^2}{3} = 3400{,}3$.

Quare $CS^2 - AMA : \frac{CS^2}{3} = 3427{,}3 : 3400{,}3 = 125{,}99 + : 125 = 126 : 125$ quam proximè.

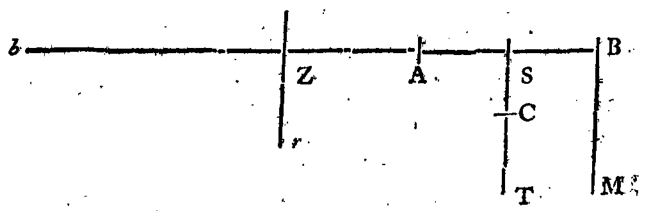
Vires igitur, quibus Terra corpuſculum in Polo poſitum verſus centrum incitaret, ſi talis ejus figura eſſet, qualem ad computationem faciliùs ineundam Newtonus poſuit, eæ ad vires quibus polleret ſphæra, quæ ipſum axem diametrum haberet, rationem eam, quæ à Newtono allegata eſt, ſatis exquiſitè ſervarent.

Vires autem, quibus ſphærois converſione meridiani terreſtris circa diametrum æquatoris generata corpuſculum, in diametri illius extremitate poſitum, in centrum urgeret, ad vires ſphæræ, quæ æquatorem terreſtrem circulum in ſuis maximum haberet, rationem modò allegatæ contrariam gerere, calculis ſimiliter ſubductis oſtendemus.



Nempe in figurâ Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I. ſi axis ſphæroideos AB diametro ejus CG ſit major, ſectio conica KRM ſeu ARM Hyperbola erit. Sit Z centrum ejus, ut ſit ZA ſemiaxis tranſverſus, & ponatur zr ſemiaxis ſecundus. Sint rectæ $Z\mu$, $Z\gamma$ ejuſdem aſymptotæ; quarum alteri occurrat BM in μ. Eidem in ϱ occurrat recta $A\varrho$, quæ hyperbolam in vertice A contingat. Jungatur ZM.

Jam è naturâ Hyperbolæ $ZB^2 - ZA^2 : ZS^2 - ZA^2 = BM^2 : ST^2$.
Convertendo & invertendo $ZB^2 - ZS^2 : ZB^2 - ZA^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$.



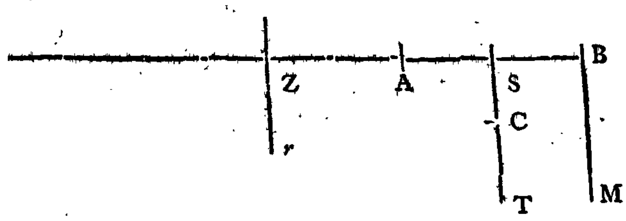
Hoc eſt poſitis ZB, Zb æqualibus, $bS \times SB : bA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Id eſt $bS \times SB : 2bA \times SB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Quare $bS : 2bA = BM^2 - ST^2 : BM^2$. Et $bS : bA = BM^2 - ST^2 : \frac{1}{2}BM^2$.
Convertendo et invertendo $AS : Sb = \frac{1}{2}BM^2 - ST^2 : BM^2 - ST^2$.
Id eſt $AS : Sb = \frac{1}{2}AB^2 - AC^2 : AB^2 - AC^2 = AS^2 - SC^2 : AB^2 - AC^2$.
Hinc $Sb = \frac{AB^2 - AC^2}{AS^2 - SC^2} AS$.
Ponatur $AB^2 - AC^2 = p$. Et $AS^2 - SC^2 = q$.
Tum $Sb = \frac{p}{q} AS$. Et $Bb = \frac{p}{q} AS + AS$.

Quare

vitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$; & gravitas in loco Q in ſphæram, centro C radio QC deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco A in ſphæram, centro C radio AC deſcriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id eſt, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500 (tt).

Jam cùm (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canali crure utrovis ACca, vel QCcq, ſit ut diſtantia locorum à centro Terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure ACca ad pondera partium totidem in crure altero

Quare $ZB = \frac{p}{2q} AS + \frac{1}{2} AS$. Et $ZA = ZB - AB = ZB - 2AS = \frac{p}{2q} AS - \frac{3}{2} AS = \frac{p-3q}{2q} AS$. Vel poſito $p - 3q = r$, $ZA = \frac{r}{2q} AS$.



Unde datis AS, SC dabitur ZA.

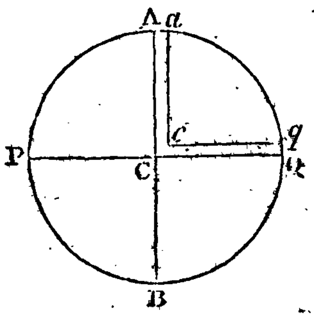
Jam $ZA^2 : Zr^2 = ZB^2 - ZA^2 : BM^2$ vel $4AS^2$. Permutando $ZA^2 : ZB^2 - ZA^2 = Zr^2 : 4AS^2$.
Sed $ZA^2 : ZB^2 = r^2 : p^2 + 2pq + q^2$.
Quare $ZA^2 : ZB^2 - ZA^2 = r^2 : p^2 + 2pq + q^2 - r^2$.
Sed $r^2 = p^2 - 6pq + 9q^2$. Quare $p^2 + 2pq + q^2 - r^2 = 8pq - 8q^2$.
Quare $ZA^2 : ZB^2 - ZA^2$, ſive $Zr^2 : 4AS^2$, $= r^2 : 8pq - 8q^2$.
Quare rurſum $Zr^2 : AS^2 = r^2 : 2pq - 2q^2$.
Sed $AS^2 : ZA^2 = 4q^2 : r^2$.
Ex æquo perturbatè $Zr^2 : ZA^2 = 2q : p - q$.
Invertendo $ZA^2 : Zr^2 = p - q : 2q = 2AS^2 : 2AS^2 - 2SC^2$.
Quare $ZA : Zr = AS : \sqrt{AS^2 - SC^2}$.
Datis igitur AS, SC, propter ZA jam ſuprà inventam, dabitur etiam Zr.

Jam datarum ZA, ZB ratio dabitur. (Dat. 1.) Quare et illarum $A\varrho$, $B\mu$ (fig. p. 39) ratio data. Sed $A\varrho$ magnitudine data eſt, nempe datæ Zr æqualis. Quare $B\mu$ magnitudine dabitur (Dat. 2.) Sed BM magnitudine data eſt, quippe datæ AB æqualis. Quare μM magnitudine data. Datarum igitur μM, $A\varrho$ ratio data. (Dat. 1.) Sed hujus rationis ſector hyperbolicus AZM eſt logarithmus, pro modulo utique triangulari $ZA\varrho$. Sed datis ZA, $A\varrho$, triangulum $ZA\varrho$ magnitudine datum. Quare ſector hyperbolicus ZAM magnitudine datus. Sed triangulum ZAM magnitudine datum, propter datas ZA, BM. Segmentum igitur hyperbolicum AM, quo ſector hyperbolicus à triangulo abeſt, magnitudine datum.

Ponatur jam AS = 101
SC = 100;
nempe ut ſphærois ACBG ejus ſphæroideos figuram induat, quam meridianus terreſtris, eâ figurâ præditus quam Newtonus poſuit, circum axem ſuum tranſverſum convertendo generaverit.

Ita

altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501.



Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure A*c*C*a*, ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea Fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verùm vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289; hoc eſt, vis centrifuga, quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$, eſt tantùm pars $\frac{1}{289}$. Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quòd ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure A*c*C*a* ſuperet altitudinem aquæ in crure QC*cq* parte centeſimâ

Ita erit $p = 3 \times \overline{101}^2 - \overline{100}^2$

$q = \overline{101}^2 - \overline{100}^2 = 201$

$3q = 3 \times \overline{101}^2 - 3 \times \overline{100}^2$

$r = p - 3q = 2 \times \overline{100}^2$

$\frac{r}{2q} = \frac{\overline{100}^2}{201} = 49{,}751$

$ZA = \frac{r}{2q} AS = 49{,}751 \times 101 = 5024{,}851.$

Rurſum $ZA : zr = AS : \sqrt{AS^2 - SC^2} = 101 : \sqrt{\overline{101}^2 - 100^2} = 101 : \sqrt{201}.$

Quare $zr = 705{,}34$

Jam cùm $ZA = 5024{,}851$

et $AB = 202,$

Erit $ZB = 5226{,}851$

Sed $ZA : ZB = A\varrho$ vel $zr : B\mu.$

Quare $B\mu = 733{,}697$

Et $BM = 202$

Quare $\mu M = 531{,}697$

Triangulum $ZA\varrho = ZA \times \frac{1}{2} zr$	$= 177212$
Quare ſector hyperbolicus ZAM	$= 500816{,}4$
Triangulum $ZAM = ZA \times \frac{1}{2} BM = 5024{,}851 \times 101$	$= 507509{,}9$
Quare ſegmentum hyperbolicum AMA	$= 6693{,}5$
Sed CS^2	$= 10000$
Quare $CS^2 - AMA$	$= 3306{,}5$
Sed $\frac{1}{3} CS^2$	$= 3333{,}3$

Quare vires, quibus ſphærois BCAG trahit corpuſculum in A poſitum, ad vires ſphæræ, cujus diameter AB, rationem habent quam 3306,5 ad 3333,3. Sed $3306{,}5 : 3333{,}3 = 125 : 126{,}014 = 125 : 126$ propemodum.

(tt) NIMIRUM cùm gravitas in Terram in loco Q ſit ad gravitatem in ſphæram, cujus radius QC, ut 126 ad 125; et gravitas in hanc ſphæram in loco Q ad gravitatem in ſphæram alteram, cujus radius AC in loco A, ut 100 ad 101; et gravitas in hanc alteram ſphæram ad gravitatem in Terram in loco A ut 126 ad $125\frac{1}{2}$; ex æquo Gravitas in Terram in loco Q erit ad gravitatem in Terram in loco A ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$; ſive ut $126 \times 126 \times 4$ ad $5 \times 125\frac{1}{2} \times 101$; ſive ut 63504 ad 63377,5. Sed 63377,5 ad 63504 ut 500 ad 500,998+, ſive ut 500 ad 501 propemodum. Quare Gravitas in Terram in loco Q ad gravitatem in Terram in loco A ut 501 ad 500.

 totius

De Mundi Systemate

totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantùm $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter Terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cùm Terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quòd milliare ſit menſura pedum 5000) Terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si Planeta major ſit vel minor quàm Terra, manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem; & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione; & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et ſi denſitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ, vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cùm Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & revolventium denſitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum Jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè (uu). Eſt igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cùm ejus diameter major ſit 37′, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33″. 25‴. Pro luce erraticâ addantur 3″ circiter; & hujus planetæ diametri apparentes evadent 40″ & 36″. 25‴: quæ ſunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita ſe habet ex hypotheſi quòd corpus Jovis ſit uniformiter denſum. At ſi corpus ejus ſit denſius verſus planum æquatoris quàm verſus polos, diametri ejus poſſunt eſſe ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel fortè 14 ad 13. Et

Caſſinus

(uu) Veriùs ut 1 ad 9,4; modò in corporibus Terræ Joviſque ea ſit denſitatum ratio quam nos ſuprà

Caſſinus quidem anno 1691 obſervavit, quòd Jovis diameter, ab oriente in occidentem porrecta, diametrum alteram ſuperaret parte ſui circiter decimâ quintâ. *Poundus* autem noſter teleſcopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros Jovis, anno 1719, menſuravit ut ſequitur. LIBER TERTIUS.

Tempora.			Diam. max.	Diam. min.	Diametri ad invicem.	
	dies	hor.	part.	part.		
Jan.	28	6	13,40	12,28	ut 12	ad 11
Mar.	6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
Mar.	9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr.	9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur Theoria cum phænomenis. Nam Planetæ magis incaleſcunt ad lucem Solis verſus æquatores ſuos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quàm verſus polos.

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam Terræ noſtræ minui ſub æquatore, atque ideo Terram ibi altiùs ſurgere quàm ad polos (ſi materia ejus uniformiter denſa ſit) patebit per experimenta Pendulorum, quæ recenſentur in Propoſitione ſequente.

PROP. XX. PROB. IV.

Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in Terræ hujus regionibus diverſis.

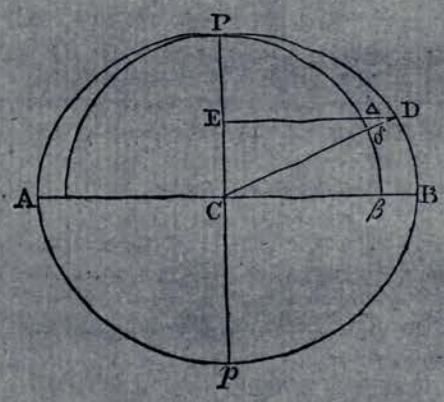
Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aquæ ACQ*qca* æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro Terræ. Proinde ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ, conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ

ſuprà conſtituimus; ut denſitas Jovis ſit ad denſitatem Terræ ut 10 ad 42. Vide ſuprà Not. u.

De Mundi Systemate

locorum à centro; & propterea, ex hypotheſi quòd Terra ſphærois ſit, dantur proportione.

Unde tale conſit Theorema; quòd incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, ſit quam proximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ; vel quod perinde eſt, ut quadratum ſinûs recti latitudinis. Et in eâdem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano (xx). Ideoque cùm latitudo *Lutetiæ Pariſiorum* ſit 48^{gr}. 50′, ea locorum ſub æquatore 00^{gr}. 00′, & ea locorum ad polos 90^{gr}. & duplorum ſinus verſi ſint 11334,00000 & 20000, exiſtente radio 10000; & gravitas ad polum ſit ad gravitatem ſub æquatore ut 230 ad 229, & exceſſus gravitatis ad polum



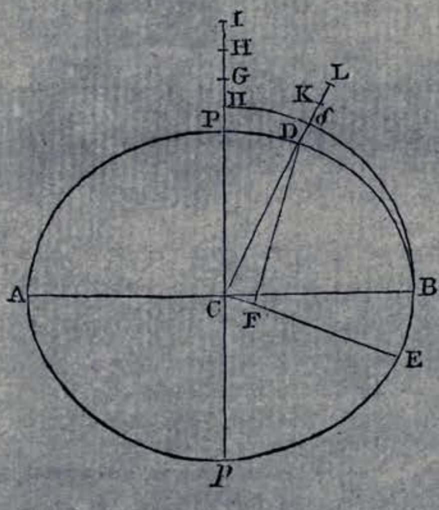
(x) Ellipsis cujus centrum C, axis tranſverſus AB, ſecundus P*p*, meridianum aliquem è terreſtribus referat: ut ſint P, *p* poli telluris, B, locus aliquis in æquatore. Sit D locus aliquis in meridiano PB*p*A, inter polum & æquatorem, & jungatur CD. In locis B, D, P collocari puta corpora tria inter ſe æqualia ex materiâ ſimili. Jam cùm pondera horum corporum rationem inter ſe gerant diſtantiarum eorum à centro C contrariam; diſtantiarum autem maxima ſit CB, minima CP, maximæ minimæque intermedia quædam CD; et eo minor cùm ſit CD quo minor diſtantia loci D à polo: hæc cùm ita ſint, corporis quod in B ſitum eſt pondus minimum erit; ejus quod in P, maximum; ejus quod in D, majus quidem pondere corporis quod in B, minus autem quàm ejus quod in P; eo autem majus quo minor loci D à polo diſtantia. Dicit Newtonus, illud quo pondus corporis in D exſuperat pondus corporis in B eſſe ut quadratum ex ſinu latitudinis loci; id eſt, illud quo pondus corporis in polo P exſuperat pondus ejus quod in B, ad illud quo pondus corporis in D exſuperat pondus ejus quod in B, rationem habere quam quadratum radii ad quadratum ex ſinu latitudinis loci D; ſive ad quadratum ex ſinu anguli BCD. Nam cùm Ellipſis BPA*p* parum admodum à Circulo recedat, angulus BCD angulo latitudinis loci D tantùm non æqualis erit.

A puncto D in axem Ellipſeos ſecundum, AB, ad perpendiculum deducatur DE. Centro C, radio CP, ſcribatur circulus; qui rectis CD, ED, CB in punctis δ, Δ, β occurrat. Jam cùm pondus corporis quod in P poſitum eſt ad pondus ejus quod in B rationem habeat quam CB ad CP; id eſt, eam quam CB ad Cβ: dividendo, illud quo pondus illius in P pondus hujus in B exſuperat ad pondus ipſum corporis in B rationem habebit quam Bβ ad Cβ. Simili argumento efficietur, pondus corporis in B ad illud, quo abeſt à pondere ejus quod in D, rationem habere quam Cδ vel Cβ ad δD. Ex æquo, illud quo pondus corporis in P exſuperat ejus quod in B, ad illud quo pondus corporis in D pondus corporis in B exſuperat, rationem habebit quam Bβ ad δD. Ratio autem rectæ Bβ ad δD compoſita eſt è rationibus rectæ Bβ ad ΔD, rectæque ΔD ad Dδ. Sed propter Ellipſin, Bβ erit ad ΔD ut CB ad DE. Et cùm Ellipſis à circulo parum admodum recedat, figura DΔδ à triangulo DCE ſpecie parum differt, et ratio rectæ ΔD ad Dδ ejus, quam CD habet ad DE, haud multùm abſimilis erit. Quare ratio rectæ βB ad Dδ haud multum ab eâ aberit, quæ componitur è rationibus rectæ CB ad DE rectæque CD ad DE, ſive eam quæ eſt rectanguli CB × CD ad quadratum ex DE. Sed, propter CB, CD tantùm non æquales, rectangulum CB × CD quadrato ex CD tantùm non æquale. Ratio igitur rectæ Bβ ad Dδ eam, quæ eſt quadrati ex CD ad quadratum ex DE, proximè referet. Et CD ad DE (propter figuram Ellipſeos BPA*p* à circulari parùm abhorrentem) rationem habebit ab eâ, quæ eſt radii ad ſinum latitudinis loci D, parùm diverſam. Eſt igitur Bβ ad D*d*, ſive illud quo pondus corporis in polo pondus ejus quod in æquatore exſuperat, ad illud quo pondus corporis in loco D pondus ejus quod in æquatore exſuperat, ut quadratum radii

polum ad gravitatem ſub æquatore ut 1 ad 229: erit exceſſus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cùm longitudines Pendulorum, æqualibus temporibus oſcillantium, ſint ut gravitates; & in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo Penduli, ſingulis minutis ſecundis oſcillantis, ſit pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius, ob pondus Aëris, $8\frac{5}{9}$: longitudo Penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine ſynchroni Penduli Pariſienſis, exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo conſit Tabula ſequens.

radii ad quadratum ex ſinu latitudinis loci D. Q. E. D.

SED dicit etiam Newtonus, incrementis Graduum in meridiano eandem ferè rationem intercedere. Id nos etiam ſic oſtendimus.



Ellipſis BPAp ut priùs referat meridianum terreſtrem; ut ſint P, p poli, B locus aliquis in æquatore. Sit D, locus aliquis in meridiano BPAp inter polum et æquatorem. Jungatur CD, & ducatur Ellipſeos ſemidiameter CE illius CD conjugata; et à puncto D in CE ad perpendiculum deducatur DF. Circulus, centro C, radio CB ſcriptus, rectis CP, CD in punctis Π, δ occurrat. Capiatur CG ad quam CΠ, et CH ad quam CG, et CI ad quam CH rationem habeat quam CP ad CΠ, vel CB. Rurſum capiatur CK ad quam Cδ, et CL ad quam CK rationem habeat quam CD ad Cδ.

Longitudinem gradûs meridiani ſub ipſo P ad longitudinem gradûs circa B rationem habere triplicatam ejus quam CB vel CΠ ad CP, ſive eam quam CH ad CP, ex Conicis notiſſimum eſt. Necnon longitudinem gradûs meridiani circa B ad longitudinem ejus qui circa D, rationem habere rectæ CP ad CE triplicatam. Quare et dividendo, longitudo illa quâ gradus circa B abeſt à gradu circa D ad longitudinem ipſam gradûs circa B rationem habebit quam $CE^3 - CP^3$ ad CP^3.

Sed è naturâ Ellipſeos rectangula CP × CB, DF × CE inter ſe ſunt æqualia. Quare $CP^3 : CE^3 = DF^3 : CB^3$. Sed (propter figuram Ellipſeos BPAa à circulari parùm abhorrentem) recta DF ſemidiametro CD tantùm non æqualis eſt. Quare et cubi ex illis DF, CD tantùm non æquales. Quare ratio CP^3 ad CE^3 à ratione ipſius CD^3 ad CB^3 vel $C\delta^3$, ſive ab eà quæ eſt rectæ CD ad CL, parùm aberit. Ac proinde parùm aberit, quin $CE^3 - CP^3$ ad CP^3 rationem habeat quam LD ad CD. Longitudo igitur, quâ gradus circa B abeſt à gradu circa D, ad longitudinem ipſam gradûs circa B rationem habebit ab eâ quæ eſt LD ad DC parùm diverſam.

Jam verò cùm longitudo gradûs ſub polo P ſit ad gradum circa B ut CH ad CP, hoc eſt ut CI ad CΠ; dividendo, longitudo quâ gradûs ſub polo P exſuperat gradum circa B erit ad gradum ipſum circa B ut IΠ ad CΠ. Et oſtenſum eſt gradum circa B ad longitudinem illam, quâ abeſt à gradu circa D, rationem habere ab eâ quæ eſt CD ad DL parum diverſam. Quare longitudo quâ gradus ſub ipſo polo exſuperat gradum circa B ad illam, quâ gradus circa D eundem circa B exſuperat, rationem habebit ab eâ, quæ eſt rectanguli IΠ × CD ad rectangulum CΠ × DL, ſive rectæ IΠ ad LD, parùm diverſam. Parùm igitur diverſam ab eâ quæ eſt ΠP ad Dδ. Namque propter CΠ, CP; Cδ, CD tantùm non æquales, erit IΠ = 3ΠP, & LD = 3Dδ. Ratio autem illius ΠP ad Dδ à duplicatâ ejus, quæ eſt radii ad ſinum latitudinis loci D, parùm recedere oſtenſa eſt. Conſtat igitur Propoſitum.

Conſtat

DE MUNDI

Latitudo loci.	Longitudo penduli.		Menſura gradûs unius in meridiano.
grad.	péd.	lin.	hexapedæ.
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Conſtat autem per hanc Tabulam quòd graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus geographicis figura Terræ pro ſphæricâ haberi poſſit: præſertim ſi Terra paulo denſior ſit verſus planum æquatoris quàm verſus polos.

Jam verò Aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes aſtronomicas faciendas miſſi, obſervârunt quòd horologia oſcillatoria tardiùs moverentur prope Æquatorem quàm in regionibus noſtris. Et primò quidem D. *Richer* hoc obſervavit, anno 1672 in inſulâ *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum Fixarum per meridianum menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardiùs moveri quàm pro medio motu Solis, exiſtente differentiâ 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda, per horologium optimum menſurata, oſcillaret, notavit longitudinem Penduli ſimplicis; & hoc fecit ſæpiùs

ſæpiùs ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli Pariſienſis, (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentiâ lineæ unius cum quadrante. LIBER TERTIUS.

Poſtea *Halleius* noſter, circa annum 1677 ad inſulam *Sanctæ Hellenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardiùs moveri quàm *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plurſquam octavâ parte digiti, ſeu lineâ unâ cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cùm longitudo cochleæ in imo parte Penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli, ſingulis minutis ſecundis oſcillantis, in Obſervatorio Regio Pariſienſi eſſe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in inſulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem Penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, exiſtente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac D. *Couplet* filius, anno 1697, menſe *Julio*, horologium ſuum oſcillatorium ad motum Solis medium in Obſervatorio Regio Pariſienſi ſic aptavit, ut tempore ſatis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyſſipponem* navigans invenit, quòd menſe *Novembri* proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, exiſtente differentiâ 2′. 13″ in horis 24. Et menſe *Martio* ſequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium ſuum tardiùs ire quàm *Pariſiis*, exiſtente differentiâ 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat Pendulum, ad minuta ſecunda oſcillans, brevius fuiſſe *Ulyſſipponi* lineis $2\frac{1}{2}$, & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quàm *Pariſiis*. Rectiùs poſuiſſet differentias eſſe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4′. 12″ reſpondent. Craſſioribus hujus obſervationibus minùs fidendum eſt.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes*, ad *Americam* denuò navigans, determinavit quòd in inſulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli, ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſet paulo minor quàm ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quódque in inſulâ *S. Chriſtophori* longitudo illa

illa eſſet ped. 3. lin. 6¾, & quòd in inſulâ *S. Dominici* eadem eſſet ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem Penduli, ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſe pedum trium Pariſienſium & linearum tantùm $5\frac{7}{12}$; id eſt, tribus ferè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Pariſiorum*, ſed errante obſervatione. Nam deinde ab inſulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli iſochroni eſſe pedum tantùm trium Pariſienſium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* eſt 6^{gr}. 38′ ad auſtrum, & ea *Porto-beli* 9^{gr}. 33′ ad boream, & latitudines inſularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Chriſtophori*, & *Sancti Dominici* ſunt reſpectivè 4^{gr}. 55′, 14^{gr}. 40′, 14^{gr}. 00′, 14^{gr}. 44′. 12^{gr}. 6′, 17^{gr}. 19′, & 19^{gr}. 48′ ad boream. Et exceſſus longitudinis Penduli Pariſienſis, ſupra longitudines Pendulorum iſochronorum in his latitudinibus obſervatas, ſunt paulo majores quàm pro Tabulâ longitudinum Penduli ſuperiùs computata. Et propterea Terra aliquanto altior (yy) eſt ſub Æquatore quàm pro ſuperiore calculo, & denſior ad centrum quàm in fodinis prope ſuperficiem, niſi fortè calores in zonâ torridâ longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Obſervavit utique D. *Picartus* quòd virga ferrea, quæ tempore hyberno, ubi gelabant frigora, erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quartâ parte lineæ. Deinde D. *de la Hire* obſervavit, quòd virga ferrea, quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi ſoli æſtivo exponebatur, evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quàm in poſteriore, in hoc verò major fuit quàm calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad ſolem æſtivum valdè incaleſcunt. At virga Penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori ſolis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quàm hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix

(yy) Imo humilior ſi hiſce experimentis fidendum eſt. Nempe ſi Pendulum polare æquatoreum magis [illegible]ret quàm ſi ſphærois homogenea eſſet, diameter æquatoris minus exſuperabit axem, e.

vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis Pendulorum, quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus Aſtronomorum, è *Galliâ* miſſorum, tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfectè congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi, ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quòd iſochrona Pendula ſunt breviora ſub Æquatore quàm in Obſervatorio Regio Pariſienſi, exiſtente differentiâ non minore quàm lineæ unius cum quadrante, non majore quàm linearum $2\frac{2}{3}$. Per obſervationes D. *Richeri*, in *Cayennâ* factas, differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum ſemiſſe, vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minùs accuratas prodiit eadem quaſi duarum linearum. Et hæc diſcrepantia partim ab erroribus obſervationum, partim à diſſimilitudine partium internarum Terræ & altitudine montium, & partim à diverſis Aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior eſt quàm tempore æſtivo, ſextâ parte lineæ unius, quantum ſentio. Ob calores ſub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante, à *Richero* obſervatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum lineâ $1\frac{87}{1000}$, per Theoriam jam antè collectâ, probè congruit. *Richerus* autem obſervationes, in *Cayennâ* factas, ſingulis ſeptimanis per menſes decem iteravit; & longitudines Penduli, in virgâ ferreâ ibi notatas, cum longitudinibus ejus in *Galliâ* ſimiliter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis obſervatoribus defuiſſe videtur. Si hujus obſervationibus fidendum eſt, Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos exceſſu milliarium ſeptendecim circiter, ut ſuprà per Theoriam prodiit.

PROP. XXI. THEOR. XVII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & Axem terræ, ſingulis revolutionibus annuis nutando, bis inclinari in Eclipticam, & bis redire ad poſitionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iſte nutandi perexiguus eſſet debet, & vix aut ne vix quidem ſenſibilis (zz).

& viciſſim: ut certiſſimis argumentis evicerunt Clairaultius & Simſonus noſtras.

(zz) Vide De Syſt. Mund. § 37.

De Mundi Systemate

PROP. XXII. THEOR. XVIII.

Motus omnes Lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis principiis conſequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes planetas deferre, & minores illos in Ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iiſque adficientur inæqualitatibus, quæ in Lunâ noſtrâ notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4 & 5. Prop. LXVI.) velociùs movetur, ac radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, orbemque habet minùs curvum, atque ideo propiùs accedit ad Terram, in ſyzygiis quàm in quadraturis; niſi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima eſt (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum lunæ in ſyzygiis verſatur, & minima ubi idem in quadraturis conſiſtit; & inde Luna in Perigæo velocior eſt & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior, in ſyzygiis quàm in quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8. Prop. LXVI.) velociùs progreditur in ſyzygiis ſuis, tardiùs regreditur in quadraturis; & exceſſu progreſſûs ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per Corol. 2. Prop. LXVI.) quieſcunt in ſyzygiis ſuis, & velociſſimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in ſyzygiis: & motus medius tardior in Perihelio terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ (α).

Sunt etiam aliæ quædam, à prioribus Aſtronomis non obſervatæ, inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates

(α) Vid. De Syſt. Mund. § 31.

(β) De Syſt. Mund. § 32.

(γ) Litera N ſignificet motum medium nodorum Lunæ, ſpatio menſis quem vocant periodici. Litera *n* motum medium nodorum Satellitis extimi è Jovialibus, eodem temporis ſpatio. Litera v motum medium nodorum Satellitis ejuſdem, propriæ converſionis circum Jovem ſpatio. Literæ T,

Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in ſyzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis ſolaris. Et Variatio præterea augetur vel minuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quàm proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo aſtronomico ad proſthaphæreſin lunæ referri ſolet, & cum eâ confundi (β).

PROP. XXIII. PROB. V.

Motus inæquales ſatellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi lunarum ſeu ſatellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius nodorum ſatellitis extimi Jovialis, eſt ad motum medium nodorum lunæ noſtræ, in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (γ) (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) ideoque annis centum conficit nodus iſte $8^{gr}. 24'$, in antecedentia. Motus medii nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hîc exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum et Augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis Lunæ reſpectivè, ut motus nodorum &

T, J ſignificent ſpatia converſionum Terræ & Jovis circum Solem. Literæ, *l*, *s* ſpatia converſionum Lunæ & Satellitis extimi Jovialis, illius circum Terram, hujus circum Jovem. Jam (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) $N : V = J^2 : T^2 + l^2 : s^2 = J^2 \times l^2 : T^2 \times s^2$.

Sed $V : n = s : l$ (nempe cùm motus medii ſint æquabiles) $= T^2 \times s^2 : T^2 \times sl$.

Ex æquo $N : n = J^2 \times l^2 : T^2 \times sl = J^2 \times l : T^2 \times s$.

Et invertendo $n : N = T^2 \times s : J^2 \times l$. Q. E. D.

 augis

De Mundi Systemate

augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. Variatio ſatellitis è Jove ſpectati, eſt ad variationem Lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus Nodorum, temporibus quibus ſatelles & luna ad ſolem revolvuntur, per idem Corollarium; ideoque in Satellite extimo non ſuperat 5″. 12‴ (ʃ).

PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus, tam lunaribus quàm ſolaribus, bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI. Lib. 1. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum luminarium ad meridianum loci minori quàm ſex horarum ſpatio ſequi; ut fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei*, ut & in maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter ſecundam, tertiam vel quartam, incidit; niſi ubi motus ab oceano profundo per loca vadoſa propagatus uſque ad horam quintam, ſextam, ſeptimam, aut ultrà, retardatur. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad meridianum loci, tam infra horizontem quàm ſupra; & per horas diei lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad meridianum loci revertitur. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impreſſa manet aliquamdiu, & per vim novam ſubinde impreſſam augetur, donec mare ad altitudinem maximam aſcenderit; id quod fiet ſpatio horæ unius duarumve; ſed ſæpiùs ad littora ſpatio horarum trium circiter, vel etiam plurium, ſi mare ſit vadoſum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur diſtinctè, ſed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol at-

(ʃ) De Syſt. Mund. § 34.

tollet

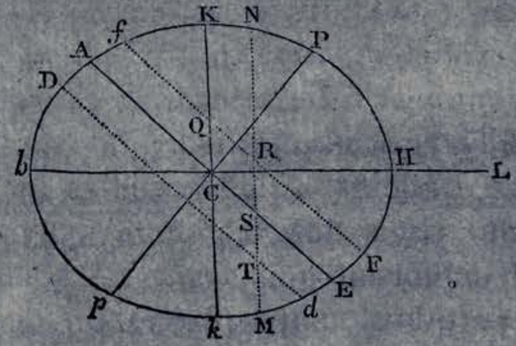
tollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teſte, major eſt effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra ſyzygias & quadraturas, æſtus maximus, qui ſolâ vi lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam lunarem, & ſolâ ſolari in tertiam ſolarem, compoſitis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius eſt; ideoque in tranſitu Lunæ à ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt octantes lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam lunarem, in tranſitu Lunæ à quadraturis ad ſyzygias. Hæc ita ſunt in mari aperto. Nam in oſtiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardiùs ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum diſtantiis à Terrâ. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in ſyzygiis paulo majores ſint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æſtivo; & Luna in perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quàm ante vel poſt dies quindecim, ubi in apogæo verſatur. Unde fit ut æſtus duo omnino maximi in ſyzygiis continuis ſe mutuò non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque luminaris ex ipſius declinatione, ſeu diſtantiâ ab Æquatore. Nam ſi luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, ſine actionis intenſione & remiſſione, ideoque nullam motûs reciprocationem cieret. Igitur luminaria, recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent; & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eo quòd Lunæ, jam in æquatore conſtitutæ, effectus maximè ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias, & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriuſque. Et æſtùm maximum

in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant æquinoctium vernum quàm ſequantur, & ſæpiùs ſequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum Latitudine. Deſignet A*p*EP Tellurem aquis profundis undique coopertam; C, centrum ejus; P, *p*, polos; AE, æquatorem; F, locum quemvis extra æquatorem; F*f*, parallelum loci; D*d*, parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; L, locum, quem Luna tribus antè horis occupabat; H, locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h*, locum huic oppoſitum; K, *k*, loca inde gradibus 90 diſtantia; CH, C*h*, maris altitudines maximas menſuratas à centro telluris; & CK, C*k*, altitudines minimas. Et ſi axibus H*h*, K*k* deſcribatur Ellipſis; deinde, ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem H*h*, deſcribatur ſphærois HPK*hpk*: deſignabit hæc figuram maris quàm proximè; & erunt CF, C*f*, CD, C*d* altitudines maris in locis F, *f*, D, *d*. Quinetiam ſi in præfatâ ellipſeos revolutione punctum quodvis N deſcribat circulum MN, ſecantem parallelos, F*f*, D*d*, in locis quibuſvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo maris in locis omnibus R, S, T, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; poſtea defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimò defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in F. Diſtinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemiſphæricos; unum, in hemiſphærio KH*k*, ad boream vergentem; alterum, in hemiſphærio oppoſito K*hk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet. Hi fluctus, ſemper ſibi mutuò oppoſiti, veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium



lunarium duodecim. Cúmque regiones boreales magis partici- pant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde ori- untur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & accidunt. Æſtus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; &, Lunâ declinationem mutante, vertetur in mino- rem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora ſolſti- tiorum; præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in princi- pio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quòd æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos, & veſpertini tempore æſ- tivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis uni- us, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervan- tibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſ- ſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motûs impreſſi minuit differentiam æſtuum al- ternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit, ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius, vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſy- zygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta di- verſa ad eundem portum, & citiùs tranſeat per aliqua freta quàm per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eun- dem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio ho- rarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad me- ridianum portûs. Si Luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales af- fluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eoſdem affluxibus æ- quabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient, ut aqua tranquillè ſtagnet.

Si

De Mundi Systemate

Si Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum; & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantùm perveniet ad maximam altitudinem, & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batſham*, ſub latitudine boreali $20^{gr}. 50'$, *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua, die tranſitum Lunæ per æquatorem ſequente, ſtagnat; dein Lunâ ad boream declinante, incipit fluere & defluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cùm Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum; dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet; alter ab oceano *Sinenſi*, inter continentem & inſulam *Luconiam*; alter à mari *Indico*, inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus, ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi*, per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo (t).

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

(t) De Syſt. Mund. § 38—47.

SECTIO

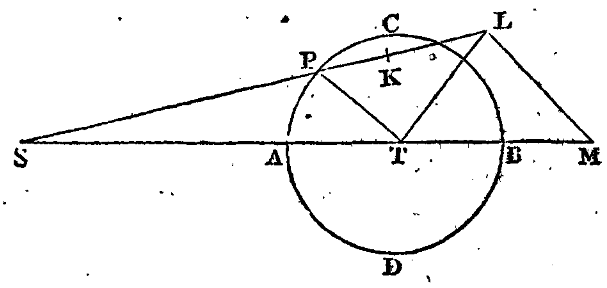
SECTIO II.

De quantitate Errorum Lunarium.

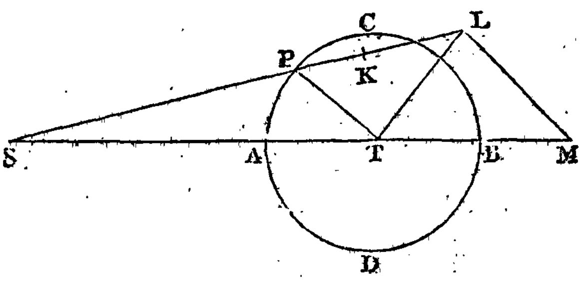
PROP. XXV. PROB. VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet s Solem, T Terram, P Lunam, CADB orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST; ſitque SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM: & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam ST, vel SK; erit SL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipſius SM pars TM, perturbat motum Lunæ, ut in Libri Primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud à viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas, TM & ML, deſignare. Vis ML, in mediocri ſuâ quantitate, eſt ad vim centripetam, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT, revolvi poſſet, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc eſt, in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 23. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in Propoſitione quartâ quòd, ſi Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium terræ quamproximè. Et vis quâ luna in orbe circa terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris



De Mundi Systemate



ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæ ſunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q.E.I.

PROP. XXVI. PROB. VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe circulari deſcribit.

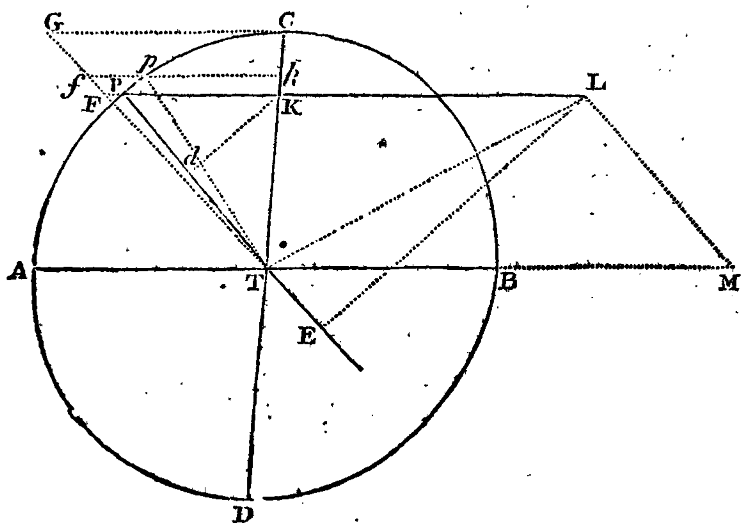
Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hîc inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, eâ ſolâ exceptâ, de quâ hîc agitur. Ob ingentem verò Solis diſtantiam, ponamus etiam lineas SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis LM reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem 3PK (a). Hæ vires (per legum Corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE, EL; quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL, agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantùm accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius à quadraturâ

(a) Vid. Lib. 1. Sect. II. Not. f.

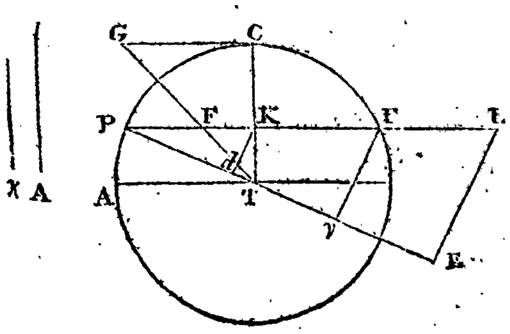
(b) Nimirum propter angulus ad K & E rectos, angulumque LPE triangulis duobus LPE, TPK communem, triangula illa ſunt inter ſe ſimilia ſed contrariè poſita. Quapropter recta PL erit ad rectam LE, ac proinde vis PL ſeu 3PK ad vim LE, ut recta PT ad rectam TK. Quare $EL \times TP = 3PK \times TK$, ſive $EL = 3PK \times \frac{TK}{TP}$.

(c) Nimirum hæc eſt argumentatio Newtoni. Poſitis TC, CG æqualibus, ductâque TG, quæ rectæ KP in F occurrat, erit fluxio rectæ CK ad fluxionem arcûs CP ut KP ad FP. (Introduct. ad

quadraturâ C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$ (b). Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (quod eodem

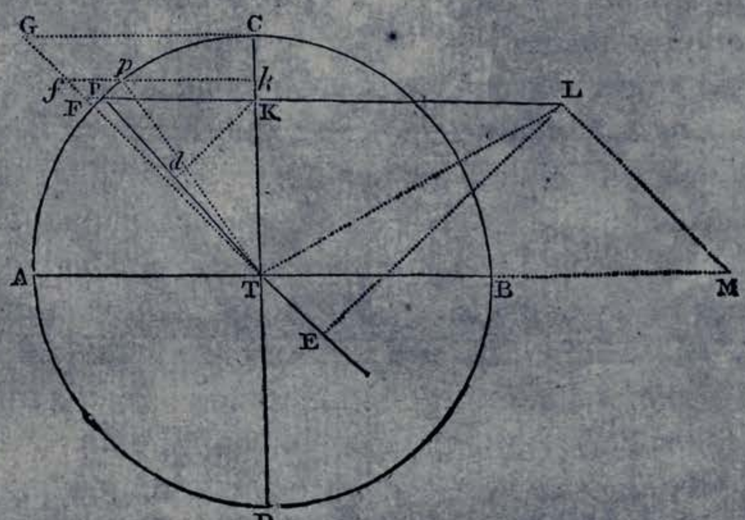


ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipſi CT æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ Temporis exponi poſſint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, hoc eſt in datâ ratione; ideoque $FK \times Kk$, ſeu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut EL; & compoſitè, area tota GCKF ut ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in Lunam; atque ideo etiam ut velocitas hâc ſummâ genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CTP, ſeu incrementum momenti (c). Vis quâ Luna

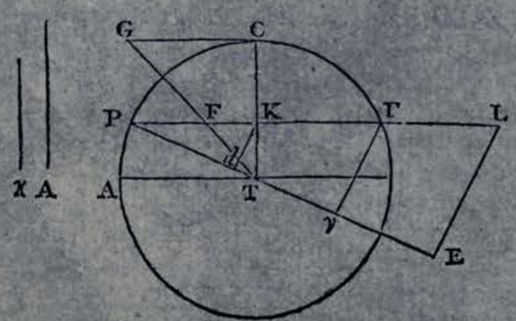


ad Quad. Curv. § 4.). Sint χ, A rectæ quædam, eâ lege ſive altera ſive utræque mutabiles, ut velocitatum creſcendi rectæ CK arcûſque CP rationes ſemper referant; ſecundum doctrinam Def. v. Geometriæ noſtræ Fluxionum. Erit igitur χ ad A ut KP ad TP. Permutando χ erit ad KP ut A ad TP. Jam verò propter æquabilem Lunæ motum (talis enim ponitur) quo arcus CP ſcribitur, fixa manet rectæ A longitudo. (Geometr. Flux. Def. v.) Sed data etiam TP. Quare datarum A, TP ratio data. Data igitur ratio rectæ χ ad PK. Quare,

Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam TP, tempore ſuo periodico CADB dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}$ CT, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, quâ Luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I ([d]). Cùm autem perpendiculum K*d*, in TP demiſſum, ſit ipſius EL pars



tertia, & ipſius TP, ſeu ML, in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, ubi maxima eſt ([e]), ſuperabit vim ML in ratione 3 ad 2; ideoque erit ad vim illam, quâ Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$, ſeu 11915; & tempore CT velocitatem generare deberet, quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris; tempore autem CPA, velocitatem majorem generaret, in ratione CA ad CT ſeu TP. Exponatur vis maxima



Quare, propter FK, TK inter ſe æquales, rectanguli $\chi \times$ FK ad rectangulum PK $\times$ TK ratio data. Quare rectanguli $\chi \times$ FK ad rectangulum 3PK $\times$ TK ratio data; ſive ad rectangulum TP $\times$ EL, quod rectangulo 3PK $\times$ TK oſtenſum eſt æquale. (Not. [p].) Verùm rectangulum $\chi \times$ FK fluxio eſt trapezii GCKF (De Quad. Curv. Prop. I.) Fluxio igitur trapezii GCKF rectanguli TP $\times$ EL rationem ſemper ſervat. Sed, propter rectam TP magnitudine datam, rectangulum illud TP $\times$ EL rectæ EL, & recta EL vis EL rationem ſemper ſervat. Denique vis EL eſt ſemper ut fluxio velocitatis quam in Lunâ generaverit. Hinc fluxio trapezii GCKF eſt ſemper ut fluxio velocitatis, quam vis EL in Lunâ generaverit. Quare cùm trapezium illud GCKF, & velocitas, quam vis EL in Lunâ generaverit, ſimul à nihilo generari inceperint, Lunâ utique in puncto C poſitâ, trapezium GCKF veloci-

maxima EL in octantibus per aream FK × Kk, rectangulo $\frac{1}{2}$TP × Pp æqualem ([f]). Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}$TP × CP ad aream KCGF: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}$TP × CA & triangulum TCG, ſive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. 5. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915, ſumma 11915 + 50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in ſyzygiâ A, ac differentia 11915 − 50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ, temporibus æqualibus in ſyzygiis & quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium FKCG ad triangulum TCG (vel quod perinde eſt, ut quadratum ſinûs PK ad quadratum radii TP, id eſt, ut Pd ad TP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita ſe habent, ex hypotheſi quòd Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore ſynodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cùm autem periodus ſynodica lunaris verè ſit dierum 29. hor. 12. & min. 44, augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id eſt, in ratione 1080853 ad 1000000. Hac pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$

tatis illius rationem ſemper ſervabit. (Geometr. Flux. Prop. IV.)

([d]) Vid. Lib. 1. Sect. II. Not. [l], Cor. H. 1 & 2.

([e]) VIM EL tunc maximam eſſe, quando Luna octantem teneat, eo patet quòd vis illa EL rectanguli 3PK × TK rationem ſemper ſervet. Maxima igitur erit, quando rectangulum illud maximum; id eſt quando PK × TK, rectangulum ſub ſinu & coſinu arcûs CP, maximum. Hoc autem ita maximum erit, ſi arcus CP quadrantis ſemiſſis ſit.

([f]) NEMPE vim EL fluxionis trapezii GFKC, ſive rectanguli χ × FK, rationem ſervare ſuprà oſtendimus. (Not. [c].) Sed ſi punctum P arcum CA medium dividat, ut maxima ſit vis EL, punctum F cum ipſo P congruet, et PK, FK erunt inter ſe æquales. Quapropter cùm ſit ſemper χ : A = PK : TP, ac proinde χ × FK : A × TP = FK × PK : TP^2; erit in tali ſitu puncti P, χ × FK ad A × TP, ſive fluxio trapezii GKFC ad fluxionem rectanguli CP × TP, ut PK^2 ad TP^2, id eſt ut 1 ad 2. Id eſt fluxio trapezii GFKC, fluxioni dimidii rectanguli CP × TP, in tali ſitu puncti P æqualis erit. Quare vis EL, quæ per fluxionem trapezii GFKC ſemper exponi poteſt, ea, quando maxima eſt, per fluxionem dimidii rectanguli CP × TP exponenda erit.

LIBER TERTIUS.

momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in ſyzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, ſeu 10973 ad 11073; & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P verſatur, ut 10973 ad 10973+P*d*, exiſtente videlicet TP æquali 100.

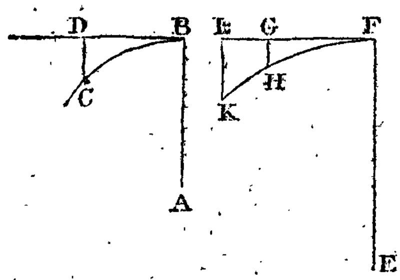
Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proxime ut ſumma numeri 219,46 & ſinûs verſi duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius eſt unitas [g]. Hæc ita ſe habent ubi Variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione.

PROP. XXVII. PROB. VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis momentis deſcribit, eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea diſtantia Lunæ à Terra

(g) Nimirum incrementum areæ eſt ut 109,73 + P*d*, ſi circuli radius TP ſit unitas; hoc eſt ut 2 × 109,73 + 2P*d*; id eſt ut 219,46 + 2P*d*. Sed 2P*d* æqualis eſt ſinui verſo duplæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ. Occurrat enim PK circulo iterum in r (vid. fig. Not. c), & ducatur r*v* cum illâ P*d* parallela, quæ rectæ TP in *v* occurrat. Jam arcûs CP quo, Luna à quadraturâ diſtat, hujus duplus eſt arcûs PCr: et hujus PCr ſinus verſus eſt recta P*v*, quæ dupla eſt illius P*d*.



(h) Sint Curvæ BC, FH, quas circuli, centris A, E, radiis AB, EF ſcripti, in punctis B, F oſculentur; rectæ verò BD, FG in punctis eiſdem B, F Curvas contingant. Jam ſi in Curvis inſcribantur æquales rectæ BC, FH, & à punctis H, C in tangentes FG, BD deducantur ad perpendiculum CD, HG; vel ſi in tangentibus ſumantur æquales BD, FG, et à punctis D, G, educantur ad perpendiculum DC, GH, quæ Curvis in punctis C, H occurrant: erunt DC, GH ſinus angulorum contactûs, ad B & F, pro radiis æqualibus BC, FH; vel tangentes eorundem pro radiis æqualibus BD, FG. Jam verò quæ, arcubus BC, FH infinitè imminutis, rectarum DC, GH evaneſcentium ultima eſt ratio, eam curvaturis in locis B, F intereſſe Newtonus poſuit. Nec ineptè ſanè: cùm evaneſcentium illarum ratio ultima radiorum AB, EF contraria ſit. Namque arcubus BC, FH infinitè imminutis, puncta C, H quæ ſemper ſunt ad Curvas, ea ultimò ad circulos etiam erunt radiis AB, EF ſcribendos. Et ex naturâ circuli, rectangula AB × CD, EF × GH, erunt ultimò inter ſe ut quadrata ex BD, FG. Sed quadrata ex BD, FG ultimò ſaltem inter ſe æqualia, nimirum cùm ipſæ BD, FG, ultimò ſaltem, inter ſe æquales. Rectangula igitur AB × CD, EF × GH ultimò inter ſe æqualia. Ac proinde CD : GH ultimò = EF : AB. Quæ igitur radiorum AB, EF inter ipſos eſt ratio, ea, contrariè ſumpta, evaneſcentium DC, GH ultima erit. Sed quæ radiis circulorum oſculantium eſt ratio, ejus contraria curvaturæ ratio eſt.

(Geometr.

Terra eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione areæ directè & ſubduplicatâ ratione motûs horarii inverſè. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciprocè ut ipſius diſtantia à Terrâ. Tentent aſtronomi quàm probè hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri poteſt.

PROP. XXVIII. PROB. IX.

Invenire diametros orbis in quo Luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inverſè. Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultimâ proportione ſinuum vel tangentium, angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur (h). Attractio autem Lunæ in Terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra vim ſolarem 2PK (vide *fig. pag.* 428) quâ gravitas acceleratrix Lunæ in Solem

(Geometr. Analyt. C. VII. § 1.) Curvaturæ igitur in locis B, F rationem eam, quæ eſt ultima evaneſcentium DC, GH, Newtonus rectè poſuit.

SED intelligantur Curvæ BC, FH, motu corporum quorundam generari, quæ è locis B, F, ſecundum rectas BD, FG, cum certâ unumquodque velocitate emiſſa, viribus incitentur, quæ, initio ſaltem, ſecundum rectas BA, FE agant. Dicit Newtonus curvaturam in B ad curvaturam in F rationem habere ex duabus compoſitam; quarum altera virium in locis B, F eſt ratio, altera duplicatæ velocitatum, quibuſcum corpora è locis illis emittuntur, contraria. Id verò ſic oſtendimus. Sint BC, FK arcus quilibet Curvarum BC, FH, quos corpora ſimul confecerint; et à punctis C, K in tangentes BD, FG deducantur ad perpendiculum CD, KL. Intelligantur arcus BC, FK infinitè minui, eâ tamen lege, ut, ſenſim evaneſcendo, tales ſemper ſint quos corpora ſimul confecerint. Jam rectangula 2.AB × CD, 2EF × KL, quadratis ex BD, FL, ac proinde quadratis ex BC, FK ultimò fiunt æqualia. Quare AB × CD : EF × KL ultimò $=$ BC^2 : FK^2 Sed EF × KL : EF × CD $=$ KL : CD. Quare AB : EF $=$ BC^2 : FK^2 ultimò + KL : CD ultimò. Invertendo EF : AB $=$ FK^2 : BC^2 ultimò + CD : KL ultimò.

Habet igitur EF ad AB rationem è duabus compoſitam; quarum altera evaneſcentium CD, KL eſt ultima, altera ejus quæ longitudinum BC, FK ultimò duplicata eſt, contraria. Sed propter arcus BC, FK ſimul confectos, rectæ CD, KL erunt ultimò inter ſe ut ſpatia, quæ corpora à viribus, quales in locis B, F vigeant, incitata, caſu recto ſimul conficerent; hoc eſt, ut vires illæ. Et quæ longitudinum BC, FK ultimò duplicata eſt ratio, ea velocitatum, quibuſcum corpora è locis B, F emittuntur duplicata erit. Habet igitur EF ad AB rationem è duabus compoſitam; quarum altera virium in locis B, F, eſt ratio, altera duplicatæ velocitatum, quibuſcum corpora è locis illis emittuntur, contraria. Jam verò curvaturæ in B ad curvaturam in F eadem quæ rectæ EF ad rectam AB erit ratio; ac proinde ex eiſdem rationibus componetur. Curvaturæ igitur in B ad curvaturam in F ea erit ratio, quam Newtonus allegavit.

ſuperat

ſuperat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem, vel ab eâ ſuperatur. In quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis Lunæ in Terram & vis ſolaris KT, quâ Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{ATq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quàm proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK, & Lunam trahit in Terram; erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit 3000; de quâ, ſi vis mediocris ML ſubducatur, manebit vis 2000, quâ Luna in ſyzygiis diſtrahitur à Terrâ, quamque jam antè nominavi 2PK ([i]). Velocitas autem lunæ in ſyzygiis A & B eſt ad ipſius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, deſcribit in ſyzygiis ad momentum ejuſdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut 11073 CT ad 10973 AT. Sumatur hæc ratio bis inverſè & ratio prior ſemel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i. e. ut * $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT\,cub.$ ad † $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT\,cub.$

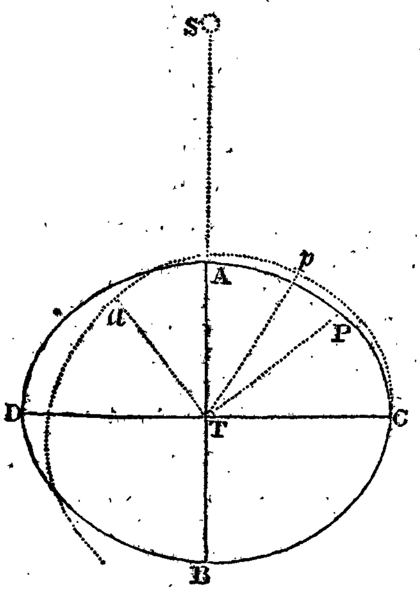
Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice aſſumamus Ellipſin DBCA, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major DC quadraturis, minor AB ſyzygiis interjaceat. Cùm autem planum Ellipſeos hujus motu angulari circa Terram revolvatur,

(i) Jam verò cùm vis terreſtris, quâ Luna urgetur in diſtantiâ N, ſit 178725, vis terreſtris in diſtantiâ AT erit $\frac{178725 \times N^2}{AT^2}$. Et cùm vis ſolaris, quæ in coitu Lunæ vi terreſtri obluctetur, quando Luna intervallo N à terrâ diſtet, ſit 2000; et in aliis Lunæ à terrâ diſtantiis diſtantiæ rationem conſtanter ſervet: ea in coitu Lunæ erit $\frac{2000 \times AT}{N}$. Unde vis tota è terreſtri et ſolari compoſita, quâ Luna in coitu urgetur in centrum Terræ, erit $\frac{178725 \times N^2}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N}$. Simili modo oſtendetur vim totam è terreſtri & ſolari compoſitam, quæ dimidiatam Lunam in Terram urgeat, eam eſſe $\frac{178725 \times N^2}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N}$.

Quare vis prior ad poſteriorem ut $\frac{178725 \times N^2}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N}$ ad $\frac{178725 \times N^2}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N}$.

Sive

tur, & trajectoria, cujus curvaturam conſideramus, deſcribi debet in plano quod omni motu angulari omninò deſtituitur: conſideranda erit figura quam Luna, in ellipſi illâ revolvendo, deſcribit in hoc plano, hoc eſt figura cpa; cujus puncta ſingula, p, inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipſi, quod locum Lunæ repræſentet, & ducendo Tp æqualem TP, eâ lege, ut angulus PTp æqualis ſit motui apparenti ſolis à tempore quadraturæ C confecto; vel (quod eodem ferè recidit) ut angulus CTp ſit ad angulum CTP ut tempus revolutionis ſynodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ, ſeu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$ (k). Capiatur igitur angulus CTa in eâdem ratione ad angulum rectum CTA, & ſit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a Apſis ima, & c Apſis ſumma, orbis hujus cpa. Rationes autem ineundo, invenio quòd differentia inter curvaturam orbis cpa in vertice a, & curvaturam Circuli centro T intervallo TA deſcripti, ſit ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp; & quòd curvatura Ellipſeos in A ſit ad curvaturam Circuli illius, in duplicatâ ratione TA ad TC; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC deſcripti, ut TC ad TA; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipſeos in C, in duplicatâ ratione TA ad TC; & differentia inter curvaturam Ellipſeos



Sive ut $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N \times N^2}$ ad $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N \times N^2}$.

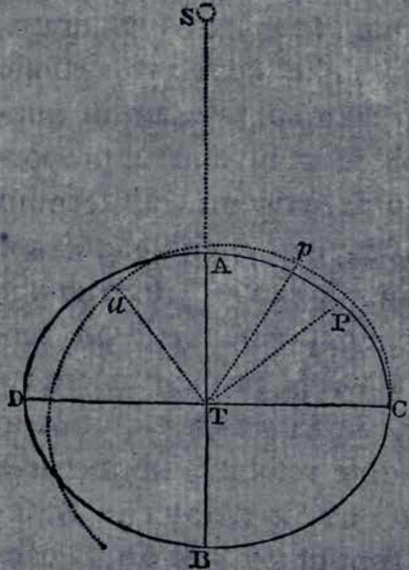
Verùm cùm perexigua ſit duarum AT, CT differentia, rectæ N, quæ duarum AT, CT arithmeticâ ratione media eſt, huic ea, quæ geometricâ ratione earundum eſt media, tantùm non æqualis erit. Unde in hoc negotio ponere licet $N^2 = AT \times CT$. Ita verò ratio vis, quæ Lunam in coitu vel plenam in terram urget, ad vim quæ dimidiatam urget, erit ut $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{N \times CT}$ ad $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{N \times AT}$; prorſus ut Newtonus conſtituit. (*Le Seur & Jacquier ad locum.*)

* Veriùs ni fallor 2151974.

† Veriùs ni fallor 2191365.

(k) Lib. I. Prop. XLIII.

De Mundi Systemate



in vertice C & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ T*pa* in vertice C & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicatâ ratione anguli CT*p* ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactûs ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura figuræ C*pa* in *a* ad ipſius curvaturam in C, ut AT *cub.* $+ \frac{16824}{100000}$ CT*q* × AT ad CT *cub.* $+ \frac{16824}{100000}$ AT*q* × CT ([1]). Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CT*p* applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^{d}. 7^{h}. 43'$, & $29^{d}. 12^{h}. 44'$,

([1]) Litera *t* menſem quem vocant periodicum, litera *s* ſynodicum ſignificet. Erit igitur angulus CTP ad angulum CT*p* ut *t* ad *s*. Quare vis centralis in orbe mobili in loco *a* erit ad vim centralem in Ellipſi CAD in loco A, ut $\frac{t^2 . TA}{CT^3} + \dfrac{\frac{TA^2}{TC} s^2 - \frac{TA^2}{TC} t^2}{TA^3}$ ad $\frac{t^2 \times TA}{TC^3}$. Id enim efficietur ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. ſi in formulâ generali illius Corollarii t^2 ſcribatur pro FF, TA pro A, TC^3 pro T cub, $\frac{TA^2}{TC}$ pro R, & s^2 pro GG. Ducendo omnia in $CT^3 \times TA$, efficietur vis centralis in ellipſi mobili in loco *a* ad vim centralem in ellipſi CAD in loco A, ut $t^2 \times TA^2 + CT^2 s^2 - CT^2 t^2$ ad $t^2 \times TA^2$.

Jam verò velocitas in Ellipſi mobili in loco *a* ad velocitatem in Ellipſi ſtabili CAD in loco A ut *s* ad *t*. Velocitatum igitur in locis illis duplicata ratio ea erit, quæ s^2 ad t^2, ſive $s^2 \times TA^2$ ad $t^2 \times TA^2$. Ratio igitur quæ componitur è ratione virium cum contrariâ ejus quæ duplicata eſt velocitatum, ea erit quæ quantitatis $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad quantitatem $s^2 \times TA^2$. Atque hæc erit ratio curvaturæ orbitæ *cpa* in loco *a* ad curvaturam ellipſeos CAD in A. Radius circuli, qui Ellipſin in A oſculatur, ſemiaxium TA, TC proportione tertius eſt. Quapropter radius ejus circuli ad ſemiaxem TA rationem habet quam TC^2 ad TA^2. Ac proinde Curvatura Ellipſeos in A ad curvaturam circuli cujus radius TA rationem habet, quam TA^2 ad TC^2; ſive eam quam $s^2 \times TA^2$, $s^2 \times TC^2$.

Jam cùm curvatura orbitæ *cpa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos CAD in loco A rationem habeat quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times TA^2$; cùm præterea curvatura Ellipſeos in loco A ad curvaturam Circuli, cujus radius TA, rationem habeat quam $s^2 \times TA^2$ ad $s^2 \times TC^2$: ex æquo Curvatura orbitæ *cpa* in loco *a* ad curvaturam circuli, cujus radius TA, rationem habebit quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times CT^2$. Curvatura autem circuli cujus radius TA ad curvaturam circuli cujus radius TC rationem habet quam TC ad TA; ſive eam, quam TC × TA ad TA^2. Et hujus circuli curvatura ad curvaturam Ellipſeos in loco C rationem habet quam TA^2 ad TC^2. Nempe cùm radius circuli, qui Ellipſin in C oſculetur, ſemiaxium TC, TA proportione ſit tertius. Ex æquo Curvatura circuli cujus radius TA ad curvaturam Ellipſeos in loco C rationem habet, quam TC × TA ad TC^2; ſive eam, quam TA ad TC. Cùm igitur Curvatura orbitæ *cpa* in loco *a* ad curvaturam Circuli, cujus radius TA, rationem habeat quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times TC^2$, curvatura autem circuli

44′, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.

Igitur cùm *a* deſignet ſyzygiam Lunæ, & *c* ipſius quadraturam; proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis Lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſuprà invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad AT × CT applicati, fiunt $2062,79\, CTqq - 2151969\, N \times CT\, cub. + 368676\, N \times AT \times CTq + 36342\, ATq \times CTq - 362047\, N \times ATq \times CT + 2191371\, N \times AT\, cub. + 4051,4\, ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT ſemiſummâ N ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentiâ ponendo *x*, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur *x* æqualis 0,00719: & inde ſemidiameter CT fit 1,00719; & ſemidiameter AT, 0,99281: qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quàm proximè (m). Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terrâ in ſyzygiis ad ipſius

circuli cujus radius TA ad curvaturam Ellipſeos in loco c eam, quam TA ad TC; Curvatura orbitæ *cpa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos CAD in loco c rationem habebit, quæ componitur è rationibus quantitatis $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times TC^2$, rectæque TA ad rectam TC; ſive eam quam quantitas $t^2 \times TA^3 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $s^2 \times TC^3$.

Rurſum vis centralis, quâ corpus in Ellipſi CAD retinendum eſſet, in loco c, ad vim centralem in eodem loco in orbe *cpa* rationem habet quam $t^2 \times CT^2$ ad $t^2 \times CT^2 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2$. Id quod efficitur ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. ſi in Corollarii illius formulâ generali, pro FF, GG, R, & T cub. ſcribantur, ſicut antè, t^2, s^2, $\frac{TA^2}{TC}$, TC^3, & TC pro A.

Velocitas autem corporis, per Ellipſin illam CAD delati, ad velocitatem corporis orbem *cpa* ſcribentis, in loco communi c, rationem habet quam *t* ad *s*. Quare duplicata velocitatum ratio ea erit quam t^2 habet ad s^2, vel $t^2 \times CT^2$ ad $s^2 \times CT^2$. Quæ igitur ex virium ratione cum duplicatæ velocitatum contrariâ compoſita eſt ratio, ea erit quam $s^2 \times CT^2$ habet ad $t^2 \times CT^2 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2$, ſive $s^2 \times CT^3$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$. Atque hæc eſt ratio curvaturæ Ellipſeos in loco c ad curvaturam orbitæ *cpa* in eodem loco.

Jam verò cùm curvatura orbitæ *cpa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos in c rationem habeat quam $t^2 \times TA^3 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $s^2 \times TC^3$; cùm præterea curvatura Ellipſeos in loco c ad curvaturam orbitæ *cpa* in eodem loco rationem habeat quam $s^2 \times CT^3$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$; ex æquo, Curvatura orbitæ *cpa* in loco *a* ad curvaturam ejuſdem in loco c rationem habebit quam $t^2 \times TA^3 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$; ſive eam, quam $TA^3 + \frac{s^2 - t^2}{t^2} CT^2 . TA$ ad $CT^3 + \frac{s^2 - t^2}{t^2} TA^2 . CT$.

Sed $t^2 : s^2 = 100000 : 116823,4$.

Quare $\frac{s^2 - t^2}{t^2} = \frac{16824}{100000}$.

Quare curvatura figuræ *cpa* in loco *a* erit ad ejuſdem curvaturam in c, ut $TA^3 + \frac{16824}{100000} CT^2 . TA$ ad $CT^3 + \frac{16824}{100000} TA^2 . CT$.

(m) MAJORIS evidentiæ gratiâ calculos ſubduco.

Cùm

ipſius diſtantiam in quadraturis (ſepoſitâ ſcilicet eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

PROP. XXIX. PROB. X.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ Ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna, radio ad Terram ducto, deſcribit. Si Luna P in ellipſi DBCA [*fig. p.* 66] circa Terram in centro ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio TP ad terram ducto deſcriberet aream CTP tempori proportionalem; eſſet

Cùm ſit $2151974\,\mathrm{AT}\times\mathrm{CT}\times\mathrm{N}-24081\,\mathrm{AT}^3$ ad $2191365\,\mathrm{AT}\times\mathrm{CT}\times\mathrm{N}+12261\,\mathrm{CT}^3$ ut $\mathrm{AT}^3+\frac{s^2-t^2}{t^2}\mathrm{CT}^2\times\mathrm{AT}$ ad $\mathrm{CT}^3+\frac{s^2-t^2}{t^2}\mathrm{AT}^2\times\mathrm{CT}$; ponatur $2151974=a$. $2191365=b$. $24081=c$. $12261=d$. $s^2-t^2=e$.

Ita erit $a.\mathrm{AT}\times\mathrm{CT}\times\mathrm{N}-c.\mathrm{AT}^3 : b.\mathrm{AT}\times\mathrm{CT}\times\mathrm{N}+d.\mathrm{CT}^3 = \mathrm{AT}^3+\frac{e}{t^2}\mathrm{CT}^2\times\mathrm{AT} : \mathrm{CT}^3+\frac{e}{t^2}\mathrm{AT}^2\times\mathrm{CT}$.

Et permutando $a\times\mathrm{CT}\times\mathrm{N}-c.\mathrm{AT}^2 : \mathrm{AT}^2+\frac{e}{t^2}\mathrm{CT}^2 = b\times\mathrm{AT}\times\mathrm{N}+d.\mathrm{CT}^2 : \mathrm{CT}^2+\frac{e}{t^2}\mathrm{AT}^2$.

Ponatur $\mathrm{N}=1$. $\mathrm{CT}=1+x$. $\mathrm{AT}=1-x$.

Unde $a\times\overline{1+x}-c\times\overline{1-x}^2 : \frac{t^2.\overline{1-x}^2+e.\overline{1+x}^2}{t^2} = b\times\overline{1-x}+d\times\overline{1+x}^2 : \frac{t^2.\overline{1+x}^2+e.\overline{1-x}^2}{t^2}$.

Et permutando $a\times\overline{1+x}-c\times\overline{1-x}^2 : b\times\overline{1-x}+d\times\overline{1+x}^2 = t^2.\overline{1-x}^2+e.\overline{1+x}^2 . t^2.\overline{1+x}^2+e.\overline{1-x}^2$.

Hoc eſt cùm x perexigua ſit, ut quadratum ejus negligi poſſit, $a+ax-c+2cx : b-bx+d+2dx = t^2-2t^2x+e+2ex : t^2+2t^2x+e-2ex$.

Id eſt $\overline{a-c}+\overline{a+2c}\,x : \overline{b+d}+\overline{2d-b}.x = s^2+\overline{2e-2t^2}\,x : s^2+\overline{2t^2-2e}\,x$.

Ponatur $a-c=\alpha$. $a+2c=\beta$. $b+d=\gamma$. $2d-b=\delta$. $2e-2t^2=-\iota$. $2t^2-2e=\iota$.

Ita erit $\overline{\alpha+\beta x} : \overline{\gamma+\delta x} = \overline{s^2-\iota x} : \overline{s^2+\iota x}$.

Quare $\overline{\alpha+\beta x}\times\overline{s^2+\iota x}=\overline{\gamma+\delta x}\times\overline{s^2-\iota x}$.

Id eſt $s^2\alpha+s^2\beta x+\alpha\iota x = s^2\gamma+s^2\delta x-\gamma\iota x$.

Quare $s^2.\overline{\beta-\delta}\,x+\overline{\alpha+\gamma}.\iota x = s^2\times\overline{\gamma-\alpha}$.

$$\text{Hinc } x=\frac{\overline{\gamma-\alpha}\times s^2}{\overline{\alpha+\gamma}\times\iota+\overline{\beta-\delta}\times s^2}=\frac{\overline{b+c+d-a}\times s^2}{\overline{a+b+d-c}\times\overline{4t^2-2s^2}+\overline{a+2c-2d+b}\,s^2}.$$

$$\text{Sive } x=\frac{\overline{b+c+d-a}\times s^2}{\overline{4t^2-s^2}\,\overline{a+b}+\overline{c-d}\times 4e}.$$

Jam vero $b+c+d-a=75733$. $a+b=4343339$. $4t^2-s^2=283176$. Quare $\overline{a+b}\times\overline{4t^2-s^2}=1229929000000$. $c-d=11820$. Et $4e=4\times 16824$. Quare $\overline{c-d}\times 4e=795438720$. Quare $\overline{4t^2-s^2}\,\overline{a+b}+\overline{c-d}.4e=1230724438720$.

$$\text{Quare } x=\frac{75733\times 116824}{1230724438720}=\frac{75733}{10534859}=0{,}007188+.$$

Erit igitur $\mathrm{CT}=1{,}00719$.

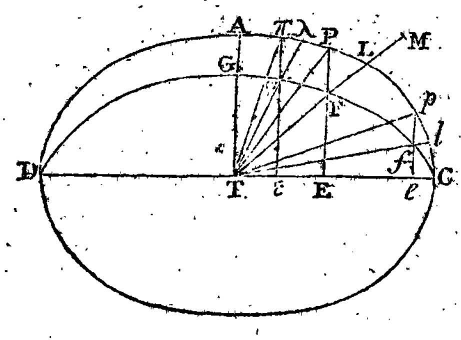
$\mathrm{AT}=0{,}99281$.

Sed

eſſet autem ellipſeos ſemidiameter maxima CT ad ſemidiametrum minimam TA ut 70 ad 69: foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motûs medii, à quadraturâ C computati, ut ellipſeos ſemidiameter TA ad ejuſdem ſemidiametrum TC, ſeu 69 ad 70. Debet autem deſcriptio areæ CTP, in progreſſu Lunæ à quadraturâ ad ſyzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygiâ Lunæ ſit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti, in loco quovis intermedio P, ſupra momentum in quadraturâ, ſit ut quadratum ſinûs anguli CTP (n). Id quod ſatis accuratè fiet, ſi tangens anguli CTP diminuatur in ſubduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69 (o). Quo pacto tangens

Sed 1,00719 : 0,99281 = 7,05033 : 6,94967 = 70½ : 69½ propemodum.

(n) Prop. XXVI. hujus Libri.



(o) ELLIPSIS CAD, cujus ſemiaxes, TC, TA, inter ſe rationem habeant quam numerus 70 ad numerum 69, orbem Lunæ referat; eâ utique figurâ præditum, quam ex circulari vis Solis efficeret. Hujus centrum, T, terra teneat. Axis tranſverſi vertex, C, Lunæ dimidiatæ locus erit; ſecundi, A, plenæ vel novæ. Capiatur TG, ad quam TA rationem habeat ejus quam 11073 ad 10973 ſubduplicatam. Centro T, ſemiaxibus TC, TG, ſcribatur Ellipſis alia CGD. Ellipſeos CAD capiatur ſector CTP, ad quem area integra ellipſeos rationem habeat, quam tempus converſionis Lunæ in orbe elliptico CAD ad minus quodvis tempus t. A puncto P in axem tranſverſum DC ad perpendiculum deducatur PE, quæ Ellipſi CGD in F occurrat. Juncta TF orbitæ Lunari in L occurrat. Erit punctum L verus Lunæ locus, quo tempore punctum P appelleret, ſi vis Solis, orbitâ circulari in ellipticam CAD mutatâ, æquabilem arearum in hâc orbitâ circa centrum T confectionem nihil perturbaret: ſaltem à loco vero illud L perpaululum aberraverit. Id quod ita perſpicuum erit, ſi oſtenderimus fluxionem areæ CTL in puncto C ad fluxionem ejus in puncto A rationem habere quam 10973 ad 11073, & in alio quovis loco fluxionem areæ CTL fluxionem ejus minimam, in loco C, tali quantitate exſuperare, quæ ad illam, quâ fluxio maxima in A eandem minimam in C exſuperat, rationem habeat ejus quam ſinus anguli CTL ad radium duplicatam: quin præterea aream CTL, in ipſo loco C naſcentem, ejus primùm quidem æqualem eſſe, quam primam ibi loci Luna vero ſuo motu ſimul ſcribat.

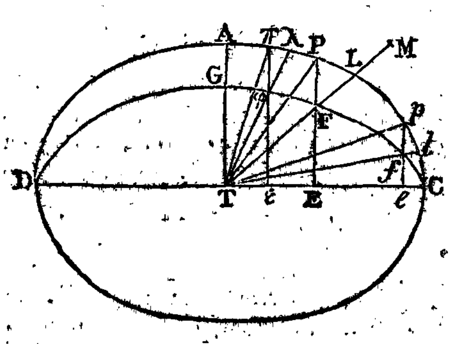
Transferatur punctum P, primùm quidem in locum quendam p puncti C vicinum, tum in locum π, tali diſtantiâ à puncto A diſſitum, ut ſectores CTp, ATπ inter ſe æquales ſint. Et à punctis p, π, in axem tranſverſum DC demiſſis ad perpendiculum pe, $\pi\epsilon$, quæ ellipſi interiori CGD in punctis f, φ occurrant, jungatur Tf, Tφ; quæ productæ orbitæ Lunari in punctis l, λ occurrant. Erunt l, λ loca puncti L, puncto P in locum p vel π tranſlato.

Jam verò evaneſcentibus angulis CTl, ATλ, ratio ultima evaneſcentis areæ CTl ad evaneſcentem CTp ea erit, quam ef habet ad ep, ſive eam quam TG ad TA, vel TG^2 ad $TG \times TA$. Sed evaneſcentis ATπ, vel CTp ad evaneſcentem ATλ ratio ultima, ea arcûs quoque Aπ ad arcum Aλ ultima erit: ſive ultima rectæ $AT - \pi\varphi$ ad AT, ſive eadem quæ eſt TG ad TA, vel $TG \times TA$ ad TA^2. Cùm igitur ſit area CTl ad aream CTp ultimò ut TG^2 ad $TG \times TA$; et area CTp ad aream ATλ ultimò ut $TG \times TA$ ad TA^2: ex æquo, ratio ultima evaneſcentis CTl ad evaneſcentem ATλ ea erit.

DE MUNDI SYSTEMATE

gens anguli CTP jam erit ad tangentem motûs medii ut 68,6877 ad 70, & angulus CTP in octantibus, ubi motus medius eſt 45^{gr}, invenietur $44^{gr}. 27'. 28''$. (p) qui ſubductus de angulo motûs medii 45^{gr}. relinquit Variationem maximam $32'. 32''$. (q) Hæc ita ſe haberent ſi Luna, pergendo à quadraturâ ad ſyzygiam, deſcriberet angulum CTA graduum tantùm nonaginta. Verùm ob motum Terræ, quo Sol in conſequentia motu apparente transfertur; Luna, priuſquam ſolem aſſequitur, deſcribit angulum CT*a* angulo recto majorem, in ratione temporis revolutionis lunaris ſynodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id eſt, in ratione $29^d. 12^h. 44'$. ad $27^d. 7^h. 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, & Variatio maxima, quæ ſecus eſſet $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$. (r)

Hæc eſt ejus magnitudo in mediocri diſtantiâ Solis à Terrâ, neglectis



erit quam TG^2 habet ad TA^2, ſive ea quam 10973 ad 11073. Quod primò demonſtrandum erat.

Rurſum in loco quovis P, locorum C, A intermedio, erit $\dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTL}} = TF^2 : TL^2$. Id eſt, ſi capiatur TM, duarum TF, TL proportione tertia, erit $\dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTL}} = TF : TM$. Invertendo et dividendo $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTF}} = MF : TF$. Sed cùm illæ TF, TL tantùm non æquales ſint, erunt FL, LM tantùm non æquales, & MF duplâ LF vix major. Ponatur igitur $MF = 2LF$. Erit igitur $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTF}} = 2LF : TF$.

Jam verò, cùm è naturâ Ellipſeon quarum axis eſt communis, ſit $\dot{\overline{CTP}}$ ad $\dot{\overline{CTF}}$ ut PE ad FE, cùm præterea rectarum PE, FE ſit ratio data, idcirco fluxionum $\dot{\overline{CTP}}$, $\dot{\overline{CTF}}$ ratio data eſt. Sed fluxio $\dot{\overline{CTP}}$ data, propter fluxum areæ CTP æquabilem. Quare fluxio $\dot{\overline{CTF}}$ data. Id eſt areæ CTF fluxus eſt æquabilis. Quare $\dot{\overline{CTF}} = \dot{\overline{CTf}}$. Sed evaneſcente angulo CT*l*, areæ CT*f*, CT*l*, necnon earum fluxiones, in ipſo puncto C, fiunt inter ſe æquales. Quare ſi fluxio areæ CT*l*, qualis eſt in ipſo puncto C, ſignificetur hac notâ, $\dot{c}$; erit in omni ſitu puncti L, $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}} = \dot{\overline{CTL}} - \dot{c}$. Et cùm oſtenſum ſit illam $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}}$ ad $\dot{\overline{CTF}}$ rationem habere quam 2LF ad TF, erit utique $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c} : \dot{\overline{CTF}} = 2LF$ ad TF. Ponatur recta $N = \frac{CT + TG}{2}$. Et ſit $TF = N \pm x$. Erit igitur $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c} : \dot{\overline{CTF}} = 2LF : N \pm x$. Sed propter perexiguam duarum CT, TG differentiam, fieri nequit quin *x* perexigua ſit. Ratio igitur rectæ 2LF ad $N \pm x$ vix alia erit, ac ea quam eadem 2LF ad datam N habet. Ratio igitur illius $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c}$ ad datam $\dot{\overline{CTF}}$ vix alia erit, ac ea quam 2LF habet ad datam N. Quare ſi per datam N exponatur fluxio data $\dot{\overline{CTF}}$, illa $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c}$ per rectam quandam mutabilem exponenda erit, quæ, in omni ſitu puncti L, rectæ mutabilis 2LF tantùm non æqualis erit. (Geometr. Flux. Def. V.) Quare ponere licet $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c} = 2LF$. Puncto igitur L in A tranſlato,

neglectis differentiis, quæ à curvaturâ orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quàm in gibboſam & plenam, oriri poſſint. In aliis diſtantiis Solis à Terrâ, Variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione diſtantiæ Solis à Terrâ inverſè. Ideoque in apogæo ſolis, Variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus perigæo 37′. 11″, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000 (s). LIBER TERTIUS.

Hactenus Variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique Luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à Terrâ. Si Luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat à Terrâ quàm ſi locaretur in hoc orbe, Variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quàm pro regulâ hîc allatâ: ſed

tranſlato, ſi fluxio areæ ATL in ipſo puncto A ſignificetur hâc notâ $\dot{a}$, erit $\dot{a} - \dot{c} = 2AG$. Quare $\dot{CTL} - \dot{c} : \dot{a} - \dot{c} = LF : AG$.

Jam verò ratio LF ad AG compoſita eſt è rationibus rectæ LF ad PF rectæque PF ad AG. Sed, propter exiguam ſemiaxium ellipſeos CAD differentiam, angulus FLP tantùm non rectus erit. Quare $LF : PF = EF : FT$ propemodum. Et è naturâ Ellipſeos, $PF : AG = FE : TG$. Ratio igitur rectæ LF ad AG componitur è rationibus rectæ EF ad FT rectæque EF ad TG. Ea igitur erit, quam quadratum ex EF habet ad rectangulum $FT \times TG$. Sed, propter TG, TF tantùm non æquales, erit rectangulum $TF \times TG$ quadrato ex TF tantùm non æquale. Haud multum igitur aberit quin LF ſit ad AG ut EF^2 ad TF^2. Quare et $\dot{CTL} - \dot{c}$ ad $\dot{a} - \dot{c}$ rationem habet ab eâ quam EF^2 ad TF^2, ſive ab eâ quam ſinus anguli CTL ad radium habet duplicatâ, haud multum abhorrentem.

Ex hiſce verò conſtat fluxum areæ CTL legibus eiſdem, vel parum ſaltem diverſis, attemperari, atque illius quam Luna, vi Solis obnoxia, in orbe ſuo CAD circum centrum T ſcribit. Sed et aream naſcentem CTL, in ipſo loco C, ejus primum quidem æqualem eſſe, quam Luna, ipſo motûs initio, primam ſimul ſcripſerit, ex eo patet quod ſuprà probavimus; aream utique naſcentem CTl ad aream motûs medii CTp ſimul naſcentem rationem habere quam TG ad TA; id eſt eam, quam numerus 10973 and numerum 11023; ſive eam, quam velocitas Lunæ vera in orbe CAD in loco C ad mediam cujus in eodem orbe velocitatem. Sed quæ veræ velocitatis Lunæ ad velocitatem ejus mediam ratio, eadem et areæ, quam vero motu ſcribat, ad aream motûs medii, naſcentis ad naſcentem, prima erit. Area igitur CTL areæ illius quam Luna, vi ſolis obnoxia, in orbe ſuo CAD ſimul ſcripſerit, naſcens naſcentis, in ipſo loco C primùm quidem æqualis erit. Areæ autem legibus eiſdem generatæ, ſi naſcendi initio æquales fuerint, manebunt ſemper inter ſe æquales, & punctum L, modo quo præſcripſimus definitum, verum Lunæ locum in orbe ſuo CAD ſatis exquiſitè ſemper referet. Q. E. D.

(p) 44° – ′27 – 30,7.

(q) ′32 – ″29,3.

(r) Veriùs ′35 – ″7.

(s) Motus horarius medius Lunæ à ſole, exiſtente Terrâ in Aphelio, vel in Perihelio, vel in medio orbis ſui loco, erit ′36 – ′05, vel ′35 – ″55, vel ′36 – 00, prout motus medios ab Hallcio in Tabulis ſuis æſtimari video. Hinc ſpatia menſis quem vocant ſynodici, quando Terra Aphelium, Perihelium, vel medium orbis ſui locum teneat, erunt ut ′35 – ″55, ′36 – ″05, ′36 – 0. Sive ut numeri 2155, 2165, 2160. Sumptis igitur telluris à Sole diſtantiis, quales à Newtono conſtitutæ ſunt, poſitâque Variatione maximâ, in mediâ telluris à Sole diſtantiâ, ′35 – ″7, invenio Variationem maximam in apogæo Solis ′33 – ″27; in ejus perigæo ′36 – ″51.

exceſſum

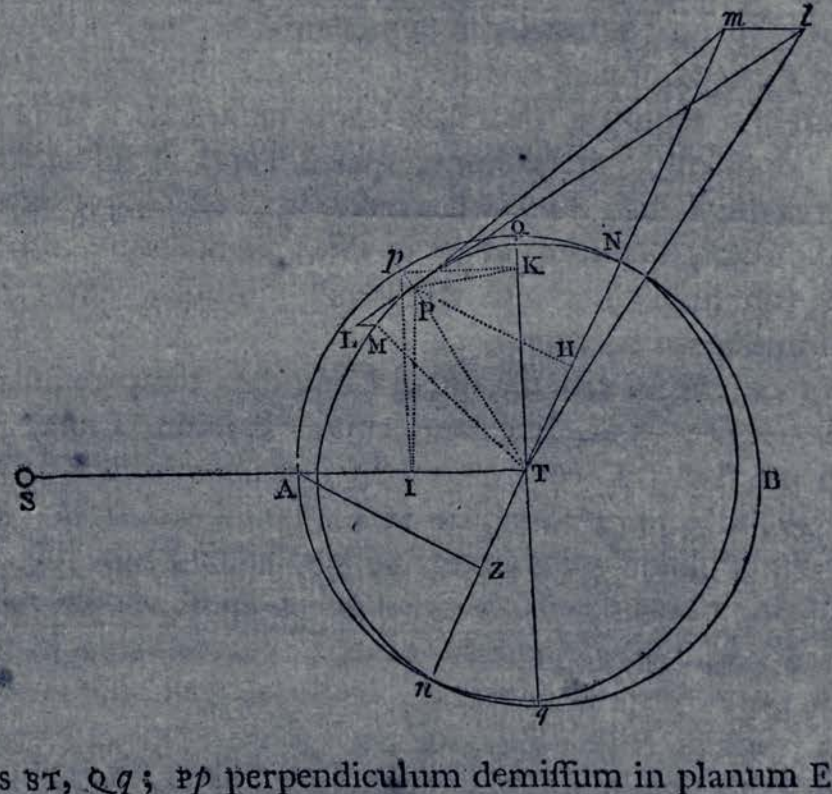
De Mundi Systemate

exceſſum vel defectum ab Aſtronomis per phænomena determinandum relinquo.

PROP. XXX. PROB. XI.

Invenire motum horarium Nodorum lunæ in orbe circulari.

Deſignet S ſolem, T terram, P lunam, NP*n* orbem Lunæ, N*pn* veſtigium orbis in plano Eclipticæ; N, *n* nodos, *n*TN*m* lineam nodorum infinitè productam; PI, PK perpendicula demiſſa in li-



neas ST, Q*q*; P*p* perpendiculum demiſſum in planum Eclipticæ; A, B ſyzygias Lunæ in plano Eclipticæ; AZ perpendiculum in lineam Nodorum N*n*; Q, *q* quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & *p*K perpendiculum in lineam Q*q* quadraturis interjacentem. Vis

(t) —*&* ML *lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ* 3IT, *eodem tempore deſcribere poſſet.*] Vitioſa ſunt hæc. Reponenda, quæ in Editione Primâ & Secundâ Newtonus dederat.—*&* ML *lineolam quam Luna, impellente vi præfatâ* 3IT, *eodem tempore deſcribere poſſet.* EMERSONUS. Aſſentior Emerſono.

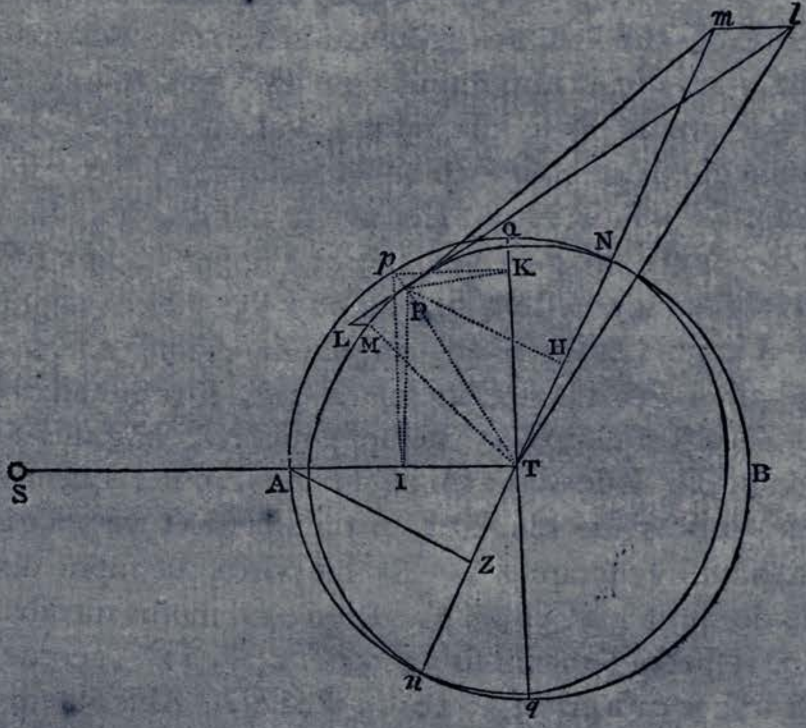
(u) —*quâ dimidium lineolæ* \[LM.] Editio Prima & Secunda, *quâ lineola* LM. Rectè. Inducenda ſunt etiam quæ uncis incluſimus, quæ in editione Primâ & Secundâ aberant. Quòd verò vis ſolaris efficaciam eo modo conſiderari jubet, quaſi *tota ſimul & ſemel in loco* P *impreſſa eſſet*, id non

Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex eſt; altera lineæ LM in ſchemate Propoſitionis illius, altera lineæ MT proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, poſteriore in Solem ſecundum lineam rectæ ST, à Terrâ ad Solem ductæ, parallelam trahitur. Vis prior LM agit ſecundum planum orbis lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT, quâ planum orbis lunaris perturbatur, eadem eſt cum vi 3PK, vel 3IT. Et hæc vis (per Prop. XXV.) eſt ad vim, quâ Luna in circulo circa Terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut 3IT ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterùm in hoc calculo, & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes à Lunâ ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ, quæ à Terrâ ad Solem ducitur; propterea quòd inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent. Liber Tertius.

Deſignet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quàm minimo deſcribit; & ML lineolam, cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ 3IT, eodem tempore deſcribere poſſet (t). Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi ſecent planum Eclipticæ; inque T*m* demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela eſt plano Eclipticæ, ideoque cum rectâ *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non poteſt, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi LMP*ml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea ſimilia erunt triangula LMP, *lm*P. Jam cùm MP*m* ſit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum *m* in lineam N*n* per orbis illius nodos, N, *n*, ductam. Et quoniam vis, quâ dimidium lineolæ LM (u) generatur, ſi tota ſimul &

non aliter accipio, ac ſi dixiſſet, cogitari oportere arcum PM infinitè minui, & velocitatem motûs Nodi, in loco P, ex illâ ratione æſtimandam, quàm angulus naſcens *m*TL ad alium quendam, motu æquabili naſcentem, primam habeat. Quod ipſum ſi dixiſſet, clariùs multo, me judice, locutus fuiſſet. Nempe recta LM ſenſim generata eſt, non ictu ſubito, ſed lentâ quâdam et perpetuâ virium uſque renaſcentium efficaciâ; quæ Lunam, totum illud tempus quod arcui PM conficiendo ea impenderit, ſecundum rectas cum rectâ TS parallelas incitârunt. Amplior fiat arcus PM: plures fuerint vires, quæ ad rectam LM generandam, ſuo quæque ordine & loco, operas contulerint. Contrahatur arcus PM; fuerint illæ pauciores: & quo magis ille uſque contrahatur, eo illæ uſque pauciores. Unde ſi arcus ille evaneſcat, & coeuntibus punctis PM in nihilum tandem abeat,

& ſemel in loco P impreſſa eſſet, [generaret lineam illam totam; &] efficeret, ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet LP, atque ideo transferret lunam de plano MP*m*T in planum LP*l*T;



motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo *m*T*l*. Eſt autem *ml* ad *m*P ut ML ad MP; ideoque cùm MP, ob datum tempus, data ſit, eſt *ml* ut rectangulum ML × *m*P, id eſt, ut rectangulum IT × *m*P. Et angulus *m*T*l*, ſi modò angulus T*ml* rectus

abeat, vires omnes rectæ LM genitrices in ſimplicem, ſi ita dicam, ictum vis illius 3IT in loco P ultimò abierint; id eſt in vim, quæ tota ſimul & ſemel in loco P impreſſa fuerit. Qui igitur eo ſermone uſus eſt, "*vim quâ lineâ* LM *generatur totam ſimul & ſemel in loco* P *imprimi*," is ſcilicet arcum PM infinitè imminui intellexit, & vim illam ſimplicem & primam cogitavit, quæ rectæ LM naſcendi quaſi initia ſuppeditat.

(ˣ) Nempe in hanc ſententiam Newtonus diſputat. Vis terreſtris, quæ, extinctâ vi ſolari, Lunam in orbe circulari retineret, ea, quo tempore Luna per arcum PM ferretur, id utique efficeret, ut Luna curſum rectum, quem, è loco P egreſſa, vi inſitâ tenuiſſet, ſi vis omnis centralis ibi loci extincta eſſet, eum in M delata cum alio mutaret, qui ad priorem illum angulo ipſius MTP æquali inclinatus eſſet. Nam curſus rectus, qui Lunæ, per orbem circularem in locum P vel M delatæ, deinceps ob vim inſitam tenendus eſſet, ſi in utrovis loco vis centralis ſubito deficeret, is quidem orbem ipſum ibi loci contingeret. Quæ verò circulum eundem, in locis diverſis, lineæ rectæ contingunt, eæ angulum inclinationis mutuæ ejus æqualem faciunt, qui, ad centrum circuli conſtitutus, arcum ipſum contactûs punctis interceptum, baſin habet. Rectæ igitur quæ orbem Lunæ circularem, NP*q*, in punctis P, M contingunt, mutuæ inclinationis angulum ipſius MTP æqualem habent. Et talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis illa quâ in orbe NP*q* retinenda eſſet, tempore, quo per arcum PM ferretur, ceſſante vi ſolari, ſola efficeret.

rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{TP}$, id eſt (ob proportionales TM & MP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideoque ob datam TP, ut IT × PH. Quod ſi angulus Tml, ſeu STN, obliquus ſit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione ſinûs anguli STN ad radium, ſeu AZ ad AT. Eſt igitur velocitas nodorum ut IT × PH × AZ, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis, & Lunâ in ſyzygiâ exiſtentibus, recti ſint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in caſu, angulus mPl eſt ad angulum PTM, quem Luna eodem tempore motu ſuo apparente circa Terram deſcribit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis eſt angulo LPM; id eſt, angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem ſola vis præfata ſolaris 3IT, ſi tum ceſſaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare poſſet; & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis ſolaris 3IT, eodem tempore generaret (x). Et hæ vires, ut ſuprà diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cùm motus medius horarius Lunæ reſpectu fixarum ſit $32'. 56''. 27'''. 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc caſu erit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium TPI, PTN, & STN (ſeu diſtantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole) ad cubum radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in

ret. Jam verò vis ſolaris 3IT, quæ Lunam eo ipſo temporis puncto, quo ſimplici vi terreſtri incitata, locum M appuliſſet, apud punctum L conſtituit; hæc inquam vis ſolaris, eo temporis ſpatio quo Luna arcum PM abſolverit, id utique effecerit, ut Luna viam circularem PM cum aliâ viâ curvâ, per puncta P, L ducendâ, mutaverit; et impetum, quem in loco P habuit progrediendi ſecundum rectam quæ arcum PM in P contingeret, cum alio mutaverit, progrediendi ſecundum rectam quæ aliam illam viam curvam in L contingat. Et qualiſcunque ſit rectarum inclinatio mutua, quæ Curvas PM, PL in punctis P, L contingant, talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis ſolaris 3IT, tempore quo motu medio Lunæ conficitur arcus PM, ceſſante vi terreſtri, ſola generaret. At verò arcubus PM, PL infinitè imminutis, eorum chordæ PM, PL cum rectis contingentibus ultimò congruunt, & angulum inclinationis mutuæ eum ultimò quem tangentes habent. Angulorum igitur naſcentium PTM, LPM ea prima erit inter ipſos ratio, quæ Lunæ à recto tramite deflexionum prima, quas vis terreſtris & vis Solaris 3IT eodem tempore ſingulatim generaverint; id eſt, eadem quæ mutationum, quas vires illæ in vi inſitâ Lunari ſimul primas effecerint. Hæc autem haud alia erit præter virium rationem. Erit igitur motus horarius nodorum, in eo qui poſitus eſt ſitu Nodorum & Lunæ, ad motum horarium Lunæ medium à ſtellis fixis ſicut 1 ad 59,575.

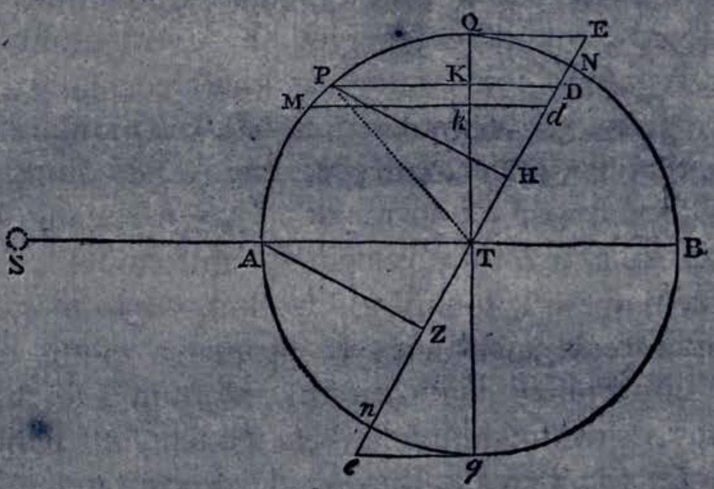
Qui angulum deflexionis Lunæ à recto tramite aliter intelligunt quàm nos interpretati ſumus, decipiuntur.

negativum,

De Mundi Systemate

negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut nodi regrediantur, quoties Luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſûs ſupra progreſſum ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi à dati arcûs quàm minimi PM terminis, P & M, ad lineam quadraturas jungentem, Q*q*, demittantur perpendicula PK, M*k*, eademque producantur donec ſecent lineam nodorum N*n* in D & *d*; erit motus horarius nodorum ut area MPD*d* &



quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres ſinus. Nempe PK, ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ; PH, ſinus diſtantiæ Lunæ à nodo; & AZ, ſinus diſtantiæ nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum PK × PH × AZ. Eſt autem PT ad PK ut PM ad K*k*, ideoque, ob datas PT & PM, eſt K*k* ipſi PK proportionalis. Eſt & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo PD × AZ proportionalis; & conjunctis rationibus, PK × PH eſt ut contentum K*k* × PD × AZ, & PK × PH × AZ ut K*k* × PD × AZ *qu.* id eſt, ut area PD*d*M & AZ *qu.* conjunctim. Q. E. D.

Corol. 2. In datâ quâvis Nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motûs horarii in ſyzygiis Lunæ, ideoque eſt ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}.$ ut quadratum ſinûs diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii, ſive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam ſi Luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum QA*q*, ſumma

ma omnium arearum PD*d*M, quo tempore Luna pergit à Q ad M, erit area QM*d*E, quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum *n*, ſumma illa erit area tota EQA*n*, quam linea PD deſcribit; dein Lunâ pergente ab *n* ad *q*, linea PD cadet extra circulum, & aream *nqe*, ad circuli tangentem *qe* terminatam, deſcribet; quæ, quoniam nodi priùs regrediebantur, jam verò progrediuntur, ſubduci debet de areâ priore, & cùm æqualis ſit areæ QEN, relinquet ſemicirculum NQA*n*. Igitur ſumma omnium arearum PD*d*M, quo tempore Luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt area circuli totius. At area PD*d*M, ubi luna verſatur in ſyzygiis, eſt rectangulum ſub arcu PM & radio PT; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cùm ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quàm rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate, uniformiter continuatâ, quam habent in ſyzygiis lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent, quàm reverâ deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium à ſe inæquabili cum motu reverâ confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motûs quem habent in ſyzygiis Lunæ. Unde cùm motus horarius maximus, ſi nodi in quadraturis verſantur, ſit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc caſu erit $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. Et cùm motus horarius nodorum ſemper ſit ut AZ *qu.* & area PD*d*M conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in ſyzygiis lunæ ut AZ *qu.* & area PD*d*M conjunctim, id eſt (ob datam aream PD*d*M in ſyzygiis deſcriptam) ut AZ *qu.* erit etiam motus mediocris ut AZ *qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas verſantur, erit ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Q. E. D.

LIBER TERTIUS.

PROP. XXXI. PROB. XII.

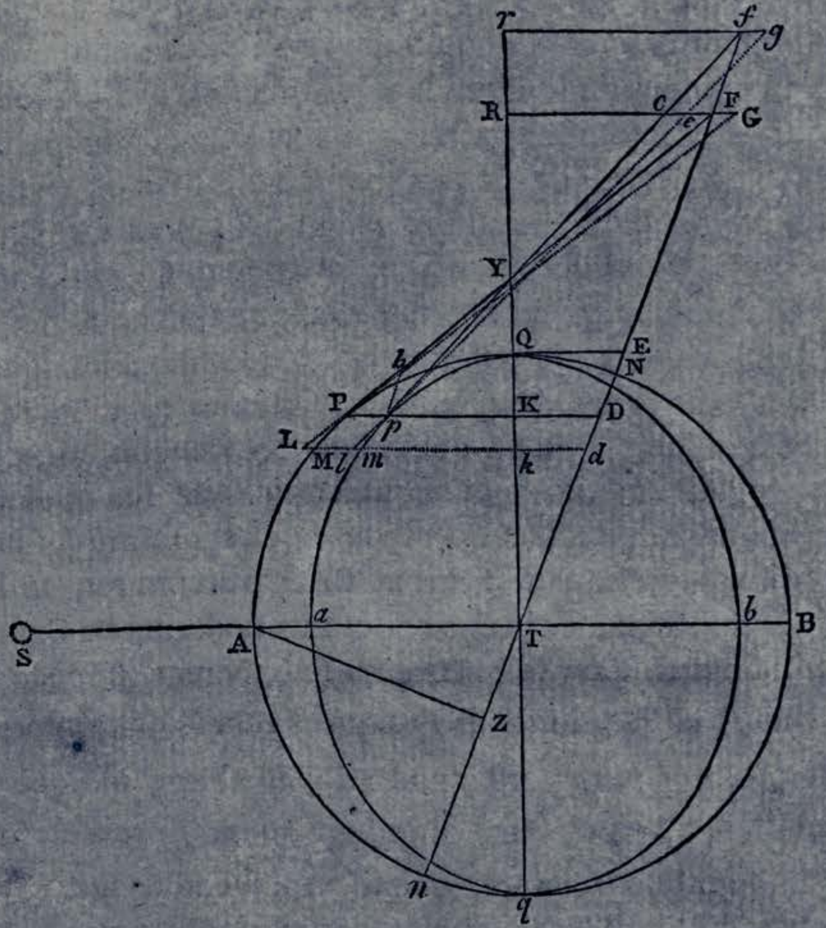
Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in orbe Elliptico.

Deſignet Q*pmaq* Ellipſin, axe majore Q*q*, minore *ab* deſcriptam; QA*q*B, circulum circumſcriptum; T, terram in utriuſque cen-

tro

DE MUNDI SYSTEMATE

tro communi; S, Solem; *p*, Lunam in ellipſi motam; & *pm*, arcum quem datâ temporis particulâ quàm minimâ deſcribit; N & *n*, nodos lineâ N*n* junctos; *p*K & *mk*, perpendicula in axem Q*q* de-



miſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ nodorum in D & *d*. Et ſi Luna, radio ad terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus horarius Nodi in Ellipſi ut area *p*D*dm* & AZ*q* conjunctim.

Nam ſi PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F; & *pf* tangat ellipſin in *p*, & producta occurrat eidem TN in *f*; conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Y; & ſi ML deſignet ſpatium, quod Luna, in Circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædictâ 3IT, ſeu 3PK, motu tranſverſo deſcribere poſſet; & *ml* deſignet ſpatium quod Luna, in Ellipſi revolvens, eodem tempore, urgente etiam vi 3IT, ſeu 3PK, deſcribere poſſet; & producantur LP & *lp*, donec occurrant

plano

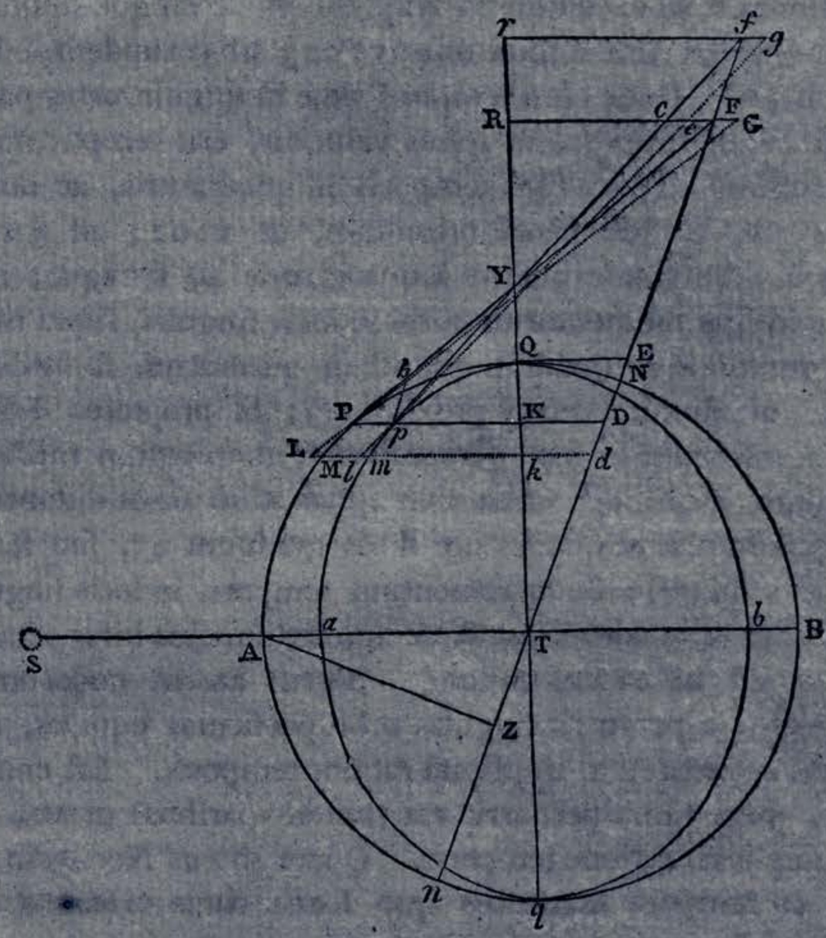
plano Eclipticæ in G & *g*; & jungantur FG & *fg*, quarum FG producta ſecet *pf*, *pg* & TQ in *c*, *e* & R reſpectivè, & *fg* producta ſecet TQ in *r*: quoniam vis 3IT, ſeu 3PK, in circulo eſt ad vim 3IT ſeu 3*p*K in ellipſi, ut PK ad *p*K, ſeu AT ad *a*T; erit ſpatium ML, vi priore genitum, ad ſpatium *ml*, vi poſteriore genitum, ut PK ad *p*K; id eſt, ob ſimiles figuras PYK*p* & FYR*c*, ut FR ad *c*R. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc eſt (ob parallelas L*k*, PK, GR) ut *pl* ad *pe*, id eſt (ob ſimilia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inverſè (Y) ut LM eſt ad *lm*, ſeu FR ad *c*R, ita eſt FG ad *ce*. Et propterea, ſi *fg* eſſet ad *ce* ut *f*Y ad *c*Y, id eſt, ut *fr* ad *c*R (hoc eſt, ut *fr* ad FR & FR ad *c*R conjunctim, id eſt, ut *f*T ad FT & FG ad *ce* conjunctim) quoniam ratio FG ad *ce* utrinque ablata relinquit rationes *fg* ad FG & *f*T ad FT, foret *fg* ad FG ut *f*T ad FT; atque ideo anguli, quos FG & *fg* ſubtenderent ad terram T, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM, in Ellipſi arcum *pm*, percurrit: & propterea motus nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modò *fg* eſſet ad *ce* ut *f*Y ad *c*Y; id eſt, ſi *fg* æqualis eſſet $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob ſimilia triangula *fgp*, *cep*, eſt *fg* ad *ce* ut *fp* ad *cp*; ideoque *fg* æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem *fg* reverà ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem FG ſubtendit, hoc eſt, motus nodorum in Ellipſi ad motum nodorum in Circulo, ut hæc *fg*, ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$, ad priorem *fg*, ſeu $\frac{ce \times fY}{cY}$; id eſt, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, ſeu *fp* ad *f*Y & *c*Y ad *cp*; hoc eſt, ſi *ph*, ipſi TN parallela, occurrat FP in *h*, ut F*h* ad FY & FY ad FP; hoc eſt, ut F*h* ad FP, ſeu D*p* ad DP; ideoque ut area D*pmd* ad aream DPM*d*. Et propterea, cùm (per Corol. I. Prop. XXX.) area poſterior & AZ*q* conjunctim proportionalia ſint motui horario nodorum in Circulo, erunt area prior & AZ*q* conjunctim proportionalia motui horario nodorum in Ellipſi. Q. E. D.

Corol. Quare cùm, in datâ Nodorum poſitione, ſumma omnium arearum *p*D*dm*, quo tempore Luna pergit à quadratura ad locum quemvis *m*, ſit area *mp*QE*d*, quæ ad ellipſeos tangentem QE ter-

(Y) — *inverſè*] permutando.

minatur;

minatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, ſit area Ellipſeos totius: motus mediocris nodorum in Ellipſi erit ad motum mediocrem nodorum in Circulo, ut Ellipſis ad Circulum; id eſt, ut T*a* ad TA, ſeu 69 ad 70. Et propterea,



cùm (per Corol. 2. Prop. XXX.) motus mediocris horarius nodorum in circulo ſit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* ſi capiatur angulus $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ad angulum $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in Ellipſi ad $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ut AZ*q* ad AT*q*; hoc eſt, ut quadratum ſinûs diſtantiæ nodi à Sole ad quadratum radii.

Cæterùm Luna, radio ad terram ducto, aream velociùs deſcribit in ſyzygiis quàm in quadraturis; & eo nomine tempus in ſy-

(z) Prop. XXVI. hujus Libri.

(zz) Vel quod eodem redit, ut illud quo ſinus verſus duplæ diſtantiæ à quadraturis abeſt à radio.

zygiis

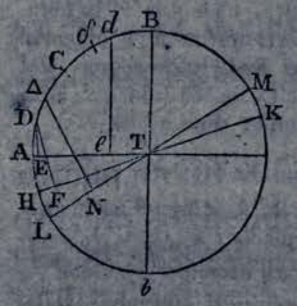
zygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis Lunæ ad ejus momentum in ſyzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in octantibus eſt ad exceſſum in ſyzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cùm tempus Lunæ in ſingulis orbis particulis æqualibus ſit reciprocè ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad exceſſum temporis in quadraturis, ac defectum in ſyzygiis, ab hâc cauſâ oriundum, ut 11023 ad 50 quàm proximè. Pergendo autem à quadraturis ad ſyzygias, invenio quòd exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in quadraturis, ſit ut quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à quadraturis quàm proximè (z); & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à quadraturis & quadratum ſinûs graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii (aa); & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore Luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratiône temporis. Eſt enim motus iſte, dum Luna percurrit PM (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicatâ ratione temporis. Quare motus Nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quàm proximè. Decrementum autem in locis inter octantes & ſyzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, eſt quàm proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in ſyzygiis, & differentia inter quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſem quadrati radii ad ſemiſſem quadrati radii conjunctim (bb). Unde ſi nodi in quadraturis verſentur,

LIBER TERTIUS.

(bb) PLANUM orbitæ Lunaris, Fixarum uſque ſphæram productum, ſuperficiem ejus ſecando circulum ABb efficiat, cujus punctum A locus ſit quo cernitur Luna nova, vel plena; punctum B ille

De Mundi Systemate

ſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde diſtantia, & alia duo à ſyzygiâ & quadraturâ iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter ſyzygiam & octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygiâ: uti rationem



ille quo dimidiata; arcumque AB punctum C medium dividat. Sit D locus aliquis Lunæ inter punctum C & punctum coitûs A. A puncto D in rectam TA deducatur ad perpendiculum recta DE, ut ſit TE æqualis ſinui arcûs BD, quo Luna à loco B abeſt. Si Luna, in orbe ſuo, ex circulari in Ellipſin per vim Solis transformato, areas circum Terram, in centro poſitam, æquabili motu ſcriberet; motus horarius Nodi orbitæ Lunaris, ſive velocitas ejus ſub Eclipticâ, in dato quovis ſitu Solis, Lunæ, et Nodi, talis eſſet, qualem Newtonus in hâc Propoſitione conſtituit. Lunâ igitur locum D obtinente, literâ N ſignificetur angulus, quem Nodus orbitæ Lunaris è terrâ viſus, in dato quovis ejus tam ad Solem quàm ad Lunam ipſam ſitu, cum velocitate illâ, quam pro hâc Propoſitione haberet, dato quovis tempore ſub Eclipticâ conficeret. Sit $N-y$ angulus ille minor, quem eodem tempore cum minore illâ velocitate conficeret, quam, in eodem ipſius ad Lunam et ad Solem poſitu, Lunâ locum D obtinente, reverâ habet, propter arearum utique circum centrum confectionem in orbe Lunari Elliptico reverâ inæquabilem. Literâ A ſignificetur angulus, quem nodus, Lunâ in locum A tranſlatâ, eodem tempore conficeret, cum velocitate illâ quam pro hâc Propoſitione haberet; literâ etiam a ſignificetur illud, quo angulus A ab angulo illo minore abeſt, quem eodem tempore, Nodus, ſimiliter ad Lunam et ad Solem poſitus, verâ ſuâ velocitate ſcriberet. Dicit Newtonus y ad a rationem habere, quæ componitur è rationibus anguli N ad angulum A, ſpatiique $TE^2-\frac{1}{2}TA^2$ ad $\frac{1}{2}TA^2$. Id nos oſtendimus hoc modo.

Literâ L ſignificetur angulus, quem Luna, cum velocitate illâ mediâ quam in loco C habeat, circum centrum T eo tempore conficeret, quo Nodus orbitæ Lunaris angulum $N-y$. Sit $L+x$ angulus, quem eodem tempore Luna conficeret, cum majore illâ velocitate quam in D habet; et $L+l$ angulus, quem eodem etiam tempore conficeret, cum velocitate quæ ei in coitu maxima eſt. Tempus igitur, quo Luna, cum velocitate illâ quam in D habet, angulum L conficeret, ad tempus quo eundem angulum conficeret cum velocitate ſuâ mediâ, rationem habebit quam L ad $L+x$. Jam verò anguli $N-y$, N, erunt inter ſe ſicut velocitates quibuſcum dato tempore conficiantur; et velocitates illæ temporum, quibus generatæ fuerint, rationem duplicatam gerent; id eſt duplicatam temporum, quibus Luna, cum velocitatibus quas in locis D, C diverſas habet, angulum L conficeret. Erit igitur $N-y$ ad N ut L^2 ad $\overline{L+x}|^2$; ſive cùm angulus x perexiguus ſit ratione illius L, ut L ad $L+2x$. Invertendo & convertendo, $N:y=L+2x:2x$. Vel cùm x perexiguus ſit ratione anguli L, $N:y=L:2x$. Invertendo $y:N=2x:L$. Quod cùm generaliter verum ſit, ubivis loci ſumatur punctum D, modò inter A, C; idcirco erit et $A:a=L:2l$. Cùm igitur ſit $y:N=2x:L$, et $A:a=L:2l$, idcirco, rationes ſimiles componendo, erit $y\times A:N\times a=x:l$. Sed $N\times a:A\times a=N:A$. Quare ſimiles rationes iterum componendo, $y:a=x\times N:l\times A$. Sed x ad l rationem habet, quam $TE^2-\frac{1}{2}TA^2$ ad $\frac{1}{2}TA^2$. Quare $y:a=N\times\overline{TE^2-\frac{1}{2}TA^2}:A\times\frac{1}{2}TA^2$.

Quòd ſi locus d ſumatur inter B et C, & ſymbolis $N+y$, $L-x$, ſignificentur anguli, quos Nodus orbitæ Lunaris, & Luna ipſa dato quodam tempore, cum veris ſuis velocitatibus conficerent; literis autem N, L anguli, quos eodem tempore conficerent, ſi Luna mediâ ſuâ velocitate, Nodus cum eâ ferretur, quam, manente ipſius tam ad Solem quàm ad Lunam ſitu, Lunâque etiam punctum d obtinente, ipſe haberet, ſi Luna areas circum centrum in orbe Elliptico æquabiliter ſcriberet; tum ſi à puncto d in rectam TA deducatur ad perpendiculum de; ſimilibus planè argumentis efficiendum erit, $y:a=N\times\overline{Te^2-\frac{1}{2}TA^2}:A\times\frac{1}{2}TA^2$.

Universè igitur decrementum motûs horarii Nodi in locis inter C et A, & incrementum in locis inter C et B (decrementum loquimur et incrementum ab inæquabili arearum generatione in orbe

nem ineunti facilè conſtabit (cc). Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygiâ. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi Luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073;

Lunari Elliptico) erit quàm proximè ad decrementum in ipſo Lunæ coitu, ut motus totus horarius in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & differentia inter quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à dimidiatæ loco et ſemiſſem quadrati radii, ad ſemiſſem quadrati Radii conjunctim. Vel quod perinde eſt, ut motus totus in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & illud, quo ſinus verſus duplæ diſtantiæ Lunæ à dimidiatæ loco abeſt à radio, ad radium ipſum conjunctim.

(cc) Capiantur puncta Δ, δ, à puncto C hinc inde æqualiter remota. Et capiantur AD, Bδ arcuum CΔ, Cδ æquales: qui proinde et inter ſe æquales. Notis $\dot{A}$, $\dot{D}$, $\dot{\Delta}$, $\dot{\delta}$, $\dot{d}$ ſignificentur motus horarii Nodorum Lunæ, puncta B, *b* obtinentium, quando Luna ipſa loca A, D, Δ, δ, *d* obtineat. Notis autem $\ddot{A}$, $\ddot{D}$, $\ddot{\Delta}$, $\ddot{\delta}$, $\ddot{d}$ ſignificentur motûs nodorum horarii decrementa in locis A, D, Δ, incrementa in locis δ, *d*, à perturbato Lunæ motu circum centrum orbis Elliptici oriunda. Capiatur arcus AH illius AD æqualis. Junctaque TH circulo iterum in K occurrat; et in eam ad perpendiculum deducatur DF. Arcus BK æqualis erit arcui BD. Erit igitur KBD dupla diſtantia puncti D à loco lunæ dimidiatæ B, & KF duplæ illius diſtantiæ ſinus verſus. Quapropter $\ddot{D}$ ad $\ddot{A}$ rationem habebit compoſitam è rationibus quam $\dot{D}$ ad $\dot{A}$, quamque TF ad TA. (Not. bb.) Nodo autem in B poſito, $\dot{D}$ erit ad $\dot{A}$ ut rectangulum ſub ſinubus diſtantiarum loci Lunæ D à B et à Nodo, id eſt ut quadratum è ſinu arcûs BD, ad quadratum è radio: ſive ut ſinus verſus dupli BD ad diametrum: id eſt ut KF ad 2TA. Habet igitur $\ddot{D}$ ad $\ddot{A}$ rationem quæ componitur è rationibus rectæ TF ad TA rectæque KF ad 2TA; ſive eam quam KF × TF ad duplum quadrati ex TA.

Rurſum propter arcum AH ipſi AD æqualem, erunt AH, B*d* inter ſe æquales. Quapropter arcus DH duplus erit B*d*, rectaque HF dupli B*d* ſinus verſus erit. Unde eiſdem planè argumentis quibus ſuperiora effecimus, oſtendere licet $\ddot{d}$ ad $\ddot{A}$ rationem habere quam HF × TF ad duplum quadrati ex TA.

Cùm igitur ſit $\ddot{D} : \ddot{A} = KF \times TF : 2.TA^2$.

Et $\ddot{d} : \ddot{A} = HF \times TF : 2TA^2$.

Erit $\ddot{D} - \ddot{d} : \ddot{A} = \overline{KF - HF} \times TF : 2.TA^2$. (El. V. 24.) Sed $KF - HF = 2TF$. Quare $\ddot{D} - \ddot{d} : \ddot{A} = 2.TF^2 : 2.TA^2 = TF^2 : TA^2$.

Simili modo, accepto arcu AL ipſius AΔ æquali, & in junctam TL (quæ circulo iterum in M occurrat) deductâ ad perpendiculum rectâ ΔN, oſtendemus $\ddot{\Delta} - \ddot{\delta}$ ad $\ddot{A}$ rationem habere quam TN^2 ad TA^2.

Cùm igitur ſit $\ddot{D} - \ddot{d} : \ddot{A} = TF^2 : TA^2$.

Et $\ddot{\Delta} - \ddot{\delta} : \ddot{A} = TN^2 : TA^2$.

Erit $\ddot{D} + \ddot{\Delta} - \ddot{d} - \ddot{\delta} : \ddot{A} = TF^2 + TN^2 : TA^2$.

Jam verò TF^2, TN^2 quadrato è radio TA ſimul ſumpta ſunt æqualia. Arcus enim AD, cùm ſit æqualis illi CΔ, arcus AΔ ille erit quo AD abeſt à CA. Unde duplus AΔ ille erit quo duplus AD abeſt à duplo CA, id eſt, à quadrante. Quare arcus ΔL, qui eſt duplus ΔA, ille erit quo DH, qui eſt duplus AD, abeſt à quadrante. Quare recta TN, quæ coſinus eſt arcûs ΔL, ſinui arcûs DH, ſive rectæ DF, æqualis erit. Quare $TN^2 + TF^2 = DF^2 + TF^2 = TD^2$, vel TA^2.

Erunt igitur TF^2, TN^2 ſimul ſumpta quadrato ex TA æqualia. Et illud $\ddot{D} + \ddot{\Delta} - \ddot{d} - \ddot{\delta}$, cùm habeat ad $\ddot{A}$ rationem eam quam $TN^2 + TF^2$ ad quadratum ex TA, ipſi utique $\ddot{A}$ æquale erit. Q. E. D.

De Mundi Systemate

ideoque decrementum illud eſt 17‴. 14^{iv}. 11^{v}, cujus pars quarta 4‴. 25^{iv}. 48^{v}. motu horario mediocri ſuperiùs invento 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ſubducta, relinquit 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. motum mediocrem horarium correctum.

Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Et decrementa motuum, à cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus; ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut AZ *qu.* ad AT *qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. ut AZ *qu.* ad AT *qu.*; id eſt, ut quadratum ſinûs diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii.

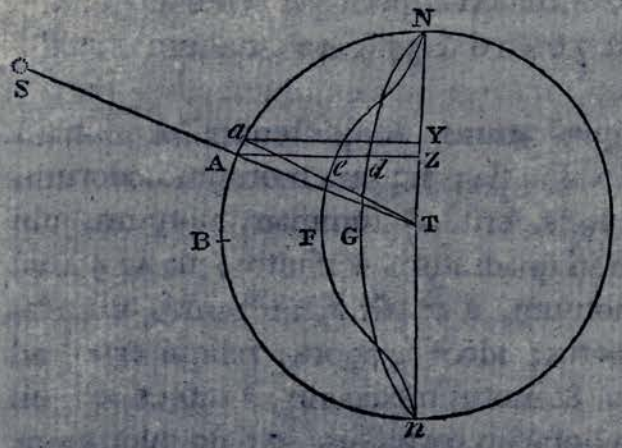
PROP. XXXII. PROB. XIII.

Invenire motum medium Nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in N, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò Solem S, per motum Terræ, progredi à nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem A*a* arcus datus quàm minimus, quem recta TS, ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli NA*n*, dato tempore quàm minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZ*q*, id eſt (ob proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt, ut area AZY*a*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *a*YZA, id eſt, ut area NAZ. Eſt autem maxima AZY*a* æqualis rectangulo ſub arcu A*a* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo

(dd) Ea ſit Curvæ N*dn* natura, ut fluxio areæ NZ*d* ad fluxionem ſectoris circularis NTA rationem

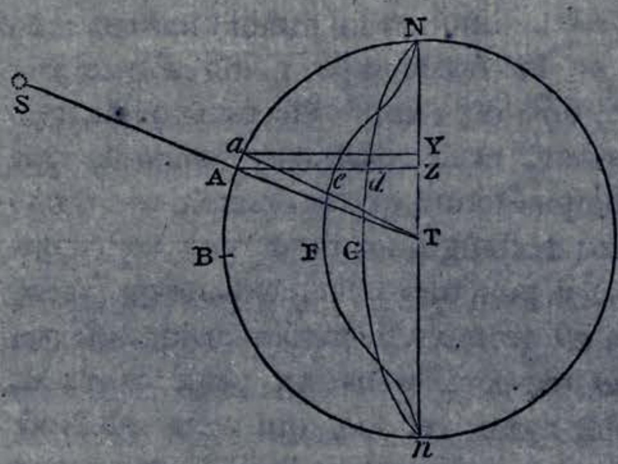
mo reſpondens, erat 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴. Ideoque hujus dimidium 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab N ad A, eſt ad 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴. ut area NAZ ad circulum totum.



Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut Sol anno toto completo ad nodum eundem redeat, à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit, ut Sol citiùs ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cùm Sol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis N ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut AZq ad ATq: erit motus ſolis ad motum nodi in N, ut 360 ATq ad 39,6355 AZq; id eſt, ut 9,0827667 ATq ad AZq. Unde ſi circuli totius circumferentia, NAn, dividatur in particulas æquales, Aa, tempus quo ſol percurrat particulam Aa, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus unà cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827667ATq ad 9,0827667ATq+AZq. Nam tempus eſt reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur; & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum Solis & nodi. Igitur ſi tempus, quo Sol ſine motu nodi percurreret arcum NA, exponatur per ſectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum Aa, exponatur per ſectoris particulam ATa; & (perpendiculo aY in Nn demiſſo) ſi in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis ut ſit rectangulum dZ in ZY ad ſectoris particulam ATa ut AZq ad 9,0827646ATq+AZq; id eſt, ut ſit dZ ad $\frac{1}{2}$AZ ut ATq ad 9,0827646ATq+AZq (dd): rectangulum

nem habeat quam quadratum ex AZ ad $a.AT^2+AZ^2$, deſignante a datam quamlibet quantitatem Arithmeticam.

De Mundi Systemate



rectangulum dz in ZY deſignabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et ſi punctum d tangit Curvam NdGn, area curvilinea Ndz erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea exceſſus ſectoris NAT ſupra aream Ndz erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore minore minor eſt in ratione temporis,

Arithmeticam. Dico dz eſſe ad $\frac{1}{2}AZ$ ut AT^2 ad $a.AT^2+AZ^2$. Fluxio arcûs circularis NA dicatur $\dot{z}$; fluxio rectæ NZ, $\dot{x}$; ut fluxio ſectoris circularis ATa ſit $\frac{1}{2}AT.\dot{z}$, fluxio areæ NZd, $zd\times\dot{x}$.

Erit $dz\times\dot{z} : dz\times\dot{x} = \dot{z} : \dot{x} = TA : AZ = TA\times AZ : AZ^2$.
Sed $dz\times\dot{x} : \frac{1}{2}AT\times\dot{z} = AZ^2 : a.AT^2+AZ^2$. (Id enim poſitum eſt.)
Ex æquo $dz : \frac{1}{2}AT = TA\times AZ : a.AT^2+AZ^2$.
Quare $dz\times AT : \frac{1}{2}AT^2 = TA\times AZ : a.AT^2+AZ^2$.
Permutando $dz : AZ = \frac{1}{2}AT^2 : a.AT^2+AZ^2$.
Quare $dz : \frac{1}{2}AZ = AT^2 : a.AT^2+AZ^2$. Q. E. D.

(ee) Area Nen haud aliâ ratione promptiùs credo definietur, quàm ſi exquiramus quanta ſit NFnBN, quâ prior illa à ſemicirculo abeſt. A T ad perpendiculum educatur TB, quæ circulo in B, Curvæ NFn in F occurrat. Jam cùm ſit $Ze : AZ = AZ^2 : a.AT^2+AZ^2$, invertendo & convertendo $AZ : eA = a.AT^2+AZ^2 : a.AT^2$. Ponatur $AT=1$, $TZ=x$. Ita erit $AZ=\sqrt{1-x^2}$, et $\sqrt{1-x^2} : eA = a+1-x^2 : a$. Unde $eA = \frac{a\sqrt{1-x^2}}{a+1-x^2}$. Et $eA\times\dot{x}$, ſive fluxio areæ BFeA, $=\sqrt{1-x^2}\times\frac{a}{a+1-x^2}\dot{x}$; vel ſi pro $a+1$ ſcribatur c, erit $eA\times\dot{x}=\dot{x}\sqrt{1-x^2}\times\frac{a}{c-x^2}$: vel ſi quantitas $\frac{a}{c-x^2}$ in ſeriem infinitam diviſionis operâ reſolvatur, $eA\times\dot{x}=\dot{x}\sqrt{1-x^2}\times\frac{a}{c}+\frac{a}{c^2}x^2+\frac{a}{c^3}x^4+\frac{a}{c^4}x^6+\frac{a}{c^5}x^7$. Hinc $\left|\overline{eA\times\dot{x}}\right|$, ſive area BF$e$A, ex areis Curvarum innumerabilium eſt conflata, quarum omnium cùm communis ſit abſciſſa x, ordinatæ ſunt hæ: Primæ, $\frac{a}{c}\sqrt{1-x^2}$; Secundæ, $\frac{a}{c^2}x^2\sqrt{1-x^2}$; Tertiæ, $\frac{a}{c^3}x^4\sqrt{1-x^2}$; Quartæ, $\frac{a}{c^4}x^6\sqrt{1-x^2}$; eodemque deinceps uſque modo.

Area Curvæ quæ abſciſſam habet x, ordinatam $\sqrt{1-x^2}$, quæ eſt area ipſa circularis BTZA, ſignificetur literâ A; area Curvæ, cujus abſciſſa x ordinata $x^2\sqrt{1-x^2}$, ſignificetur literâ B. Literis etiam, C, D, E ſignificentur ſingulatim Curvarum areæ, quarum omnium abſciſſa communis x, ordinatæ ſingularum $x^4\sqrt{1-x^2}$, $x^6\sqrt{1-x^2}$, $x^8\sqrt{1-x^2}$. Areæ igitur BFeA hujus ſeriei ſumma ultimò æqualis erit, $\frac{a}{c}A+\frac{a}{c^2}B+\frac{a}{c^3}C+\frac{a}{c^4}D+\frac{a}{c^5}E$, &c. Ad aream igitur BF$e$A definiendam illud

opus

poris, debebit etiam area A*a*YZ diminui in eâdem ratione. Id quod fiet, ſi capiatur in AZ longitudo *ez*, quæ ſit ad longitudinem AZ ut AZ*q* ad 9,0827646 AT*q* + AZ*q*. Sic enim rectangulum *ez* in ZY erit ad aream AZY*a* ut decrementum temporis, quo arcus A*a* percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, ſi nodus quieſceret: & propterea rectangulum illud reſpondebit decremento motûs nodi. Et ſi punctum *e* tangat Curvam N*e*F*n*, area tota N*ez*, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NA*e* reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt Nodi motus, quo tempore arcus totus NA, per Solis & nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò area ſemicirculi eſt ad aream figuræ N*e*F*n*, per methodum ſerierum infinitarum quæſitam, ut 793 ad 60 quamproximè (ee). Motus autem qui reſpondet circulo

opus erit, areas literis A, B, C, D, E, &c. ſignificatas definire. Harum autem illâ A, per circuli quadraturam, datâ, reliquæ etiam per Prop. VII. Libri De Quadraturâ Curvarum dabuntur. Nempe hoc modo; $B = \frac{x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}} - A}{-4} = \frac{A - x \times \overline{1-x}^{\frac{3}{2}}}{4}$. (Id enim efficitur per Æquationem Canonicam Primi Caſûs ejus Propoſitionis primam, ſcribendo 1 pro θ, $\frac{3}{2}$ pro λ, 2 pro n, 1 pro e, -1 pro f.) Et per eandem æquationem, ſcribendo 3 pro θ, B pro A, & C pro B, invenietur $C = \frac{3B - x^3 \times \overline{1-x}^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{3A}{4 \times 6} - \frac{3x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{4.6.} - \frac{x^3 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{6}$.

Rurſum $D = \frac{5C - x^5 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{8} = \frac{3.5.A}{4.6.8} - \frac{3.5.x \times \overline{1-x}^{\frac{3}{2}}}{4.6.8} - \frac{5.x^3 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{6\,8.} - \frac{x^5 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{8.}$.

Rurſum $E = \frac{7D - x^7 \times \overline{1-x}^{\frac{3}{2}}}{10} = \frac{3.5.7.A}{4.6.8.10} - \overline{\frac{3.5.7.x}{4.6.8.10} + \frac{5.7.x^3}{6.8.10} + \frac{7.x^5}{8.10} + \frac{x^7}{10}} \, \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}$.

Hinc area BF*e*A $= \frac{a}{c}A + \frac{a}{4c^2}A - \frac{a}{4c^2}x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}} + \frac{3a}{4.6c^3}A - \overline{\frac{3ax}{4.6c^3} + \frac{ax^3}{6c^3}} \, \overline{1-x}^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5.a.A}{4.6.8.c^4} - \overline{\frac{3.5.a.x}{4.6.8.c^4} + \frac{5ax^3}{6.8.c^4} + \frac{ax^5}{8c^4}} \, \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5.7.aA}{4.6.8.10.c^5} - \overline{\frac{3.5.7.ax}{4.6.8.10.c^5} + \frac{5.7.ax^3}{6.8.10.c^5} + \frac{7ax^5}{8.10.c^5} + \frac{ax^7}{10.c^5}} \, \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}$ &c.

$$= A \times \frac{a}{c} + \frac{a}{4c^2} + \frac{3a}{4.6.c^3} + \frac{3.5.a}{4.6.8.c^4} + \frac{3.5.7.a}{4.6.8.10.c^5} + \&c.$$

$$\begin{aligned} - \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}} \times \; & \frac{a}{4c^2}x + \frac{ax^3}{6.c^3} + \frac{ax^5}{8.c^4} + \frac{ax^7}{10.c^5} + \\ & + \frac{3ax}{4.6.c^3} + \frac{5ax^3}{6.8.c^4} + \frac{7.a.x^5}{8.10.c^5} + \\ & + \frac{3.5.ax}{4.6.8.c^4} + \frac{5.7.ax^3}{6.8.10.c^5} + \\ & + \frac{3.5.7.ax}{4.6.8.10.c^5} + \end{aligned}$$

Hinc

De Mundi Systemate

culo toti erat 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴. & propterea motus, qui figuræ NeFn duplicatæ reſpondet, eſt 1^{gr}. 29′. 58″. 2‴. Qui de motu priore ſubductus relinquit 18^{gr}. 19′. 5″. 53‴. motum totum nodi reſpectu Fixarum inter ſui ipſius conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit 341^{gr}. 40′. 54″. 7‴. motum Solis inter eaſdem conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus 18^{gr}. 19′. 5″. 53‴. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit 19^{gr}. 18′. 1″. 23‴. Hic eſt motus medius Nodorum in anno ſidereo. Idem per tabulas aſtronomicas eſt 19^{gr}. 21′. 21″. 50‴. Differentia minor eſt parte trecenteſimâ motûs totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

PROP. XXXIII. PROB. XIV.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod eſt ut area NTA−Ndz, *(in fig. præced.)* motus iſte eſt ut area NAe, & inde datur. Verùm ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem Problematis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus BEFD. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motûs veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis; id eſt, ut 19^{gr}. 18′. 1″. 23‴. ad 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴, atque adeo BC ad

AC

Hinc quando TZ in ipſam TN increverit, ut ſit $x = 1$, & $\overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}} = 0$, erit area BFNB $=$ A $\times$ $\frac{a}{c} + \frac{a}{4c^2} + \frac{3.a}{4.6.c^3} + \frac{3.5.a}{4.6.8.c^4}$ + &c. Et area quadrantis BTN ad hanc aream rationem habebit quam $\frac{1}{a}$ ad $\frac{1}{c} + \frac{1}{4c^2} + \frac{3}{4.6.c^3} + \frac{3.5}{4.6.8.c^4} + \frac{3.5.7}{4.6.8.10.c^5}$ &c.

Jam verò cùm ſit $a = 9{,}0827667$, erit $\frac{1}{a} = 0{,}110098$.

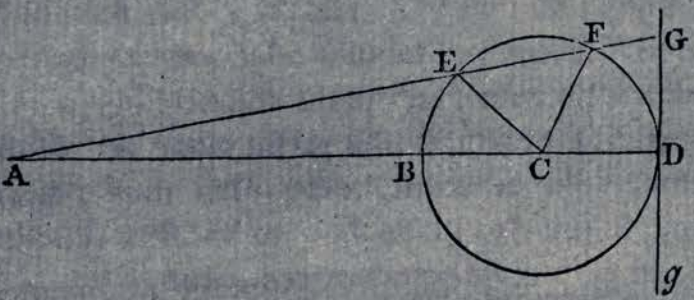
$$\frac{1}{c} = 0{,}099179170$$

$$\frac{1}{4c^2} \quad 0{,}002459126$$

$$\frac{3}{4.6.c^3} \quad 0{,}000121947$$

3.5

AC ut motuum differentia $0^{gr}. 31'. 2''. 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur angulus BCE, vel BCF, æqualis duplæ diſtantiæ Solis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF ſecans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus, qui ſit ad motum totum nodi inter ipſius ſyzygias (id eſt, ad $9^{gr}. 11'. 3''$.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro



quo angulus DAG uſurpari poteſt) ad motum medium nodorum addatur, ubi nodi tranſeunt à quadraturis ad ſyzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur, ubi tranſeunt à ſyzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quàm proximè cum motu vero, qui prodit exponendo tempus per aream NTA−Ndz, & motum nodi per aream NAe; ut rem perpendenti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus nodorum. Eſt & æquatio menſtrua, ſed quæ ad inventionem latitudinis Lunæ minimè neceſſaria eſt. Nam cùm variatio inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, al-

$\frac{3.5}{4.6.8.c^4} = 0,000007559$

$\frac{3.5.7}{4.6.8.10.c^5}$ 0,000000525

$\frac{3.5.7.9}{4\ 6.8.10.12.c^6}$ 0,000000039

$\frac{3.5.7.9.11}{4.6.8.10.12.14.c^7}$ 0,000000003

Summa 0,101768369

Hinc area quadrantis ad aream NFB, ac proinde area ſemicirculi ad aream NAnFN, rationem habet quam 110098 ad 101768. Convertendo area ſemicirculi ad aream NeFn rationem habet quam 110098 ad 8330; id eſt eam quam 793 ad 60 propemodum. Nam 8330 : 110098 = 60 : 793,02 +.

 teri

De Mundi Systemate

teri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua Nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinandâ latitudine Lunæ negligi poſſint.

Corol. Ex hâc & præcedente Propoſitione liquet quòd Nodi in ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''. 19'''. 26^{iv}$. Et quòd æquatio motus Nodorum in octantibus ſit $1^{gr}. 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœleſtibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum Nodorum *J. Machin Aſtron. Prof. Greſham.* & *Hen. Pemberton*, M. D. ſeorſum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta eſt (ff). Et utriuſque chartæ, quas vidi, duas Propoſitiones continebant, & inter ſe in utriſque congruebant. Chartam verò D. *Machin*, cùm prior in manus meas venerit, hîc adjungam.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

" *Motus Solis medius à Nodo, definitur per medium proportionale*
" *geometricum, inter motum ipſius Solis medium, & motum illum*
" *mediocrem quo Sol celerrimè recedit à Nodo in quadraturis.*

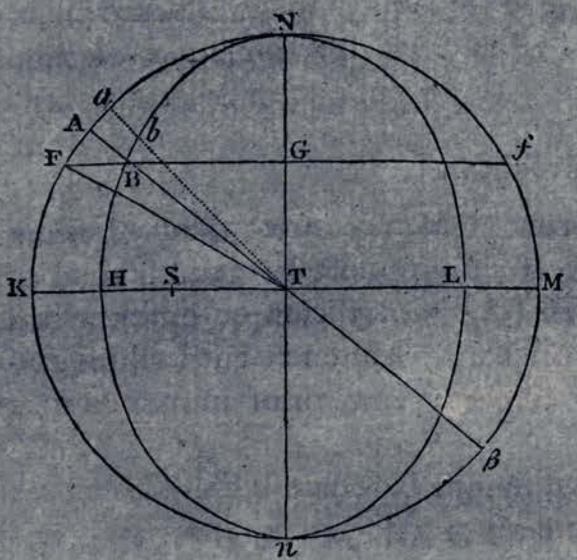
" Sit T locus ubi Terra; N*n*, linea Nodorum lunæ ad tempus " quodvis datum; KTM, huic ad rectos angulos ducta; TA, recta " circum centrum revolvens, eâ cum velocitate angulari, quâ ſol " & nodus à ſe invicem recedunt; ita ut angulus inter rectam " quieſcentem N*n* & revolventem TA, ſemper fiat æqualis diſtan" tiæ locorum ſolis & nodi. Jam ſi recta quævis TK dividatur in " partes TS & SK, quæ ſint ut motus ſolis horarius medius ad mo" tum horarium mediocrem nodi in quadraturis, & ponatur recta " TH media proportionalis inter partem TS & totam TK, hæc rec" ta inter reliquas proportionalis erit motui medio ſolis à nodo.

" Deſcribatur enim Circulus NK*n*M, centro T, & radio TK; eo-

(ff) In Epiſtolâ Pembertoni ad Amicum de Coteſii Inventis, p. 6 & 7.

" demque

"demque centro, & ſemiaxibus TH & TN, deſcribatur Ellipſis Liber Tertius.
"NH*n*L; & in tempore quo ſol à nodo recedit per arcum N*a*, ſi
"ducatur recta T*ba*, area ſectoris NT*a* exponet ſummam motuum
"nodi & ſolis in eodem tempore. Sit igitur arcus *a*A quàm mi-
"nimus, quem recta T*ba*, præfatâ lege revolvens, in datâ tem-
"poris particulâ uniformi-
"ter deſcribit, & ſector
"quàm minimus TA*a* erit
"ut ſumma velocitatum
"quâ ſol & nodus tum tem-
"poris ſeorſim feruntur.
"Solis autem velocitas ferè
"uniformis eſt, utpote cu-
"jus parva inæqualitas vix
"ullam inducit in medio
"nodorum motu varieta-
"tem. Altera pars hujus
"ſummæ, nempe velocitas
"nodi in mediocri ſuâ quan-

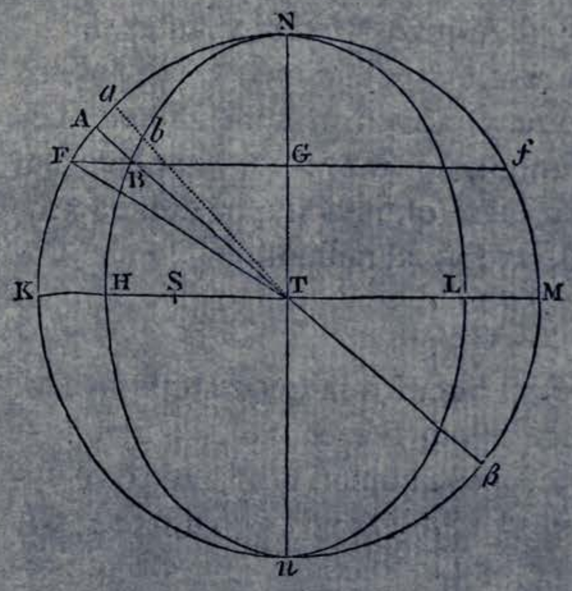


"titate, augetur in receſſu à ſyzygiis in duplicatâ ratione ſinûs
"diſtantiæ ejus à ſole; per Corol. Prop. XXXI. Lib. 3^tii^. Princip.
"& cùm maxima eſt in quadraturis ad ſolem in K, eandem ra-
"tionem obtinet ad ſolis velocitatem, ac ea quam habet SK ad TS
"hoc eſt ut (differentia quadratorum ex TK et TH vel) rectangu-
"lum KHM ad TH quadratum. Sed Ellipſis NBH dividit ſectorem
"AT*a*, ſummæ harum duarum velocitatum exponentem, in duas
"partes AB*ba* & BT*b* ipſis velocitatibus proportionales. Produ-
"catur enim BT ad circulum in *β*; & à puncto B demittatur ad
"axem majorem perpendicularis BG, quæ, utrinque producta, oc-
"currat circulo in punctis F & *f*; & quoniam ſpatium AB*ba* eſt ad
"ſectorem TB*a* ut rectangulum AB*β* ad BT quadratum (rectangu-
"lum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA & TB
"ob rectam A*β* æqualiter & inæqualiter ſectam in T & B); hæc
"igitur ratio, ubi ſpatium AB*ba* maximum eſt in K, eadem erit
"ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum. Sed maxima Nodi
"mediocris velocitas erat ad Solis velocitatem in hâc ratione. Igi-
"tur in quadraturis ſector AT*a* dividitur in partes velocitatibus

 "proportionales.

De Mundi Syſtemate

" proportionales. Et quoniam rectang. KHM eſt ad HT quadr. ut " FB*f* ad BG quad. & rectangulum ABβ æquatur rectangulo FB*f*:



" erit igitur areola AB*ba* " ubi maxima eſt ad reliquum ſectorem TB*b*, ut " rectang. ABβ ad BG quadr. " Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut ABβ " rectang. ad BT quadratum; " & propterea areola AB*ba* " in loco A minor eſt ſimili " areolâ in quadraturis, in " duplicatâ ratione BG ad " BT; hoc eſt in duplicatâ ratione ſinûs diſtantiæ ſolis " à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum AB*ba*, nempe ſpatium ABN, erit ut motus " Nodi, in tempore quo ſol digreditur à nodo per arcum NA. Et " ſpatium reliquum, nempe ſector ellipticus NTB, erit ut motus ſolis medius in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus " motus nodi medius, is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum " ſuam abſolverit, motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium, ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut " recta TK ad rectam TH, mediam ſcilicet proportionalem inter " TK ad TS; vel, quod eodem redit, ut media proportionalis TH ad " rectam TS.

" PROPOSITIO II.

" *Dato motu medio Nodorum lunæ invenire motum verum.*

" Sit angulus A diſtantia ſolis à loco nodi medio, ſive motus " medius ſolis à nodo. Tum ſi capiatur angulus B, cujus tangens " ſit ad tangentem anguli A ut TH ad TK, hoc eſt in ſubduplicatâ ratione motûs mediocris horarii ſolis ad motum mediocrem " horarium ſolis à nodo, in quadraturis verſante; erit idem angulus B diſtantia Solis à loco Nodi vero. Nam jungatur FT; & " ex demonſtratione Propoſitionis ſuperioris erit angulus FTN

" diſtantia

" diſtantia ſolis à loco nodi medio, angulus autem ATN diſtantia " à loco vero, & tangentes horum angulorum ſunt inter ſe ut TK " ad TH. LIBER TERTIUS.

" *Corol.* Hinc angulus FTA eſt Æquatio Nodorum lunæ, ſinuſ- " que hujus anguli, ubi maximus eſt in octantibus, eſt ad radium " ut KH ad TK+TH. Sinus autem hujus æquationis in loco quo- " vis alio A eſt ad ſinum maximum, ut ſinus ſummæ angulorum " FTN+ATN ad radium: hoc eſt ferè ut ſinus duplæ diſtantiæ ſo- " lis à loco nodi medio (nempe 2FTN) ad radium.

" *Scholium.*

" Si motus Nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit 16″. " 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. hoc eſt in anno toto ſidereo 39°. 38′. 7″. 50‴. " erit TH ad TK in ſubduplicatâ ratione numeri 9,0827646 ad nu- " merum 10,0827646; hoc eſt ut 18,6524761 ad 19,6524761. " Et propterea TH ad HK ut 18,6524761 ad 1. hoc eſt ut mo- " tus Solis in anno ſidereo ad motum Nodi medium 19°. 18′. 1″. " 23‴$\frac{2}{3}$.

" At ſi motus medius Nodorum Lunæ in 20 annis Julianis ſit " 386°. 50′. 15″. ſicut ex obſervationibus in Theoriâ Lunæ adhi- " bitis deducitur: motus medius Nodorum in anno ſidereo erit " 19°. 20′. 31″. 58‴. Et TH erit ad HK ut 360^{gr}. ad 19°. 20′. " 31″. 58‴. hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde motus mediocris " horarius Nodorum in quadraturis evadet 16″. 18‴. 48^{iv}. Et " Æquatio nodorum maxima in octantibus 1°. 29′. 57″."

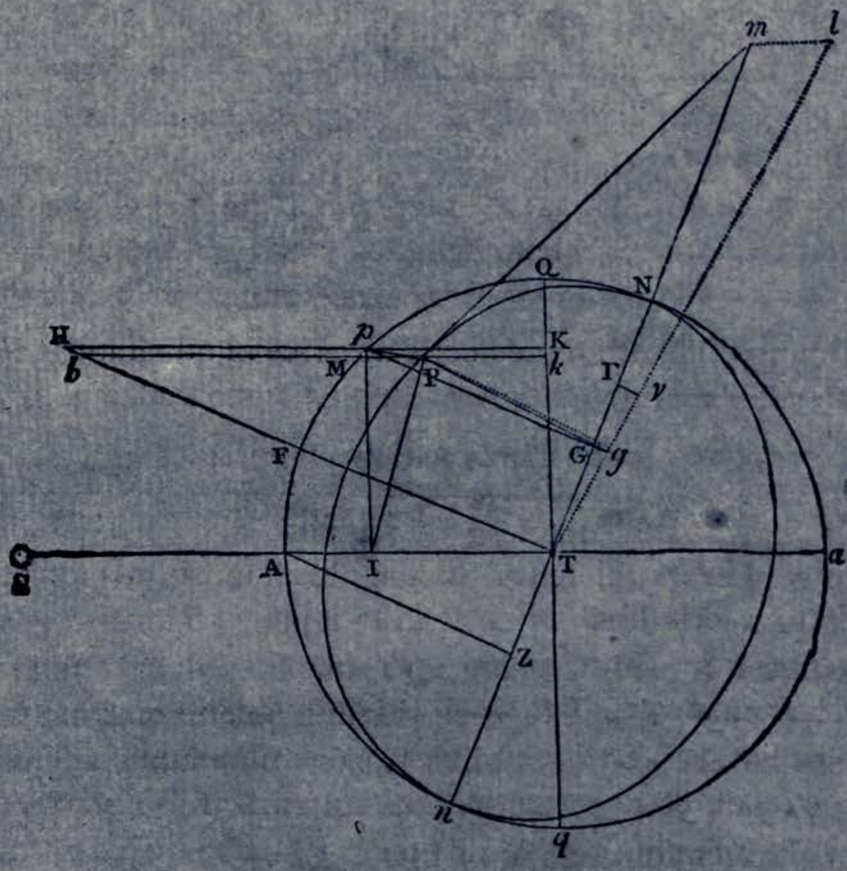
PROP. XXXVI. PROB. XV.

Invenire variationem horariam Inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticæ.

Deſignent A & *a* ſyzygias; Q & *q*, quadraturas; N & *n*, Nodos; P, locum Lunæ in orbe ſuo; *p*, veſtigium loci illius in plano Eclipticæ; & *m*T*l*, motum momentaneum nodorum ut ſuprà. Et ſi ad lineam T*m* demittatur perpendiculum PG, jungatur *p*G, & producatur ea donec occurrat T*l* in *g*, & jungatur etiam P*g*: erit angulus PG*p* Inclinatio orbis lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna verſatur in P; & angulus P*gp* Inclinatio ejuſdem poſt momentum

temporis

temporis completum ; ideoque angulus GP*g* variatio momentanea Inclinationis. Eſt autem hic angulus GP*g* ad angulum GT*g* ut TG ad PG & P*p* ad PG conjunctim (gg). Et propterea ſi pro momento



temporis ſubſtituatur hora ; cùm angulus GT*g* (per Prop. XXX.) ſit ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut IT×PG×AZ ad AT *cub.* erit angulus

(gg) Capiatur TΓ æqualis rectæ PG, & à Γ in rectam T*l* deducatur ad perpendiculum recta Γγ. Jam cùm anguli exigui GP*g*, GT*g* ſinuum ſuorum inter ſe rationem gerant, ſi à puncto G in rectam P*g* recta quædam ad perpendiculum deducatur, angulus GP*g* ad GT*g* rationem habebit quam deducta illa ad Γγ ; ſive eam quæ componitur è rationibus deductæ illius ad G*g*, ipſiuſque G*g* ad Γγ. Sed deducta illa ad G*g* rationem habet quam ſinus anguli P*gp*, vel PG*p*, ad radium : hoc eſt, cùm angulus GP*p* à recto haud multùm abſit, eam quam P*p* ad *p*G, vel PG. Recta verò G*g* ad Γγ rationem habet quam TG ad Tγ vel illi æqualem PG. Quare angulus GP*g* ad GT*g* rationem habet, quæ componitur è rationibus rectæ P*p* ad PG, rectæque TG ad PG ; ſive eam, quam rectangulum P*p* × TG ad quadratum ex PG.

(hh) Per puncta Q, *q*, ducantur rectæ QO, *q*W, quæ circulum AQ*aq*, in punctis Q, *q*, contingant. Recta TF utrinque producta circulo iterum in *f*, rectis QO, *q*W, in punctis O, W, occurrat. Recta $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ſignificetur literâ B. Lunâ per arcum F*q* incedente, inclinatio orbitæ perpetuò augetur ; et Solidum $\overline{FnqW \times B}$ referet incrementorum ſummam. Rurſum Lunâ per

I arcum

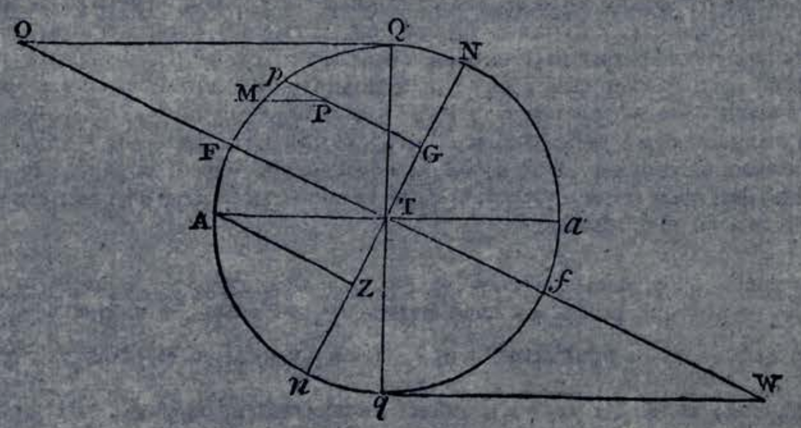
gulus GPg (ſeu Inclinationis horaria variatio) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{pP}{PG}$ ad AT *cub*. Q. E. I. LIBER TERTIUS.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quòd Luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quòd ſi orbis ille ellipticus ſit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſuprà expoſitum eſt. Et in eâdem ratione minuetur etiam Inclinationis variatio.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendiculum pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT; ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ H$pMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea Inclinationis variatio horaria ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut HpMh ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub*.

Corol. 2. Ideoque ſi Terra & Nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſinus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad 33″. 10‴. 33^{iv}, ut aggregatum omnium arearum HpMh, in revolutione puncti p genitarum, & ſub ſignis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub*. id eſt, ut circulus totus QAqa (hh) ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub*. hoc

arcum qf incedente, inclinatio orbitæ perpetuò minuetur; et Solidum $\overline{fqw \times B}$ referet decremen-



torum

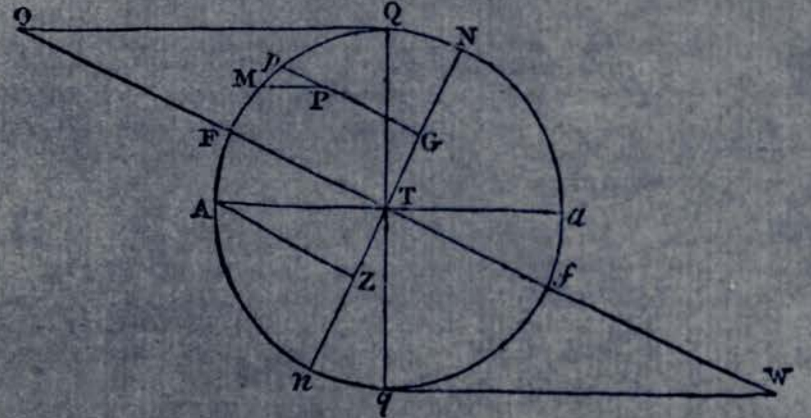
De Mundi Systemate

hoc eſt, ut circumferentia QAqa ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex quâ, per menſem uniformiter continuatâ, variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id eſt (cùm Pp ſit ad PG ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quaniam Inclinationis horaria variatio, ubi Nodi in quadraturis verſantur, eſt (per hanc Propoſitionem) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc ſitu Nodorum tranſit à quadraturâ ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$) erit ad ſummam totidem angulorum $33''. 10'''. 33^{iv}$, ſeu $5878''$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit 5^{gr}.

torum ſummam. Quare Solidum $\overline{Fnqw} - \overline{fqw} \times B$, id eſt ſemicylindrus qui baſin habet ſemicir-



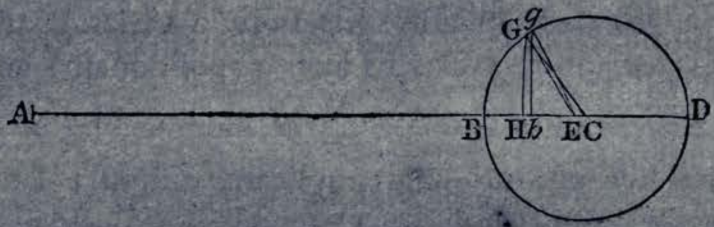
culum Fnf, altitudinem ipſam B, illud omne referet quo aucta fuerit inclinatio, toto illo tempore

$5^{gr}. 1'$, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex ſummâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, eſt 163″, ſeu 2′. 43″. LIBER TERTIUS.

PROP. XXXV. PROB. XVI.

Dato tempore invenire Inclinationem orbis lunaris ad planum Eclipticæ.

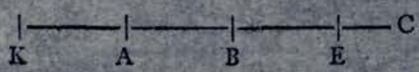
Sit AD ſinus Inclinationis maximæ, & AB ſinus Inclinationis minimæ. Biſecetur BD in C, & centro C, intervallo BC deſcribatur circulvs BGD. In AC capiatur CE, in eâ ratione ad EB quam



EB habet ad 2BA (ii): et ſi dato tempore conſtituatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cùm 2EC detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AE*g* duplicatam diſtantiam Nodorum à quadraturis, poſt datum aliquod momentum temporis completum; & arcus G*g*, ob datum angulum GE*g*, erit ut diſtantia GE. Eſt autem H*b* ad G*g* ut GH ad GC; & & propterea H*b* eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut

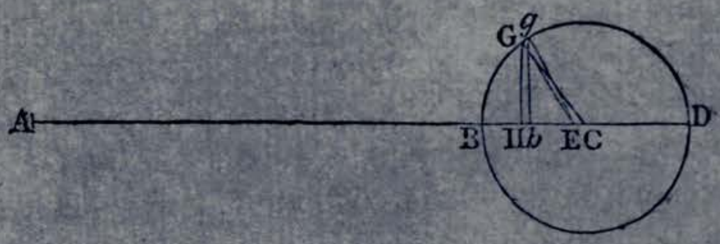
pore quo Luna à loco F in *f* tranſlata fuerit. Similiter oſtendatur ſemicylindrum, cujus baſis ſemicirculus *fa*E, altitudo recta B, illud omne referre, quo inclinatio aucta fuerit, toto illo tempore quo Luna à loco *f* in F per ſemicirculum *f*AE reverteretur. Cylindrus igitur, cujus baſis circulus totus FA*fa*, altitudo recta B, illud omne referet, quo aucta fuerit inclinatio orbitæ, toto illo temporis ſpatio quo Luna à loco maximæ ſuæ latitudinis abſcedens in eundem redierit; manente utique Nodorum ad Solem ſitu.



(ii) Id quod hâc ratione efficiatur. Producatur CA ad K, ut ſit AK æqualis ipſi AB. Ad rectam KB, applicetur rectangulum dato $CB \times BK$ æquale, eâ lege ut quadrato excedat. Exceſſûs latitudo ſit BE. Dico factum eſſe quod faciendum erat; id eſt, rectam CE ad EB rationem habere quam EB ad duplam AB. Nam propter rectangula $CB \times BK$, $KE \times EB$ inter ſe æqualia, erit CB ad BE ut KE ad KB. Dividendo CE ad EB ut EB ad BK, vel 2BA. Q. E. D.

De Mundi Systemate

$\frac{GH}{GE} \times GEq$, ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$; id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus Inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu Inclinationis, per Corol. 3. Pro-



poſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AA, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. Q. E. D.

In hâc demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris Inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cùm Inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr}. 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ BD reſpondens, ad variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg; id eſt, ut diameter BD ad ſemicircumferentiam BGD et tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, ſiet variatio tota BD ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa BD prodibit $16'. 32''\frac{1}{2}$ (kk).

Hæc eſt Inclinationis variatio maxima, quatenus locus Lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi Nodi in ſyzy-

(kk) Veriùs ut opinor $''16 - '''24$. Nobis enim calculi reddunt $'16 - ''23 - '''50 - ''''58$.

giis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu Lunæ. At ſi Nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi Luna verſatur in ſyzygiis, quàm ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu 2′. 43″; uti in Propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſûs dimidio, 1′. 21″½, variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit 15′. 2″, in ipſius autem ſyzygiis aucta fit 17′. 45″. Si Luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias erit 17′. 45″: ideoque ſi Inclinatio, ubi Nodi in ſyzygiis verſantur, ſit 5gr. 17′. 20″; eadem, ubi Nodi ſunt in quadraturis, & Luna in ſyzygiis, erit 4gr. 59′. 35″. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus. LIBER TERTIUS.

Si jam deſideretur orbis Inclinatio illa, ubi Luna in ſyzygiis & Nodi ubivis verſantur; fiat AB ad AD ut ſinus graduum 4. 59′. 35″, ad ſinum graduum 5. 17′. 20″, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à quadraturis; & erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ. Huic orbis Inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi Luna diſtat 90gr. à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motûs Nodorum (ut ſuprà diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

Scholium.

Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quòd motus Lunares per Theoriam Gravitatis à cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem Theoriam inveni præterea quòd Æquatio Annua medii motûs Lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major eſt, & orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor eſt, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato Luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & Æquatio Annua, per quam hæc inæqualitas compenſatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla eſt, in mediocri Solis à Terrâ diſtantiâ ad 11′. 50″ circiter aſcendit, in aliis locis æquationi centri Solis proportionalis eſt; & additur medio motui Lunæ, ubi Terra pergit ab Aphelio ſuo ad Perihelium; &, in oppoſitâ orbis parte, ſubducitur. Aſſu-

De Mundi Systemate

mendo radium orbis magni 1000, & eccentricitatem Terræ $16\frac{7}{8}$, hæc æquatio, ubi maxima eſt, per Theoriam Gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas Terræ paulo major eſſe videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

Inveni etiam quòd in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi lunæ velociùs moventur quàm in Aphelio ejus; idque in triplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè. Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus autem ſolis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè, & maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt 1^{gr}. 56′. 20, prædictæ Solis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. Quòd ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inverſè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam 2^{gr}. 54′. 30″. Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, ſunt ad 2^{gr}. 54′. 30, ut motus medius diurnus Apogæi, & motus medius diurnus Nodorum Lunæ ſunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit æquatio maxima medii motûs Apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motûs Nodorum 9′. 24″. Additur verò æquatio prior, & ſubducitur poſterior, ubi Terra pergit à Perihelio ſuo ad Aphelium: & contrarium fit in oppoſitâ orbis parte.

Per Theoriam Gravitatis conſtitit etiam quòd actio Solis in Lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per Solem, quàm ubi eadem ad rectos eſt angulos cum lineâ Terram & Solem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quàm in poſteriore. Et hinc oritur alia æquatio motûs medii lunaris, pendens à ſitu Apogæi Lunæ ad Solem; quæ quidem maxima eſt, cùm Apogæum Lunæ verſatur in octante cum Sole; & nulla, cùm illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motu medio additur, in tranſitu Apogæi Lunæ à Solis quadraturâ ad ſyzygiam; & ſubducitur in tranſitu Apogæi à ſyzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus Apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri Solis diſtantiâ à Terrâ. Augetur verò ac diminuitur

tur in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis inverſè, ideoque in maximâ Solis diſtantiâ eſt 3′. 34″, & in minimâ 3′. 56″ quamproximè: ubi verò Apogæum Lunæ ſitum eſt extra octantes, evadit minor; eſtque ad æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium.

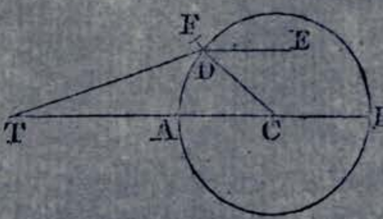
Per eandem Gravitatis theoriam actio Solis in Lunam paulo major eſt ubi linea recta, per Nodos lunæ ducta, tranſit per Solem, quàm ubi linea illa ad rectos eſt angulos cum rectâ Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo; quæque maxima eſt, ubi Nodi in Solis octantibus verſantur; & evaneſcit, ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis; & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ Nodi alterutrius à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ: additur verò medio motui Lunæ, ſi Sol diſtat à Nodo ſibi proximo in antecedentia; ſubducitur, ſi in conſequentia; & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcendit ad 47″ in mediocri Solis diſtantiâ à Terrâ, uti ex theoriâ Gravitatis colligo. In aliis Solis diſtantiis hæc æquatio maxima in octantibus Nodorum eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ Solis à Terrâ; ideoque in Perigæo Solis ad 49″, in Apogæo ejus ad 45″ circiter, aſcendit.

Per eandem Gravitatis theoriam Apogæum Lunæ progreditur quàm maximè, ubi vel cum Sole conjungitur, vel eidem opponitur; & regreditur, ubi cum Sole quadraturam facit. Et eccentricitas fit maxima in priore caſu, & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & æquationem principalem Apogæi generant, quam ſemeſtrem vocabo. Et æquatio maxima ſemeſtris eſt 12^{gr}. 18′ circiter, quantum ex obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter Lunam in Ellipſi circum Terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum Ellipſeos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ, in progreſſu & regreſſu Apogæi, & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris Lunæ à Terrâ in partes 100000, & referat T terram, & TC eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut ſit CB ſinus æquationis maximæ ſemeſtris 12^{gr}. 8′ ad radium

53244

De Mundi Systemate

dium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB deſcriptus, erit epicyclus ille, in quo centrum orbis lunaris locatur, & ſecundum ordinem literarum BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ ſemel æquato, & erit CTD æquatio ſemeſtris Apogæi lunæ, & TD eccentricitas orbis ejus in Apogæum ſecundò æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & eccentricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in orbe, & diſtantia ejus à Terrâ, idque per methodos notiſſimas.



In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum orbis Lunæ velociùs movetur circum centrum C quàm in Aphelio, idque in triplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè. Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehenſam, centrum orbis Lunæ velociùs movetur in epicyclo BDA in duplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inverſè; ab orbis centro, D, agatur recta DE verſus Apogeum Lunæ, ſeu rectæ TC parallela; & capiatur angulus EDF æqualis exceſſui argumenti annui prædicti ſupra diſtantiam Apogæi Lunæ à Perigæo Solis in conſequentia; vel quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem Solis à Terrâ, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & 52′. 27″. 16‴ ad 59′. 8″. 10‴ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis Lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum eſt D, & radius DF, interea revolvi, dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli DABD. Hâc enim ratione velocitas, quâ centrum orbis Lunæ in lineâ quâdam curvâ, circum centrum C deſcriptâ, movebitur, erit reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Computatio motûs hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris Lunæ à Terrâ

Terrâ ſit partium 100000, & eccentricitas, TC, ſit partium 5505 ut ſuprà: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta DF partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam TC ſubtendit angulum ad Terram, quem tranſlatio centri orbis à loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata, in ſitu parallelo, ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis Lunæ à Terrâ, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici; & ad diſtantiam Lunæ à Terrâ ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri Lunæ diſtantiâ à Terrâ, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa DF cum rectâ à puncto F ad Lunam ductâ continet quamproximè; & ubi maxima eſt, evadit 2′. 25″. Angulus autem, quem recta DF & recta à puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum EDF ab anomaliâ mediâ Lunæ, vel addendo diſtantiam Lunæ à Sole ad diſtantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″. ſunt ad æquationem centri ſecundam; addendam, ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo; ſubducendam, ſi major. Sic habebitur ejus longitudo in ipſis luminarium ſyzygiis.

LIBER TERTIUS.

Cùm Atmoſphæra terræ, ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40, refringat lucem Solis, & refringendo ſpargat eandem in umbram Terræ, & ſpargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipſibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria verò Lunæ primò in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Obſervatorio Regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommodè ſequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20^gr. 43′. 40″, & Apogæi ejus ♋ 7^gr. 44′. 30″; & motum medium Lunæ ♒ 15^gr. 21′. 00″, & Apogæi ejus ♓ 8^gr. 20′. 00″, & Nodi aſcendentis ♌ 27^gr. 24′. 20″; & differentiam Meridianorum Obſervatorii hujus & Obſervatorii Regii *Pariſienſis* 0^hor. 9^min. 20^sec. Motus

autem

De Mundi Systemate autem medii Lunæ & Apogæi ejus nondum ſatis accuratè habentur.

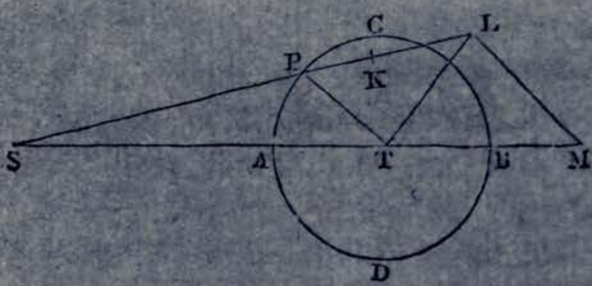
SECTIO III.

De quantitate Æſtûs Marini.

PROP. XXXVI. PROB. XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML, ſeu PT, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis TM−LM, ſeu 2PK, in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem Terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro Terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in ſuperficie Terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hâc vi Mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant à Sole. Vi alterâ, quæ duplo major eſt, Mare elevatur & ſub Sole, & in regione Soli oppoſitâ. Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à Sole, ſive elevet eandem in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, hæc ſumma erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub Sole, & Soli oppoſitis, mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant à Sole, nil ageret.



Hæc eſt vis Solis ad mare ciendum in loco quovis datò, ubi Sol tam in vertice loci verſatur, quàm in mediocri ſuâ diſtantiâ à Terrâ. In aliis Solis poſitionibus vis, ad Mare attollendum, eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directè & cubus diſtantiæ Solis à Terrâ inverſè (ll).

(ll) Vide Lib. De Syſt. Mund. § 51.

Corol.

Corol. Cùm vis centrifuga partium Terræ, à diurno Terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſurâ pedum *Pariſienſium* 25472, ut ſuprà in Prop. XIX; vis ſolaris, de quâ egimus, cùm ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200, ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant à Sole, menſurâ tantùm pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſimâ parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROP. XXXVII. PROB. XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantùm 25. Altitudo prior ex ſummâ virium, poſterior ex earundem differentiâ oritur. Solis igitur & Lunæ, in æquatore verſantium, & mediocriter à Terrâ diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æſtus maris, ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*, ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur; ac tempore verno & autumnali altitudo æſtûs in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$, ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtûs in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterùm ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii à ſyzygiis, ut

dictum fuit; ſeu proximè ſequuntur tertium Lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potiùs (ut à *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt harum à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt verò in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi Luna diſtat à Sole vel ab oppoſitione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maximè vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi Sol diſtat à ſolſtitiis decimâ circiter parte totius circuitûs; ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna diſtat à Sole decimâ circiter parte motûs totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis, in hâc diſtantiâ Lunæ à ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris, à vi Lunæ oriundum, quàm in ipſis ſyzygiis & quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ, ſeu anguli graduum 37; hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355 (mm). Ideoque in analogiâ ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S (nn).

Sed & vis Lunæ in quadraturis, ob declinationem Lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis, ab mare movendum, diminuitur in duplicatâ ratione ſinûs complementi inclinationis quamproximè. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis eſt tantùm 0,8570327 L. Eſt igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea

(mm) Imo, ut mihi videtur, in duplicatâ ratione radii ad coſinum hujus diſtantiæ. Et perſuadere mihi nequeo, quin id ipſum Newtonus voluerit.

(nn) At ſi diminutio vis Solaris ea ſit quam modò poſuimus (Not. [ll]) in analogiâ ſuperiore pro S ſcribi debet 0,899317 S.

(oo) Calculis ſubductis, eam invenio Lunæ à centro Terræ diſtantiam, quando arcu graduum 18 cum ſemiſſe à loco coitûs vel à dimidiatæ loco remota ſit, quæ ad diſtantiam mediam rationem habeat quam 69,10068 vel 69,89932 ad 69,5. Quare ſi ea ſit vis ſolaris diminutio, quam ſuprà poſuimus (Not. [ll]) analogia à Newtono poſita in hanc migraverit.

1,017292 L + 0,899317 S : 0,982861 × 0,8570327 L − 0,899317 S = 9 : 5.

Unde ea efficietur vis Lunaris, quæ ad Solarem rationem habeat quam 5,0469 ad 1.

Si

Præterea diametri orbis, in quo Luna ſine eccentricitate moveri deberet, ſunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque diſtantia Lunæ à Terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inverſè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantiâ ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815 (°°). Itaque cùm vis Solis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cùm aqua vi Solis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $7\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi Luna eſt in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultrà, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latiùs patet, æſtus dicuntur eſſe majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quàm in zonis tempe-

Si enim pro coefficiente 1,017292 ſcribatur litera a; pro 0,899317 litera b, pro 0,982861 × 0,8570327 litera c, erit aL + bS : cL − bS = 9 : 5.

Quare $5a$L + $5b$S = $9c$L − $9b$S. Et $14b$.S = $9c - 5a$.L.

Sed $9c = 7,581102$

$5a = 5,086460$

$9c - 5a = 2,494642$

Quare 2,494642.L = 14.b.S.

Et 0,178189.L = b.S = 0,899317.S.

Quare S : L = 178189 : 899317 = 1 : 5,0469.

De Mundi Systemate

ratis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque, & orientale & occidentale, ſimul deſcendat: cùm tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Eâ de cauſâ fluxus & refluxus in inſulis, quæ à littoribus longiſſimè abſunt, perexiguus eſſe ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores; uti ad *Plymuthum*, & pontem *Chepſtowæ* in *Angliâ*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches*) in *Normanniâ*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *Indiâ* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa millaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & ampliùs. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici*, & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſûs & recurſûs ſupra modum augetur. Ad littora verò quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtûs reſpondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cùm vis Lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400; perſpicuum eſt, quòd vis illa ſit longè minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 4. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum eſt ad Solis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Lunæ erit ad denſitatem Solis ut 4,4815 ad 1 directè, & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inverſè: id eſt (cùm diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis ſint 31′. 16″$\frac{1}{2}$ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ

ut

ut 4891 ad 4000, ſeu 11 ad 9. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quàm Terra noſtra. LIBER TERTIUS.

Corol. 4. Et cùm vera diameter Lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum Terræ ut 100 ad 365; erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ erit quaſi triplo minor quàm gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri Lunæ à centro Terræ erit ad diſtantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri Lunæ à centro Terræ in octantibus Lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam Terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum Terræ & Lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per Corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cùm Luna revolvatur, reſpectu Fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{9}$; ſinus verſus anguli, quem Luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illâ, quâ retinetur in orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe Lunæ per Corol. Prop. III. Et hâc vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ Lunæ à centro Terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 à centro Terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt Terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per Tabulam præcedentem in Prop. XX. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum*,

exiſtente

De Mundi Systemate

exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur, per hoc computum, in latitudine *Lutetiæ* cadendo in Vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno Terræ in illâ latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hâc velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſuprà oſtenſum eſt ad Prop. IV. & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in ſyzygiis Lunæ, eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum Terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis Lunæ, diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum Terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam mediocrem Lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per Prop. XXVIII.

Corol. 9. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in ſyzygiis Lunæ, eſt ſexaginta ſemidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte ſemidiametri. Et in quadraturis Lunæ, diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt ſexaginta & unius ſemidiametrorum mediocrium Terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri.

Corol. 10. In ſyzygiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt $57'.20''$, $57'.16''$, $57'.14''$, $57'.12''$, $57'.10''$, $57'.8''$, $57'.4''$, reſpectivè.

In his computationibus attractionem magneticam Terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt, & ignoratur. Siquando verò hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum Maris, & Parallaxis Lunæ, cum diametris apparentibus Solis & Lunæ, ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

PROP. XXXVIII. PROB. XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus lunare fluidum eſſet, ad inſtar maris noſtri, vis Terræ, ad Fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet

eſſet ad vim Lunæ, quâ mare noſtrum in partibus & ſub Lunâ & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id eſt, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1081 ad 100. Unde cùm Mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{5}$, Fluidum lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de cauſâ figura Lunæ ſphæroïs eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 186. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. Q. E. I.

Corol. Inde verò fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium, eſſent longè tardiſſimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in Prop. XVII. allatam) reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi, & in Terram converti.

SECTIO IV.

De Præceſſione Æquinoctiorum.

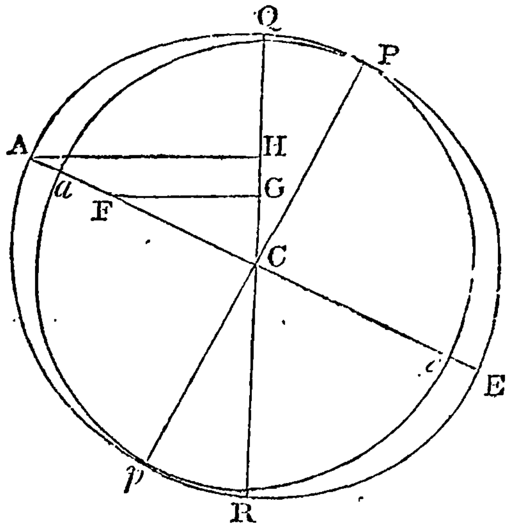
LEMMA I.

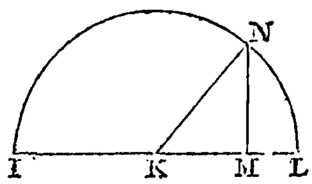
Si APE*p Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C, *& polis* P, *p, & æquatore* AE, *delineatam; & ſi centro* C, *radio* CP, *deſcribi intelligatur ſphæra* P*ape; ſit autem* QR *planum, cui recta à centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter inſiſtit; & Terræ totius exterioris* P*ap*APE*p*E, *quæ ſphærâ modò deſcriptâ altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia à plano: dico primò, quòd tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè diſtat, conſiſtentium vim & efficaciam, ad Terram conſimili motu circulari circum*

De Mundi Systemate

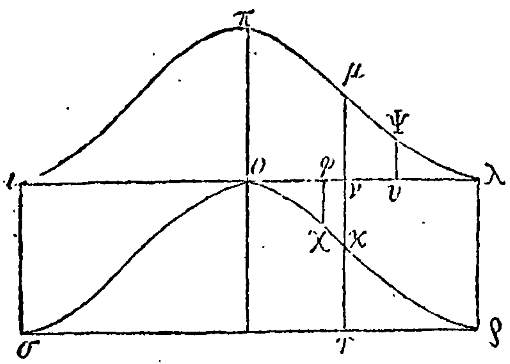
centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iſte circularis circum axem, in communi ſectione æquatoris & plani QR *jacentem, peragetur.*

Nam centro K, diametro IL, deſcribatur ſemicirculus INLK. Dividi intelligatur ſemicircumferentia INL in partes innumeras æquales; & à partibus ſingulis, N, ad diametrum, IL, demittantur ſinus NM. Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus, NM, æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus KM, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris KN; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus MN erit duplo





minor quàm ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN ([a]). Jam



([a]) Puta rectam $\lambda\iota$, poſitione datam, ſemicirculo LNI æqualem eſſe. Media dividatur recta $\lambda\iota$ in puncto o. Et in rectis $o\pi$, $\lambda\varrho$, $\iota\sigma$ ad perpendiculum eductis, capiantur $o\pi$, $\lambda\varrho$, $\iota\sigma$ ſemicirculi LNI radio, KL, ſingulatim æquales. Semicirculi arcui cuilibet LN ponatur recta $\lambda\nu$ æqualis. Et in recta $\mu\nu\kappa$, quæ rectam $\lambda\iota$ in puncto ν ad perpendiculum inſiſtat, capiatur hinc inde $\mu\nu$, $\nu\kappa$; quarum altera quidem $\mu\nu$, duarum KL, NM, altera verò $\nu\kappa$ duarum KL, KM, proportione ſit tertia; ut ſint rectangula KL × $\nu\mu$, KL × $\nu\kappa$ quadratis ex NM, KM ſingulatim æqualia. Sint $\lambda\pi\iota$, $\varrho o\sigma$ Curvæ, ad quas ſunt puncta μ, κ. Completoque rectangulo $\lambda\iota\sigma\varrho$; dico aream, $\lambda\pi\iota\sigma o\varrho\lambda$, Curvis concluſam huic rectangulo æqualem. Quin et areas $\lambda\pi\iota$, $\varrho o\sigma\iota o\lambda$ inter ſe æquales.

Primùm enim, producta $\mu\kappa$ rectæ $\sigma\varrho$ in τ occurrat. Jam cùm ſint rectangula KL × $\nu\mu$, KL × $\nu\kappa$ quadratis ex NM, KM ſingulatim æqualia; rectangula illa ſimul ſumpta quadratis ſimul ſumptis æqualia erunt. Sed rectangula illa ſimul ſumpta rectangulo KL × $\mu\kappa$ ſunt æqualia; et quadrata ſimul ſumpta quadrato ex KN, vel KL. Quare et rectangulum KL × $\mu\kappa$ quadrato ex KL æquale erit.

Quare

Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales; & ab earum unâquâque, F, ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin; & hæc vis ducta in diſtantiam CG erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut FG×GC ad AH×HC, hoc eſt, ut FC*q* ad AC*q*; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut ſumma omnium FC*q* ad ſummam totidem AC*q*, hoc eſt (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. Q. E. D.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quàm in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iiſdem poſitis: dico ſecundò quòd vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique ſitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, ſit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circuli AE *uniformiter per totum circuitum in morem*

Quare recta $\mu\kappa$ rectæ KL, ſive $\nu\tau$ æqualis. Et in omni magnitudine rectæ $\lambda\nu$, ſeu arcûs LN, manebit rectarum $\mu\kappa$, $\nu\tau$ æqualitas. Quare fluente rectâ $\lambda\nu$, erit $\mu\kappa \times \dot{\overline{\lambda\nu}} = \nu\tau \times \dot{\overline{\lambda\nu}}$. Sed $\mu\kappa \times \dot{\overline{\lambda\nu}}$ fluxio eſt areæ $\lambda\rho\kappa\mu$, et $\nu\tau \times \dot{\overline{\lambda\nu}}$ rectanguli $\lambda\rho\tau\nu$ eſt fluxio. Quare fluentes ipſæ, nempe area curvis concluſa $\lambda\rho\kappa\mu$, et area rectanguli $\lambda\rho\tau\nu$, quoniam cum ipſâ rectâ $\lambda\nu$ ſimul à nihilo generari inceperint, erunt ſemper inter ſe æquales. Quare et area tota $\lambda\rho o\sigma\iota\pi\chi$ rectangulo $\lambda\sigma$ æqualis erit. Quod primùm demonſtrandum erat.

Dico præterea areas $\lambda\pi\iota\lambda$, $\rho o\sigma\iota\lambda$ inter ſe æquales.

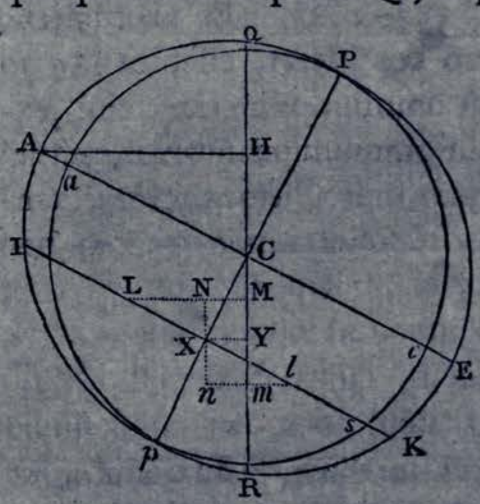
Capiantur enim $\lambda\upsilon$, $o\phi$ inter ſe æquales; quæ eâ lege fluant, ut ſemper inter ſe æquales maneant. Et à punctis υ, φ, educantur ad perpendiculum $\upsilon\psi$, $\phi\chi$, quarum illa $\upsilon\psi$ Curvæ $\lambda\pi$ in ψ, altera $\varphi\chi$ Curvæ ρo in χ occurrat. E naturà Curvæ $\lambda\pi$, rectangulum KL × $\upsilon\psi$ æquale erit quadrato à ſinu arcûs $\lambda\upsilon$. Et è naturâ Curvæ ρo, rectangulum KL × $\phi\chi$ quadrato è ſinu arcûs $o\phi$ æquale erit. Sed arcus illi, $\lambda\upsilon$, $o\phi$, cùm ſint inter ſe æquales, ſinus etiam æquales habent. Rectangula igitur KL × $\upsilon\psi$, KL × $\phi\chi$ inter ſe æqualia. Quare et rectæ $\upsilon\psi$, $\phi\chi$ inter ſe æquales. Sed $\dot{\overline{\lambda\iota}} = \dot{\overline{o\varphi}}$. Quare $\upsilon\psi \times \dot{\overline{\lambda\upsilon}} = \phi\chi \times \dot{\overline{o\phi}}$. Id eſt fluxio areæ $\lambda\upsilon\psi$ fluxioni areæ $o\phi\chi$ æqualis. Quare et areæ ipſæ, quoniam cum rectis $\lambda\upsilon$, $o\phi$ ſimul à nihilo generari incipiant, erunt ſemper inter ſe æquales. Quare tota area $\lambda o\pi$, areæ toti $o\lambda\rho$ æqualis.

Simili modo oſtendetur area $\iota o\pi$ areæ $o\iota\sigma$ æqualis. Quare et area tota $\lambda\pi\iota$ toti $\lambda\rho o\sigma\iota\lambda$ æqualis. Q. E. D.

De Mundi Systemate

annuli diſpoſitarum, ad Terram conſimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim IK circulus quilibet minor, æquatori AE parallelus; ſintque L, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* ſitæ. Et ſi in planum QR, quod radio in Solem ducto perpendiculare eſt, demittantur perpendicula LM, *lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum QR, proportionales erunt perpendiculis illis LM, *lm*. Sit autem recta L*l* plano *Pape* parallela, & biſecetur eadem in X; & per punctum X agatur N*n*, quæ parallela ſit plano QR, & perpendiculis LM, *lm* occurrat in N ac *n*, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. Et particularum L & *l* vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$; hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia, $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$, eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad Terram rotandam.



Hujus differentiæ pars affirmativa, $LN \times Mm$, ſeu $2LN \times NX$, eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2AH \times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa, $NM \times \overline{MC + mC}$, ſeu $2XY \times CY$, ad particularum earundem in A conſiſtentium vim $2AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & *l* ſimul ſumptarum vis ad Terram rotandam, eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur

in

(b) Intellige materiam in perimetro circuli IK extra Globi ſuperficiem ſitam; ſive materiam perimetro circuli IK ſphæroidis, & perimetro circuli *os* Globi interjectam.

(c) LEMMA H. I.

Quantitas motûs in Circulo, cum datâ velocitate angulari circa centrum proprium circumacto, erit ut cubus à radio.

Multitudo corpuſculorum in totâ ſuperficie circulari, cujus radius C*a*, erit ut ſuperficies ipſa:

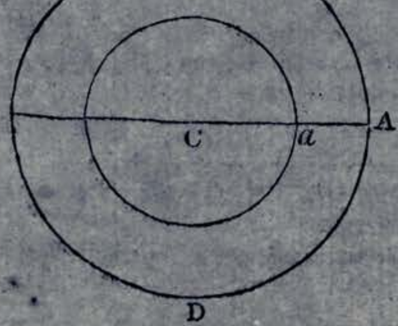
id

in particulas innumeras æquales, L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per Lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad 2ACq; & totidem CXq ad totidem ACq ut 2CXq ad 2ACq. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut IXq−2CXq ad 2ACq: & propterea (per Lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut IXq−2CXq ad ACq. LIBER TERTIUS.

Jam verò ſi ſphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus inſiſtant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujuſque IK erit ut IXq (b): ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut IXq in IXq−2CXq. Et vis materiæ ejuſdem, ſi in circuli AE perimetro conſiſteret, eſſet ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium conſiſtentis, eſt ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE conſiſtentis, ut omnia IXq in IXq−2CXq ad totidem IXq in ACq; hoc eſt, ut omnia ACq−CXq in ACq−3CXq ad totidem ACq−CXq in ACq; id eſt, ut omnia ACqq−4ACq×CXq+3CXqq ad totidem ACqq−ACq×CXq; hoc eſt, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio eſt ACqq−4ACq×CXq+3CXqq, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio eſt ACqq−ACq×CXq; ac proinde per methodum fluxionum, ut ACqq×CX−$\frac{4}{3}$ACq×CX *cub.* +$\frac{3}{5}$CXqc ad ACqq×CX−$\frac{1}{3}$ACq×CX *cub.* id eſt, ſi pro CX ſcribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}$ACqc ad $\frac{2}{3}$ACqc; hoc eſt, ut duo ad quinque. Q. E. D.

LEMMA III (c).

Iiſdem poſitis: dico tertiò quòd motus Terræ totius circum axem jam antè deſcriptum, ex motibus particularum omnium compoſitus, erit



id eſt ut quadratum è radio. Fluente igitur radio Ca, fluxio materiæ erit ut $2Ca \times \dot{\overline{Ca}}$. Sed datâ velocitate angulari, velocitas corpuſculi cujuſque in circuitu circuli cujus radius Ca, erit ut Ca. Quare fluente radio Ca, fluxio motûs erit ut $2Ca^2 \times \dot{\overline{Ca}}$, et motus ipſe ut $\frac{2Ca^3}{3}$, id eſt ut Ca^3.

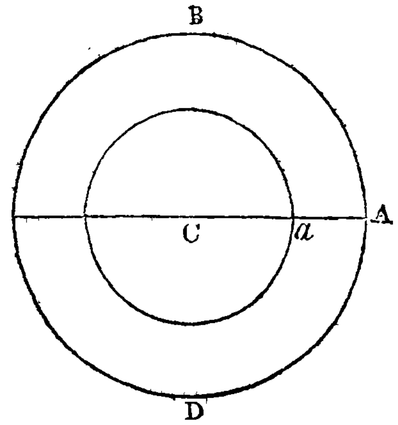
Cor. Circulo, cujus radius CA, circum centrum proprium C circumacto, ſi vi quâdam efficiatur, ut materia omnis in areâ totâ circulari, à centro undique recedat, & in fornicem quendam circularem compingatur, cujus radius

 CA,

De Mundi Systemate.

erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque ad duo quadrata ex diametro; id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Eſt



CA, quique eâdem velocitate angulari, quâcum priùs area tota circularis, circum centrum C circumagatur; motus hujus fornicis ad motum, qui antè areæ circularis erat, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Nam fluente radio Ca, in circulo cujus ille Ca radius fluxio motûs erit $2Ca^2 \times \dot{\overline{Ca}}$; et motus totus in circulo illo $\frac{2}{3}Ca^3$. Puta corpuſcula omnia, quæ erant in circuitu circuli cujus radius Ca, in circuitum circuli extimi, cujus radius CA, aufugiſſe. Motus, qui horum corpuſculorum acceſſione fornici ABD accreverit, erit ut $2Ca \times \dot{\overline{Ca}} \times CA$. Hæc erit fluxio motûs fornicis. Unde motus ejus totus erit ut $Ca^2 \times CA$; cùm motus totus areæ circularis, cujus radius Ca, erat $\frac{2}{3}Ca^3$; nimirum dum materia, quam in fornicem abiiſſe poſuimus, per aream circuli illius æqualiter undique ſpargeretur. Hinc ſi Ca in ipſam CA increverit, motus fornicis erit ut CA^3 cùm motus circuli fuerit ut $\frac{2}{3}CA^3$. Motus igitur fornicis ad motum circuli rationem habet quam 3 ad 2.

Cor. 2. Motus circuli ad motum annuli tenuiſſimi circularis, qui pari velocitate angulari circum centrum circumagatur, rationem habebit quam duplum materiæ in Circulo ad triplum materiæ in annulo.

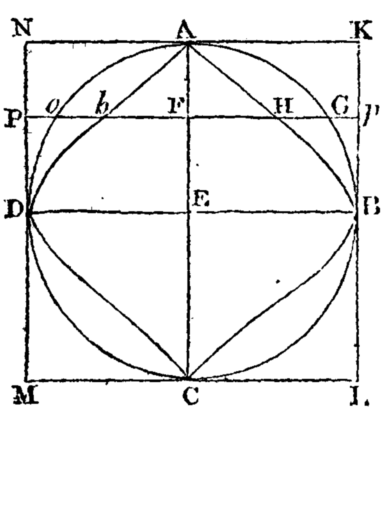
Cor. 3. Si Cylindri, qui æquali ſint altitudine, cum pari velocitate angulari circum axem quiſque proprium circumagantur, Motûs quantitates erunt ut cubi ex baſium radiis.

Cor. 4. Si materia omnis in Cylindro, vi quâdam ab axe undique fugata, in ipſâ ſuperficie cylindraceâ in parietem quendam rotundum compingatur, qui eâdem velocitate angulari, quâcum antè totum corpus cylindraceum, circum axem circumagatur; motus hujus parietis ad motum, qui cylindri antè fuerat, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Cor. 5. Si altitudine ſenſim imminutâ, paries ipſe, manente tam tenuiſſimâ ipſius craſſitudine, quàm latitudine ſpatii vacui quod intus habet, ſenſim ſe contrahat, & in Zonam ſive Annulum tenuiſſimum ultimò abeat; manente utique in pariete in annulum contracto, quæ antè ei inerat, materiâ, motus manebit; qui proinde ad motum, qui primùm erat Cylindri, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Cor. 6. Motus Cylindri circum axem circumacti ad motum annuli tenuiſſimi, qui cylindrum cingat, rationem habet quam duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in Annulo.

LEMMA H. II. PROB.



Circulo ABCD, *cujus centrum* E, *magnitudine & poſitione dato, à puncto quolibet* F, *in diametro quâdam circuli poſitione datâ, eductam puta ad perpendiculum rectam* FG; *& in eâ ſumatur* FH, *ad quam* FG *rationem habeat quam quadratum ex radio* EA *ad quadratum ex* FG. *Invenienda ſit area Curvæ, ad quam eſt punctum* H.

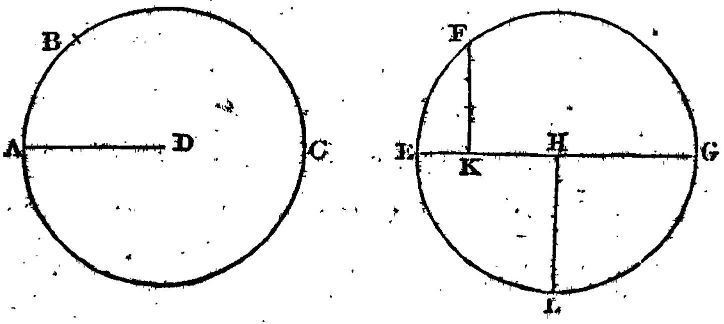
Per centrum E ducatur diameter DB ad perpendiculum cum diametro CA. Satis patet puncta D, B ad Curvam eſſe quâ de agitur, & aream Curvæ à diametris AC, DB in partes quatuor æquales dividi. E naturâ Curvæ, ſolidum $EA^2 \times FH$ cubo ex FG æquale erit. Quare ſi pro radio EA ponatur 1, & x pro EF, erit $FH = \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}$, cùm propter circulum ſit $FG = \sqrt{1-x^2}$. Quamobrem ſi detur area cujus fluxio eſt $FG \times \dot{x}$,

Eſt enim motus cylindri, circum axem ſuum immotum revolventis, ad motum ſphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcrip-

FG $\times \dot{x}$, ſive area circularis BEFG, dabitur area cujus fluxio eſt FH $\times \dot{x}$, id eſt area BEFH (per Quad. Curv. Prop. VII. Caſ. 2.) Nimirum ſi area BEFG ſignificetur literâ A, area BEFH ſignificabitur hoc ſymbolo, $\frac{3A + x \times \overline{1 - x^2}|^{\frac{3}{2}}}{4}$. Id enim efficitur per Æquationem Canonicam ſecundi caſûs ejus Propoſitionis primam, ſi area BEFH ſcribatur pro A, 1 pro θ, $\frac{3}{2}$ pro λ, 2 pro n, 1 pro e. Quare ſi EF, ſive x, in ipſam EA, ſive 1, increverit, erit area tota BEAHB $= \frac{3}{4}$A, ſignificante jam literâ A circuli quadrantem. Hinc pars quarta areæ quæ definienda erat ad partem quartam circuli, ac proinde area tota ad circulum, rationem eam quam ternarius ad quaternarium habet. Q. E. I.

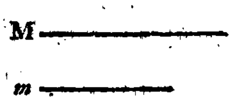
LEMMA H. III.

Sint duo annuli æquales ABC, EFG, *quorum centra* D, H. *Horum alter* ABC, *circum centrum ſuum* D *in plano immobili; alter* EFG *circum unam aliquam è diametris ſuis, puta* EG, *poſitione datam, ceu axem,*



intelligatur converti; eâ motûs lege, quâ radius HL *annuli* EFG, *qui axem* EG *ad perpendiculum inſiſtat, angulos ſcribat in plano illo cui rectus eſt axis* EG, *eorum æquales quos iiſdem temporibus radius quilibet annuli alterius* ABC *in annuli ipſius plano. Dico motum annuli* ABC *ad motum alterius* EFG *rationem habere quam circuli circuitus ad duplam diametrum.*

Capiantur arcus AB, EF æquales, & à puncto F in rectam EG ad perpendiculum deducatur FK. Velocitas corpuſculi cujuſque in annulo ABC ad velocitatem corpuſculi in loco F annuli alterius, EFG, rationem habet quam DA, vel HE, ad FK. Quare ſi arcus AB, EF eâ lege fluant, ut ſemper inter ſe æquales maneant, fluxio motûs in arcu AB ad fluxionem motûs in arcu EF rationem habebit quam EH ad FK; ſive eam quam $\dot{\text{EF}}$ ad $\dot{\text{EK}}$. Recta M eâ lege fluat, ut arcui AB, vel EF, ſemper ſit æqualis. Itaque cùm motus in arcu AB annuli ABC ſit ſemper ut arcus ipſe, recta mutabilis M motûs in arcu AB rationem ſemper ſervabit. Sit alia m, eâ lege mutabilis, ut ad illam M rationem ſemper habeat, quam motus in arcu EF annuli EFG ad motum in arcu AB annuli ABC. Recta igitur m motûs in arcu EF rationem ſemper ſervabit. Quare et fluxio rectæ M ad fluxionem rectæ m rationem habebit quam fluxio motûs in arcu AB annuli ABC ad fluxionem motûs in arcu EF annuli EFC. Hoc eſt $\dot{\text{M}} : \dot{m} = \dot{\text{EF}} : \dot{\text{EK}}$. Sed propter rectam M arcui EF ſemper æqualem, erunt $\dot{\text{M}}$, $\dot{\text{EF}}$ ſemper inter ſe æquales. Quare et $\dot{m}$, $\dot{\text{EK}}$ inter ſe æquales erunt. Quare et fluentes m, EK, quæ, naſcente primùm arcu EF, ſimul à nihilo generari inceperint, erunt ſemper inter ſe æquales. Erit igitur M : m = EF : EK. Et quandò arcus AB, EF in ſemicirculos ABC, EBG adoleverint, erit M ad m, id eſt motus in ſemicirculo ABC annuli ABC ad motum in ſemicirculo EFG annuli EFG, ut EFG ad EG; id eſt ut ſemiſſis circuitûs circuli ad diametrum, ſive ut circuitus ad duplam diametrum. Et cùm motus totus in annulo ABC duplus ſit ejus qui in ſemicirculo ABC, et motus totus in annulo EFC duplus ejus qui in ſemicirculo EFG, hi motus eandem inter ſe rationem gerent. Q. E. D.



tis (d): & motus cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo (e); & annuli motus iſte, circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri (f).

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus, Terrâ omni reliquâ ſublatâ, ſolus in orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium, ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materiâ rigidâ & firmâ conſtaret.*

PROP. XXXIX. PROB. XX.

Invenire Præceſſionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in orbe circulari, ubi

(d) Puta ſphæram et cylindrum plano quodam ſecari ſecundum axem communem; quod planum, cylindrum ſecando, efficiat quadratum KNML (vid. fig. Lemm. H. II.) & ſphæram ſecando, circulum ABCD quadrato inſcriptum. In axe AC capiatur punctum quodvis F. Puta ſphæram & cylindrum denuò ſecari plano ad planum primùm recto, & cum plano æquatoris parallelo, quod per punctum F tranſeat, & ſecando planum illud primum faciat rectam *pP*, quæ axem AEC ad perpendiculum inſiſtat. Occurrat recta *pP* circulo in punctis G, O; & capiatur FH, ad quam FG rationem habeat quam quadratum ex EA, vel *pF*, ad quadratum ex GF. Sit AHBCDA Curva, quæ, fluente recta AF, locus erit punctorum H. Fluxio motûs in Cylindro NK*pP* erit ut motus in circulo, cujus radius eſt *pF*. Et fluxio motûs in ſphæræ ſegmento OAG erit ut motus in circulo, cujus radius FG. Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motûs in ſegmento ſphæræ rationem habebit, quam cubus ex *pF* ad cubum ex FG (Lemm. H. I); ſive eam, quam cubus ex *pF* ad ſolidum $pF^2 \times FH$; ſive eam quam recta *pF* ad rectam FH. Sed *pF* ad FH rationem habet quam fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ HA*b*. Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motus in ſegmento ſphæræ rationem habet, quam fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ HA*b*. Jam verò fluente rectâ AF rectangulum KP ita fluet, ut motûs in cylindro fluente KNPI rationem ſemper ſervet. Nam motus in cylindro erit ſemper ut cylindrus; et cylindrus erit ſemper ut AF; id eſt ut rectangulum KN × AF, ſive KP. Literâ Z ſignificetur ſpatium, quod eâ lege fluat, ut ad rectangulum KP rationem habeat, quam motus in ſegmento fluente ſphæræ, GAO, ad motum in Cylindro fluente *pKNP*. Spatium igitur Z motûs in ſegmento ſphæræ GAO rationem ſemper ſervabit. Quare et fluxio rectanguli KP erit ad fluxionem ſpatii Z ut fluxio motûs in cylindro ad fluxionem motûs in ſegmento ſphæræ, ſive ut fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ AH*b*. Quare $\dot{Z} = \dot{A}H b$. Quare et fluentes ipſæ, Z, AH*b*, cùm naſcente primùm rectâ AF ſimul à nihilo generari inceperint, erunt ſemper inter ſe æquales. Quare Z : KP = AH*b* : KP. Id eſt motus in ſphæræ ſegmento OAG ad motum in cylindro KN*Pp* ut

areâ

ubi Nodi ſunt in quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes ſuprà explicatas) eſt motus medius horarius nodorum in tali orbe; ſitque anno toto ſidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi Lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46''$ in antecedentia; & ſi plures eſſent Lunæ, motus Nodorum cujuſque (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. 1.) forent ut tempora periodica; ſi Luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem Terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$ ut dies ſidereus horarum $23. 56'$ ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. $43'$; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; ſive Lunæ illæ ſe mutuò non contingant, ſive liqueſcant, & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat, & inflexibilis reddatur (g).

Fingamus igitur quòd annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit Terræ omni $PapAPepE$, quæ globo $Pape$ ſuperior eſt; *(vid. fig. pag.* 114) & quoniam globus iſte eſt ad Terram illam ſuperiorem ut $ac\,qu.$ ad $AC\,qu. - ac\,qu.$ id eſt (cùm Terræ ſemidiameter minor PC vel ac ſit ad ſemidiametrum majorem AC ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte Terram ſecun-

area AHb ad rectangulum KP. Quare motus in ſphærâ totâ ad motum in cylindro circumſcripto rationem habebit quam tota area $AHBCDbA$ ad quadratum KM: ſive eam, quæ componitur è rationibus areæ $AHBCDbA$ ad circulum $ABCD$ circulique ad quadratum circumſcriptum. Sed area $AHBCDbA$ ad circulum $ABCD$ rationem habet quam 3 ad 4. (Lemm. H. III.) Quare motus in ſphærâ ad motum in Cylindro rationem habet, quæ componitur è rationibus ternarii ad quaternarium circulique ad quadratum circumſcriptum: ſive eam, quam tres circuli æquales ad quatuor quadrata circumſcripta. Q. E. D.

(e) Lemma H. I. Cor. 6.

(f) Lemma H. III. Jam vero literâ r ſignificetur circuli radius; literô, q arcus quadrantis; literâ M, materia in cylindro; literâ m, materia in ſphærâ inſcriptâ; literâ μ, materia in annulo Cylindrum & ſphæram, apud contactum communem, ambiente.

Motus Annuli circum diametrum propriam erit ad motum ejus circum axem ſphæræ ut $r : q$. (Lemma H. III.)

Motus annuli circum axem ſphæræ ad motum cylindri ut $3\mu : 2M$. (Lemma H. Cor. 6.)

Motus Cylindri ad motum ſphæræ ut $4r^2 : \frac{3rq}{2} = 8r : 3q$.

Quare motus Annuli ad motum ſphæræ ut $8r^2\mu : 2q^2M$.

Sed $M = \frac{3}{2}m$.

Quare motus Annuli ad motum ſphæræ ut $8r^2\mu : 3q^2m$.

Sed $8r^2 : 3q^2 = 1000000 : 925275$.

Erit igitur motus Annuli ad motum ſphæræ ut $1000000 \times \mu$ ad $925275 \times m$. Q. E. D.

(g) Si hoc verè dictum ſit, neſcio qui fieri poſſit, ut alius ſit punctorum æquinoctialium motus, à vi ſolis oriundus, quàm calculi Newtoniani ſuadent. Quem tamen longè alium invenerunt viri permagni Eulerus & Simſonus noſtras; quos velim Lector conſulas. Ipſe nil definio.

dum

dum æquatorem cingeret, & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus Lem. 3.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum, quo ipſius Nodi, ſeu Puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus, qui reſtabit in annulo, erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis, ex annulo & globo compoſiti, ad motum $20^{gr}. 11'. 46''$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id eſt, ut 100 ad 292369. Vires autem, quibus Nodi Lunarum (ut ſuprà explicui) atque ideo quibus Puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur, id eſt vires 3IT *in fig. pag.* 72 & 74, ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum à plano QR, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. 2.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem, in morem figuræ P*ap*APe*p*E, ad ſuperiorem illam Terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda Puncta Æquinoctialia, evaderet minor quàm priùs in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad $20^{gr}. 11'. 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''. 56'''. 50^{iv}$.

Cæterùm hic motus ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ minuendus eſt, idque in ratione ſinûs 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad radium 100000. Quâ ratione motus iſte jam fiet $9''. 7'''. 20^{iv}$. Hæc eſt annua Præceſſio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda eſt ad vim Solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præceſſio, à vi Lunæ oriunda, $40''. 52'''. 52^{iv}$, ac tota Præceſſio annua, à vi utrâque oriunda, $50''. 00'''. 12^{iv}$. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam Præceſſio Æquinoctiorum

noctiorum ex obſervationibus aſtronomicis eſt annuatim minutorum ſecundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo Terræ ad æquatorem ſuperet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quàm $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quàm ad centrum: & Præceſſio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Deſcripſimus jam ſyſtema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum. Supereſt ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

SECTIO V.

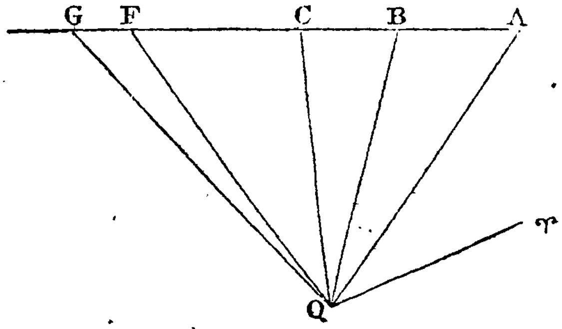
De Cometis.

LEMMA IV.

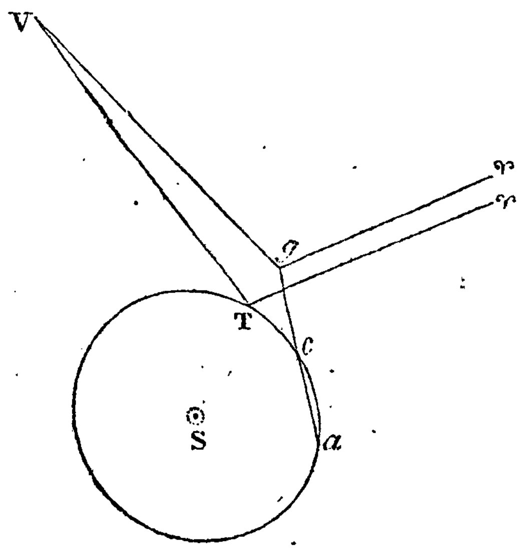
Cometas eſſe Lunâ ſuperiores & in regione Planetarum verſari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas ſupra regiones ſublunares, ſic ex Parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes ſub exitu apparitionis aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores, ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu terræ in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in Planetis; qui pro motu Terræ vel conſpirante vel contrario nunc retrogradi ſunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum Cometâ, & motu angulari circa Solem tanto celeriùs fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa è Terrâ ſpectatus, ob motum ſuum tardiorem, apparet eſſe retrogradus; ſin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ (detracto motu Terræ) fit ſaltem tardior. At ſi Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem, vel retardatione, vel motu retrogrado, diſtantia Cometæ in hunc mo-

De Mundi Systemate



dum colligitur. Sunto ♈QA, ♈QB, ♈QC obſervatæ tres longitudines Cometæ ſub initio motûs; ſitque ♈QF longitudo ultimò obſervata, ubi Cometa videri deſinit. Agatur recta ABC, cujus partes, AB, BC, rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur AC ad G, ut ſit AG ad AB ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur QG. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈QG longitudo Cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈QG, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: ſin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terrâ, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel fortè retrogradum; uti modò expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus eſt; neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit.



Diſtantia verò Cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet S ſolem; *ac*T, orbem magnum; *a*, locum Terræ in obſervatione primâ; *c*, locum Terræ in obſervatione tertiâ; T, locum Terræ in obſervatione ultimâ; & T♈, lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈TV æqualis

angulo

angulo ♈QF, hoc eſt, æqualis longitudini Cometæ, ubi Terra verſatur in T. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut A♈ ad AC; & erit *g* locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi T♈ parallela, & capiatur angulus ♈*g*V angulo ♈QG æqualis, erit hic angulus ♈*g*V æqualis longitudini Cometæ è loco *g* ſpectati; & angulus TV*g* parallaxis erit, quæ oritur è tranſlatione Terræ de loco *g* in locum T: ac proinde V locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus, V, orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet ([a]). LIBER TERTIUS.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in Circulis maximis quamdiu moventur celeriùs; at in fine curſûs, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his Circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt, quòd in Perigæis & Perihelíis, ubi propiùs adſunt, deſcendunt ſæpiùs infra orbes Martis & inferiorum Planetarum ([b]).

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à Sole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia; dicendo quòd diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione ſubduplicatâ lucis ad lucem inverſè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata, & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem, ſeu ſtella, in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce

([a]) De Syſt. Mund. § 58.
([b]) Vid. Lib. De Syſt. Mund. § 59.

 verò

De Mundi Systemate vero & claritate capitis ſuperabat caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia Cometæ ad diſtantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverſe, & 12″ ad 30″ directè, id eſt, ut 24 ad 30, ſeu 4 ad 5. Rurſus Cometa anni 1665, menſe Aprili, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſuâ penè Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′; at nucleus, cum Planetis ope tubi optici collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cùm diameter capillitii Cometarum rarò ſuperet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet ſtellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cùm lux earum cum luce Saturni non rarò conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt, quòd Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longè ſupra. Errant igitur toto cœlo, qui Cometas in regionem Fixarum propè ablegant: quâ certe ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quàm Planetæ, qui hîc ſunt, illuſtrantur à ſtellis fixis ([c]).

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propiùs ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copiâ lucis à ſe reflexæ Planetas æmuletur. Inde veriſimile ſit Cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu mi-

([c]) De Syſt. Mund. § 61.

nuenda

nuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus, à capite ſemper ortus, per ſpatia nimis ampla, incredibili cum velocitate & expanſione, propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari, & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur à Sole, ideoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas, inſtar trabium ignitarum, nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem, ne dicam Veneres plures conjunctas, quandoque ſuperaret [d].

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terrâ Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior anni 1665 (obſervante *Hevelio)* ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo apparente, ideoque præterierat Perigæum; ſplendor verò capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa, radiis ſolaribus obtectus, deſiit apparere. Cometa anni 1683, (obſervante eodem *Hevelio)* in fine menſis Julii, ubi primùm conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur uſque ad *Sept.* 4, quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis, micrometro menſuratâ, colligitur: quippe quàm *Hevelius* reperit *Aug.* 6, eſſe tantùm 6′. 5″ incluſâ comâ, at *Sept.* 2, eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motûs; at initio tamen in viciniâ ſolis longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius.* Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium menſis *Decembris,*

(d) De Syſt. Mund. § 62.

&

De Mundi Systemate

& iſte anni 1680, circa finem ejuſdem menſis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in Perigæis. Verùm ſplendor maximus capitum contigit ante duas ferè ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis ſolaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate ſolis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1, majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parùm, ſplendore ſeu claritate luminis, plurimùm defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris in diſtantiâ novem graduum à Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velociſſimè motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3, apparebat ut ſtella quartæ. *Jan.* 9, ut ſtella quintæ. *Jan.* 13, ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25, vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita, quæ, temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à Terrâ diſtantias æqualiter lucere debuiſſent, in plagâ Solis maximè ſplenduere, ex alterâ Perigæi parte evanuere. Igitur ex magnâ lucis in utroque ſitu differentiâ, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere, ubi capita velociſſimè moventur, atque ideo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in viciniâ Solis (e).

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à ſe reflexâ.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur, cur Cometæ tantoperè frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verùm percurrendo hiſtorias Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio Solem verſus, quàm in hemiſphærio oppoſito; præter alios proculdubio non paucos, quos lux

(e) De Syſt. Mund. § 63 & 64.

ſolaris

ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à Sole, ut nudis oculis ſe priùs detegendos exhibeant, quàm ſint ipſo Jove propiores. Spatii autem, tantillo intervallo circa Solem deſcripti, pars longe major ſita eſt à latere Terræ, quod Solem reſpicit; inque parte illâ majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent ([f]).

Corol. 3. Hinc etiam manifeſtum eſt, quòd Cœli reſiſtentiâ deſtituuntur. Nam Cometæ, vias obliquas & nonnunquam curſui Planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos, etiam contra curſum Planetarum diutiſſimè conſervant. Fallor ni genus Planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quòd ſcriptores aliqui Meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmoſphæris ingentibus cinguntur; & Atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic Terra, ſi è Planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus propè deliteſceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficiliùs cernitur. Et multo magis corpora Cometarum ſub Atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

PROP. XL. THEOR. XX.

Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri Primi, collatum cum Prop. VIII. XII. & XIII. Libri Tertii ([g]).

Corol. 1. Hinc ſi Cometæ in orbem redeunt; orbes erunt Ellipſes, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione ſeſquiplicatâ. Ideoque Come-

([f]) De Mund. Syſt. § 65.
([g]) De Mund. Syſt. § 71, 72, 73, 74.

tæ,

De Mundi Systemate tæ, maximâ ex parte ſupra Planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardiùs revolventur. Ut ſi axis orbis Cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id eſt, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per Corol. 7. Prop. xvi. Lib. 1.) velocitas Cometæ omnis, erit ſemper ad velocitatem Planetæ cujuſvis, circa ſolem in circulô revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ Planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam Cometæ à centro ſolis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu Ellipſeos in quâ Terrâ revolvitur ſemidiametrum maximam, eſſe partium 100000000: & Terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa, in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum reciprocè, ideoque datur.

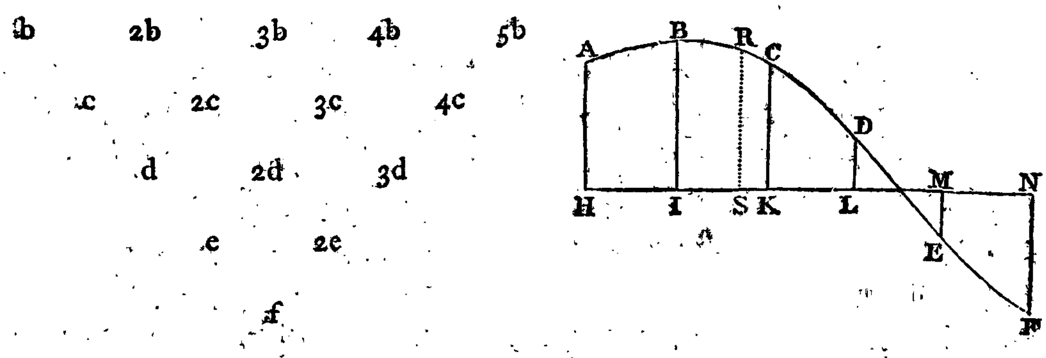
Corol. 4. Unde ſi latus rectum Parabolæ quadruplo majus ſit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area, quam Cometa radio ad Solem ducto ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione ſubduplicatâ.

LEMMA V.

Invenire lineam Curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam, HN, demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. ſecundas, c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias, d, $2d$, $3d$, &c. id eſt, ita ut ſit AH$-$BI$=b$, BI$-$CK$=2b$, CK$-$



DL$=3b$, DL$+$EM$=4b$, $-$EM$+$FN$=5b$, &c. dein $b-2b=c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic eſt f. Deinde erectâ quâcunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad Curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic AH$=a$; $-$HS$=p$; $\frac{1}{2}p$ in $-$IS$=q$; $\frac{1}{3}q$ in $+$SK$=r$; $\frac{1}{4}r$ in $+$SL$=s$; $\frac{1}{5}s$ in $+$SM$=t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probè obſervatis, erit RS$=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Caſ. 2. Quòd ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas, per intervalla perpendiculorum diviſas, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; ſecundas, per intervalla bina diviſas, c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias, per intervalla terna diviſas, d, $2d$, $3d$, &c. quartas, per intervalla quaterna diviſas, e, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. poſtea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic AH$=a$; $-$HS$=p$; p in $-$IS$=q$; q in $+$SK$=r$; r in $+$SL$=s$; s in $+$SM$=t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata RS$=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Corol. 1. Hinc areæ Curvarum omnium inveniri poſſunt quam-

proxime. Nam ſi Curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ Curvæ illius quadrandæ. Poteſt autem Parabola per methodos notiſſimas ſemper quadrari Geometricè.

LEMMA VI.

Ex obſervatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

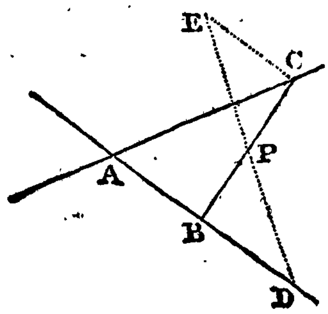
Deſignent HI, IK, KL, LM tempora inter obſervationes *(in fig. præced.)* HA, IB, KC, LD, ME obſervatas quinque longitudines Cometæ; HS, tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur Curva regularis ABCDE; & per Lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæſita.

Eâdem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantùm 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

LEMMA VII.

Per datum punctum, P, *ducere rectam lineam,* BC, *cujus partes,* PB, PC, *rectis duabus poſitione datis* AB, AC *abſciſſæ, datam habeant rationem ad invicem.*

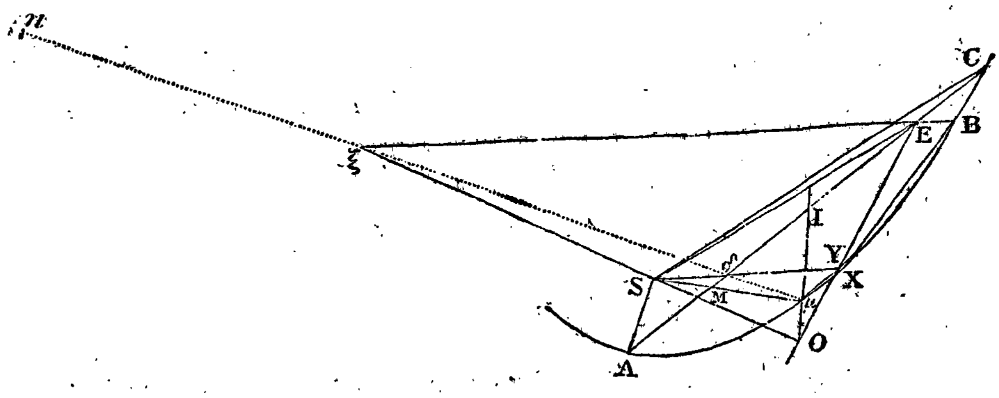


A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD, & producatur eadem verſus rectam alteram AC uſque ad E, ut ſit PE ad PD in datâ illâ ratione. Ipſi AD parallela ſit EC; & ſi agatur CPB, erit PC ad PB ut PE ad PD. Q. E. F.

LEMMA

LEMMA VIII.

Sit ABC *Parabola, umbilicum habens* S. *Chordâ* AC *biſectâ in* I *abſcindatur ſegmentum* ABCA, *cujus diameter ſit* Iμ *&* *vertex* μ.



In Iμ *productâ capiatur* μO *æqualis dimidio ipſius* Iμ. *Jungatur* OS, *&* *producatur ea ad* ξ, *ut ſit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et ſi Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *&* *agatur* ξB *ſecans* AC *in* E: *dico quòd punctum* E *abſcindet de chordâ* AC *ſegmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim EO ſecans arcum parabolicum ABC in Y, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea AEXμA ad aream curvilineam ACYμA ut AE ad AC. Ideoque cùm triangulum ASE ſit ad triangulum ASC in eâdem ratione, erit area tota ASEXμA ad aream totam ASCYμA ut AE ad AC. Cùm autem ξO ſit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipſi EB parallela: & propterea ſi jungatur BX ([h]), erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde ſi ad aream ASEXμA addatur triangulum EXB, & de ſummâ auferatur triangulum SEB, manebit area ASBXμA areæ ASEXμA æqualis, atque ideo ad aream ASCYμA ut AE ad AC. Sed areæ ASBXμA æqualis eſt area ASBYμA quamproximè, & hæc area ASBYμA eſt ad aream ASCYμA, ut tempus deſcripti arcûs AB ad tempus deſcripti arcûs totius AC. Ideoque AE eſt ad AC in ratione temporum quamproximè. Q. E. D.

Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, eſt AE ad AC in ratione temporum accurate.

([h]) ——*ſi jungatur* BX] ſi jungantur BX, SB.

De Mundi Systemate

Scholium.

Si jungatur μξ ſecans AC in δ, & in eâ capiatur ξn, quæ ſit ad μB ut 27MI ad 16Mμ: acta Bn ſecabit chordam AC in ratione temporum magis accuratè quàm priùs. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, ſi punctum B magis diſtat à vertice principali Parabolæ quàm punctum μ; & citrà, ſi minus diſtat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

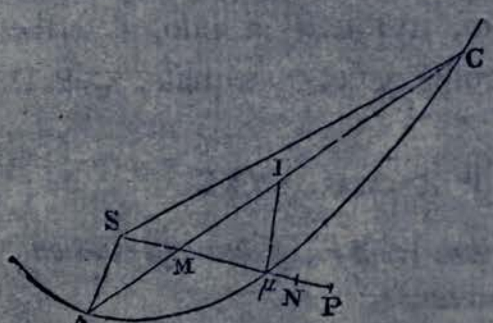
Rectæ Iμ *&* μM *& longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe.*

Nam 4Sμ eſt latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *ſit pars tertia ipſius* μI, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ: *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* AμC, *ſi progrederetur eâ ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; area, quam radio ad punctum S ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ ASCμ. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcriptâ & longitudine Sμ eſſet ad contentum ſub longitudinibus AC & SM, ut area ASCμ ad triangulum ASC, id eſt, ut SN ad SM. Quare AC eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut Sμ ad SN. Cùm autem velocitas cometæ in altitudine SP ſit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad ejus velocitatem in altitudine Sμ, in ſubduplicatâ ratione SP ad Sμ inverſe, id eſt, in ratione Sμ ad SN; longitudo, hâc velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut Sμ ad SN. Igitur



AC

AC & longitudo hâc novâ velocitate deſcripta, cùm ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. Q. E. D.

Corol. Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam AC quamproximè.

LEMMA XI.

Si Cometa, motu omni privatus, de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & eâ ſemper vi uniformiter continuatâ urgeretur in Solem, quâ urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis, quo in orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore deſcribat arcum parabolicum AC, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per Lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, ideoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus ſemidiameter eſſet SP, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum, cujus longitudo eſſet ad arcûs parabolici chordam AC, in ſubduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in ſolem in altitudine SP, cadendo de altitudine illâ in ſolem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP; id eſt, ſpatium $\frac{AI^q}{4SP}$. Unde cùm pondus cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: Cometa, pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AI^q}{4S\mu}$; id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. Q. E. D.

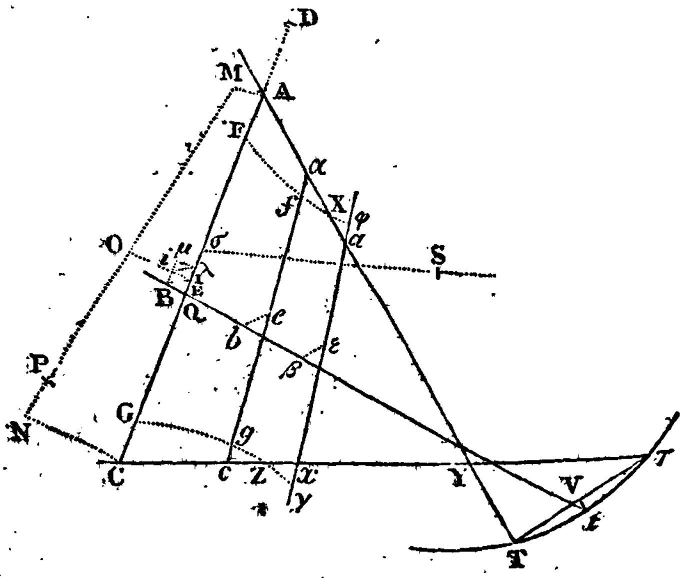
PROP. XLI. PROB. XXI.

Cometæ in Parabolâ moti Trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui Problemata quædam in Libro Primo, quæ ad ejus ſolutionem

nem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi Cometa tardiùs movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum E (in fig. Lem. VIII.) incidat in punctum M quamproximè, &



inde aberret verſus I potius quàm verſus A. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus Cometæ locus per Lemma ſextum.

Deſignent S ſolem; T, *t*, τ, tria loca Terræ in orbe magno; TA, *t*B, τC, obſervatas tres longitudines Cometæ; V, tempus inter obſervationem primam & ſecundam; W, tempus inter ſecundam ac tertiam; X, longitudinem, quam Cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à ſole diſtantiâ, deſcribere poſſet, quæque (per Corol. 3. Prop. XL. Lib. 3.) invenienda eſt; & *t*V, perpendiculum in chordam Tτ. In obſervatâ longitudine mediâ, *t*B, ſumatur utcunque punctum B, pro loco Cometæ in plano Eclipticæ; & inde verſus ſolem, S, ducatur linea BE, quæ ſit ad ſagittam *t*V, ut contentum ſub SB & S*t quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt SB & tangens latitudinis cometæ in obſervatione ſecundâ ad radium *t*B. Et per

punctum

punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC, ad rectas TA & τC terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modò B ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

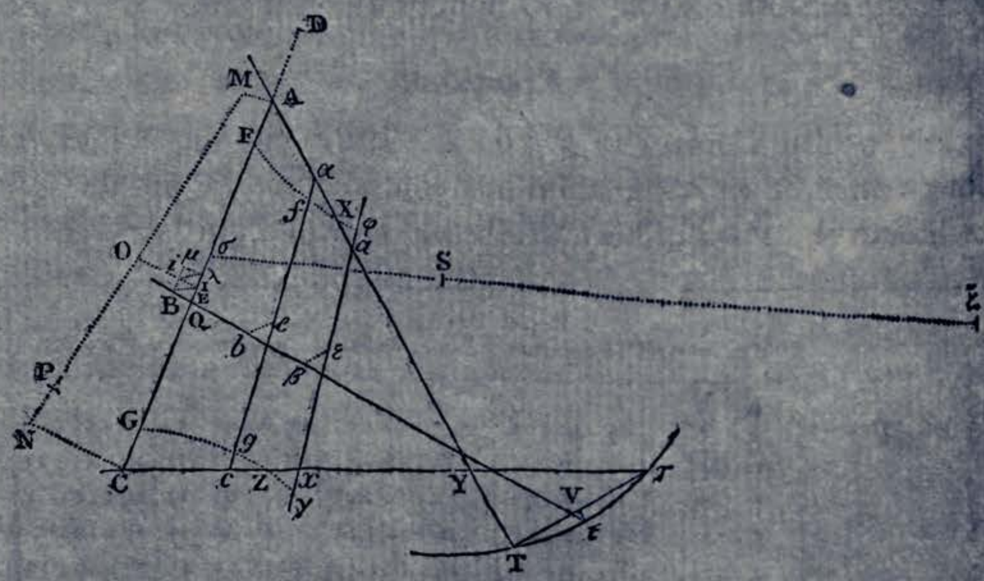
Ad AC biſectam in I erige perpendiculum I*i*. Per punctum B age occultam B*i* ipſi AC parallelam. Junge occultam S*i* ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum *i*Iλμ. Cape Iσ æqualem 3Iλ, & per ſolem, S, age occultam σξ æqualem 3Sσ + 3*i*λ. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE; quæ ſit ad priorem BE in duplicatâ ratione diſtantiæ BS ad quantitatem S$\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes V & W. Et erunt A & C loca Cometæ magis accuratè.

Ad AC, biſectam in I, erigantur perpendicula AM, CN, IO, quorum AM & CN ſint tangentes latitudinum in obſervatione primâ ac tertiâ ad radios TA & τC. Jungatur MN ſecans IO in O. Conſtituatur rectangulum *i*Iλμ ut prius. In IA productâ capiatur ID æqualis S$\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſuprà inventam X, in ſubduplicatâ ratione mediocris diſtantiæ telluris à ſole (ſeu ſemidiametri orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca Cometæ, per quæ orbis ejus in plano Eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in rectâ AC capiatur CG ipſi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eaſdem partes rectæ NC jaceant.

Eâdem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex aſſumpto puncto B inventa ſunt, inveniantur, ex aſſumptis utcunque punctis aliis *b* & β, puncta nova *e*, *a*, *c*, *g*, & ε, α, κ, γ. Deinde ſi per G, *g*, γ ducatur circumferentia circuli G*g*γ, ſecans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in AC, *ac*, ακ capiantur AF, *af*, αφ, ipſis CG, *cg*, κγ reſpectivè æquales; & per puncta F, *f*, φ ducatur circumferentia circuli F*f*φ, ſecans rectam AT in X: erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per

Prop.

De Mundi Systemate Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo deſcribatur Parabola, & hæc erit trajectoria Cometæ. Q. E. I.



Conſtructionis hujus demonſtratio ex lemmatibus conſequitur: quippe cùm recta AC ſecetur in E in ratione temporum, per Lemma VII. ut oportet per Lem. VIII. & BE per Lem. XI. ſit pars rectæ BS vel Bξ, in plano Eclipticæ, arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. X.) longitudo ſit chordæ arcûs, quem Cometa in orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi MN æqualis fuerit, ſi modò B ſit verus cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterùm puncta B, *b*, *β* non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQ*t*, in quo veſtigium orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecat rectam *t*B, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ ſit ad $\frac{4}{3}$Tτ in ſubduplicatâ ratione SQ ad S*t*. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini V*t*, determinabitur punctum B, quod primâ vice uſurpare licet. Tum rectâ AC deletâ & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ductâ, & inventâ inſuper longitudine MP; in *t*B capiatur punctum *b*, eâ lege, ut ſi TA, τC ſe mutuò ſecuerint in Y, ſit diſtantia Y*b* ad diſtantiam YB, in ratione compoſitâ ex ratione MP ad MN & ratione ſubduplicatâ SB ad S*b*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium *β*, ſi modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes

duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia B*b* perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta F, *f* & G, *g*, actæ rectæ F*f* & G*g* ſecabunt TA & *τ*C in punctis quæſitis X & Z *.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, Tabula ſequens exhibet.

	Tem. appar.	Tem. verum.	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♑ 1 . 51 . 23	♑ 6 . 32 . 30	8 . 28 . 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11 . 6 . 44	♒ 5 . 8 . 12	21 . 42 . 13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14 . 9 . 26	18 . 49 . 23	25 . 23 . 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16 . 9 . 22	28 . 24 . 13	27 . 0 . 52
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19 . 19 . 43	♓ 13 . 10 . 41	28 . 9 . 58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20 . 21 . 9	17 . 38 . 20	28 . 11 . 53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26 . 22 . 18	♈ 8 . 48 . 53	26 . 15 . 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0 . 29 . 2	18 . 44 . 4	24 . 11 . 56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1 . 27 . 43	20 . 40 . 50	23 . 43 . 52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4 . 33 . 20	25 . 59 . 48	22 . 17 . 28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16 . 45 . 36	♉ 9 . 35 . 0	17 . 56 . 30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21 . 49 . 58	13 . 19 . 51	16 . 42 . 18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24 . 46 . 59	15 . 13 . 53	16 . 4 . 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27 . 49 . 51	16 . 59 . 6	15 . 27 . 3

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

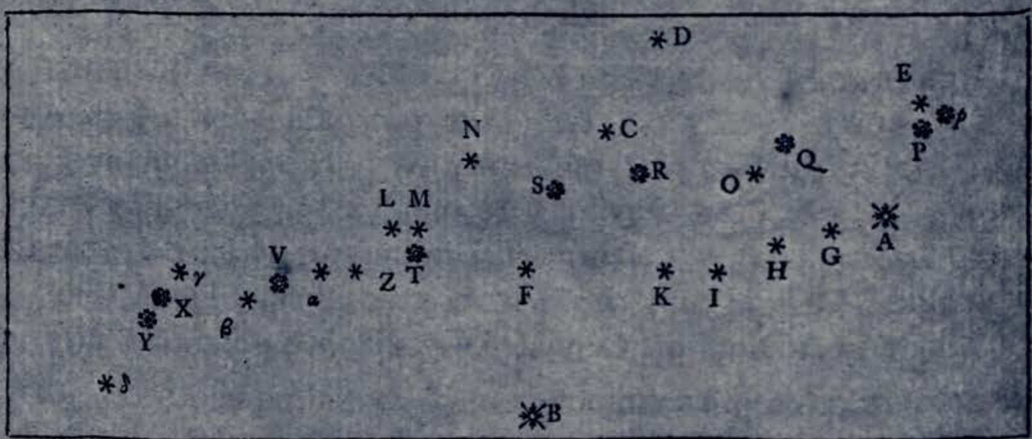
	Temp. appar.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	° ′ ″	° ′ ″
1681. *Feb.* 25	8 . 30	♉ 26 . 18 . 35	12 . 46 . 46
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 4	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis & po-

* Confer Problemata ad finem Libri de Syſt. Mund.

 ſitiones

ſitiones fixarum inter ſe & poſitiones cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet A ſtellam quartæ magnitudinis in ſiniſtro calcaneo Perſei *(Bayero o)* B ſtellam ſequentem tertiæ magnitudinis in ſiniſtro pede *(Bayero ζ)* & c ſtellam ſextæ magnitudinis *(Bayero n)* in talo ejuſdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *p*, P, Q, R, S, T, V, X, loca cometæ in obſervationibus ſuprà deſcriptis: & exiſtente diſtantiâ AB partium $80\frac{7}{12}$, erat AC partium $52\frac{1}{4}$, BC $58\frac{5}{6}$, AD $57\frac{5}{12}$, BD $82\frac{6}{11}$, CD $23\frac{2}{3}$, AE $29\frac{4}{7}$, CE $57\frac{1}{2}$, DE $49\frac{11}{12}$, AI $27\frac{7}{12}$,



BI $52\frac{1}{6}$, CI $36\frac{7}{12}$, DI $53\frac{5}{11}$, AK $38\frac{2}{3}$, BK 43, CK $31\frac{5}{9}$, FK 29, FB 23, FC $36\frac{1}{4}$, AH $18\frac{6}{7}$, DH $50\frac{7}{8}$, BN $46\frac{5}{12}$, CN $31\frac{1}{3}$, BL $45\frac{5}{12}$, NB $31\frac{5}{7}$. HO erat ad HI ut 7 ad 6, & producta tranſibat inter ſtellas D & E, ſic ut diſtantia ſtellæ D ab hâc rectâ eſſet $\frac{1}{6}$CD. LM erat ad LN ut 2 ad 9, & producta tranſibat per ſtellam H. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Tandem *Poundius* noſter iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in Tabulam ſequentem retulit.

Fixarum

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26 . 41 . 50	12 . 8 . 36
B	28 . 40 . 23	11 . 17 . 54
C	27 . 58 . 30	12 . 40 . 25
E	26 . 27 . 17	12 . 52 . 7
F	28 . 28 . 37	11 . 52 . 22
G	26 . 56 . 8	12 . 4 . 58
H	27 . 11 . 45	12 . 2 . 1
I	27 . 25 . 2	11 . 53 . 11
K	27 . 42 . 7	11 . 53 . 26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29 . 33 . 34	12 . 7 . 48
M	29 . 18 . 54	12 . 7 . 20
N	28 . 48 . 29	12 . 31 . 9
Z	29 . 44 . 48	11 . 57 . 13
α	29 . 52 . 3	11 . 55 . 48
β	♊ 0 . 8 . 23	11 . 48 . 56
γ	0 . 40 . 10	11 . 55 . 18
δ	1 . 3 . 20	11 . 30 . 42

Poſitiones verò cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. Cometæ in *p* exiſtentis diſtantia à ſtellâ E erat minor quàm $\frac{3}{13}$ AE, major quàm $\frac{1}{5}$ AE, ideoque æqualis $\frac{3}{14}$ AE proximè; & angulus A*p*E nonnihil obtuſus erat, ſed ferè rectus. Nempe ſi demitteretur ad *p*E perpendiculum ab A, diſtantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$*p*E.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, Cometæ in P exiſtentis diſtantia à ſtellâ E erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, minor quàm $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE, ideoque æqualis $\frac{1}{4}$ AE, ſeu $\frac{8}{39}$ AE quamproximè. A perpendiculo autem à ſtellâ A ad rectam PD demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ PE.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. Cometæ in Q exiſtentis diſtantia à ſtellâ O æquabat diſtantiam ſtellarum O & H, & recta QO producta tranſibat inter ſtellas K & B. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. Cometa, in R exiſtens, ſtellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$ CK, & paulo minor quàm $\frac{1}{3}$ CK + $\frac{1}{8}$ CR, ideoque æqualis $\frac{1}{3}$ CK + $\frac{1}{16}$ CR, ſeu $\frac{16}{45}$ CK.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. Cometæ exiſtentis in S diſtantia à ſtellâ C erat $\frac{4}{9}$ FC quamproximè. Diſtantia ſtellæ F à rectâ CS productâ erat $\frac{1}{24}$ FC; & diſtantia ſtellæ B ab eâdem rectâ erat quintuplo major quàm diſtantia ſtellæ F. Item recta NS producta tranſibat inter ſtellas H & I, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ H quàm ſtellæ I.

Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m Cometâ exiſtente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}$ ML, & recta LT producta tranſibat inter B

De Mundi Systemate

& F, quadruplo vel quintuplo propior F quàm B, auferens à BF quintam vel ſextam ejus partem verſus F. Et MT producta tranſibat extra ſpatium BF ad partes ſtellæ B, quadruplo propior exiſtens ſtellæ B quàm ſtellæ F. Erat M ſtella perexigua, quæ per teleſcopium videri vix potuit, & L ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Die lunæ *Mart.* 7. hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. Cometâ exiſtente in V, recta $V\alpha$ producta tranſibat inter B & F, auferens à BF verſus F $\frac{1}{10}$BF, & erat ad rectam $V\beta$ ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ à rectâ $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2}V\beta$.

Die mercurii *Mart.* 9. horâ $8\frac{1}{2}$. p. m. Cometâ exiſtente in X, recta γX æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γX erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometâ exiſtente in Y, recta γY æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γY æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$, vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa, ob viciniam horizontis, cerni vix potuit, nec locus ejus tam diſtinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes derivabam longitudines & latitudines Cometæ, & *Poundius* noſter ex correctis fixarum locis loca Cometæ correxit, & loca correcta habentur ſuprà. Micrometro parum affabrè conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores, quatenus ex obſervationibus noſtris oriantur, minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem, juxta obſervationes noſtras, in fine motûs ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, à parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis tres, quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo tB partium 5657; inveni SB 9747, BE primâ vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE ſecundâ vice 421, OD 10186, X 8528,4, MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam tb 5640. Et per hanc operationem inveni tandem diſtantias TX 4775 & TZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ♋ &

& aſcendentem in ♑ $1^{gr}. 53'$; inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ $61^{gr}. 20'\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo $8^{gr}. 38'$, & eſſe in ♐ $27^{gr}. 43'$ cum latitudine auſtrali $7^{gr}. 34'$; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* $8^d. 0^h. 4'$ p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum, ex Tabulâ ſinuum naturalium collectas, determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis $16\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tandem ut conſtaret an Cometa in orbe ſic invento verè moveretur, collegi, per operationes partim arithmeticas partim graphicas, loca cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in Tabulâ ſequente videre licet.

	Diſtant Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obſ.	Lat. Obſ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6 . 32	8 . $18\frac{1}{2}$	♑ 6 . $31\frac{1}{3}$	8 . 26	+1	− $7\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13 . $13\frac{2}{3}$	28 . 0	♓ 13 . $11\frac{3}{4}$	28 . $10\frac{1}{12}$	+2	− $10\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . $29\frac{2}{3}$	♉ 16 . $59\frac{7}{8}$	15 . $27\frac{2}{5}$	+0	+ $2\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29 . $19\frac{3}{4}$	12 . 4	29 . $20\frac{6}{7}$	12 . $3\frac{1}{2}$	−1	+ $\frac{1}{2}$

Poſtea verò *Halleius* noſter orbitam per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quàm per deſcriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ $1^{gr}. 53'$, & inclinationem plani orbitæ ad Eclipticam $61^{gr}. 20'\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* $8^d. 0^h. 4'$: diſtantiam verò perihelii à nodo aſcendente, in orbitâ cometæ menſuratam, invenit eſſe $9^{gr}. 20'$, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis à terrâ diſtantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè inſtituto, loca Cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tempus

Tempus verum.	Diſtantia Cometæ à ☉.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	−3. 5	−2. 0
21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	−1.42	+1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	−1. 3	−0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	−1.28	0.44
29. 8. 3	84021	♓ 13.12.40	28.10.10	+1.59	+0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28 11.20	+1.45	−0.33
Jan. 5. 6.1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	−1.20	+1.25
30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	−2.10	−0.11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	−2.42	+0.14
5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	−0.41	+2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	−2.49	+1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Apparuit etiam hic Cometa menſe *Novembri* præcedente, & *Coburgi* in *Saxonia* à Dno. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas, ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentiâ longitudinum *Coburgi* & *Londini*, graduum undecim, & locis Fixarum, à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca Cometæ determinavit ut ſequitur.

Novem. 3d. 17h. 2′, tempore apparente *Londini*, Cometa erat in ♌ 29gr. 51′ cum lat. bor. 1gr. 17′. 45″.

Novem. 5d. 15h. 58′ Cometa erat in ♍ 3gr. 23′ cum lat. bor. 1gr. 6′.

Novem. 10d. 16h. 31′ Cometa æqualiter diſtabat à ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abfuit ab eâ. In ſtellarum catalogo *Flamſtediano* σ tunc habuit ♍ 14gr. 15′ cum lat. bor. 1gr. 41′ fere, τ verò ♍ 17gr. 3′½, cum lat. auſtr. 0gr. 34′. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ 15gr. 39′¼, cum lat. bor. 0gr. 33′½. Sit diſtantia Cometæ à rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum 7′½, circiter. Et inde Cometa erat in ♍ 15gr. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Obſervatio

Obſervatio prima, ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas, abundè ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in obſervatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29gr. 30′. 22″. latitudo borealis 1gr. 25′. 7″. & diſtantia ejus à ſole 115546.

Porro *Halleius*, obſervando quòd Cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſſ.* anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & inſigni (prætérquam quòd ſub mortem *Cæſaris*, cauda, ob incommodam telluris poſitionem, minùs apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum, cujus axis major eſſet partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ 2gr. 2′; inclinationem plani orbis ad planum Eclipticæ 61gr. 6′. 48″; perihelium Cometæ in hoc plano ♐ 22gr. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7d. 23h. 9′; diſtantiam perihelii à nodo aſcendente in plano Eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: computavit motum Cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus, tùm ex obſervationibus deducta quàm in hoc orbe computata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

Tempus

De Mundi Systemate

Tempus verum,		Long. obſ.	Lat. Bor. obſ.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov.	3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
	5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
	10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
	16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
	18.21.34			18.52.15	1.26.54		
	20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
	23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec.	12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
	21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
	24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
	26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
	29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
	30. 8. 10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan.	5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
	9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
	10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
	13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
	25. 7.59	♉ 9.53. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
	30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb.	2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
	5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
	25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar.	1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
	5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
	9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes Cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quàm motus Planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis; & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hîc rectè definitum fuiſſe.

In Tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*, Filis ad fixas applicatis, cometam obſervârunt in ♎ 8^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 0^{gr}. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 0^{gr}.

$0^{gr}. 30'$. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id eſt, horâ matutinâ Liber Tertius.
5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8^{gr}. ſine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ $8^{gr}. 16'. 45''$ cum latitudine auſtrali $0^{gr}. 53'. 7''$.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id eſt, horâ 5. 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ $13^{gr}. 30'$ cum latitudine auſtrali $1^{gr}. 20'$. *Cellius* in ♎ $13^{gr}. 30'$ cum latitudine auſtrali $1^{gr}. 00'$. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ $13^{gr}. 00'$, cum latitudine auſtrali $1^{gr}. 00'$. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexienſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in rectâ lineâ in virginis auſtrali manu, *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ, *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ $12^{gr}. 46'$ cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ* in latitudine $42\frac{1}{2}$ graduum, horâ quintâ matutinâ (id eſt *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14^{gr}. cum latitudine auſtrali $1^{gr}. 30'$, uti à cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. horâ mat. $4\frac{1}{2}$ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à ſpicâ ♍ quaſi 2^{gr}. boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ $19^{gr}. 23'. 47''$ cum lat. auſtr. $2^{gr}. 1'. 59''$. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ*, cometa diſtabat à ſpicâ ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in inſulâ *Jamaicâ*, cometa diſtabat à ſpicâ intervallo quaſi gradûs unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. $38\frac{1}{2}^{gr}$. horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 10^{a} *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpicâ propemodum conjunctum, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem quaſi $\frac{3}{4}^{gr}$. Et ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo, quòd horâ 9. 44′ *Londini* Cometa erat in ♎ $18^{gr}. 50'$ cum latitudine auſtrali $1^{gr}. 25'$ circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ $18^{gr}. 52'. 15''$ cum latitudine auſtrali $1^{gr}. 26'. 54''$.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, horâ ſextâ matutinâ *Venetiis* (id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23^{gr}. cum latitudine auſtrali $1^{gr}. 30'$. Eodem die *Boſtoniæ*,

 diſtabat

diſtabat cometa à ſpicâ ♍, 4^{gr}. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23^{gr}. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. 7$\frac{1}{4}$ cometam obſervârunt in ♎ 27^{gr}. 50′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 16′, *Cellius* in ♎ 28^{gr}. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27^{gr}. 45′, *Montenarus* in ♎ 27^{gr}. 51′. Eodem die in inſulâ *Jamaicâ* cometa viſus eſt prope principium ſcorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum ſpicâ virginis, id eſt, 2^{gr}. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* in *Indiâ Orientali* (id eſt ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta eſt diſtantia cometæ à ſpicâ ♍ 7^{gr}. 35′ in orientem. In lineâ rectâ erat inter ſpicam & lancem, ideoque verſabatur in ♎ 26^{gr}. 58′ cum lat. auſtrali 1^{gr}. 11′ circiter; & poſt horas 5 & 40′ (ad horam ſcilicet quintam matutinam *Londini*) erat in ♎ 28^{gr}. 12′ cum lat. auſtr. 1^{gr}. 16′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♎ 28^{gr}. 10′. 36″, cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♏ 2^{gr}. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♏ 3^{gr}. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac priùs, id eſt, 1^{gr}. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 1^{gr}. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3^{gr}. 5′ circiter. Eodem die *Londini* horâ mat. 6$\frac{1}{2}$ *Hookius* noſter cometam vidit in ♏ 3^{gr}. 30′ circiter, idque in lineâ rectâ quæ tranſit per ſpicam virginis & cor leonis; non exactè quidem, ſed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quòd linea à cometâ per ſpicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus cordis leonis, interpoſito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & ſpicam virginis tranſiens, Eclipticam ſecuit in ♍ 3^{gr}. 46′; in angulo 2^{gr}. 51′. Et ſi cometa locatus fuiſſet in hâc lineâ, in ♏ 3^{gr}, ejus latitudo fuiſſet 2^{gr}. 26′. Sed cùm cometa, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hâc lineâ boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem ſpicæ ♍, eratque 1^{gr}. 30′ circiter; &, conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone*, perpetuò augebatur; ideoque jam ſenſibiliter major erat quàm 1^{gr}. 30′. Inter limites autem jam conſtitutos 2^{gr}. 26′ & 1^{gr}. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1^{gr}. 58′ circiter. Cauda cometæ

cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad ſpicam ♍, declinans aliquantulum à ſtellâ iſtâ, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & cauda, æquatori ferè parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione ſolis boream verſus. LIBER TERTIUS.

Nov. 23. ſt. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id eſt horâ $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♏ 8^{gr}. 8′, cum latitudine auſtrali 2^{gr}. 31′, captis ſcilicet ejus diſtantiis à ſtellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum ſolis cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♏ 12^{gr}. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & ſpicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quàm 2^{gr}. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulo major erat quàm 1^{gr}. 58′; & magnitudine mediocri, ſine notabili errore, ſtatui poteſt 2^{gr}. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & obſervator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradûs unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ, quæ per poſitiones cometæ ad fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & obſervatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 11^{gr}. 45′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♏ 13^{gr}. circiter. Per theoriam verò cometa jam erat in ♏ 13^{gr}. 22′. 42″.

Nov. 25. Ante ortum ſolis *Montenarus* cometam obſervavit in ♏ $17\frac{3}{4}^{gr}$. circiter. Et *Cellius* obſervavit eodem tempore, quòd cometa erat in lineâ rectâ inter ſtellam lucidam in dextro femore virginis & lancem auſtralem libræ, & hæc recta ſecat viam cometæ in ♏ 18^{gr}. 36′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♏ $18\frac{1}{3}^{gr}$. circiter.

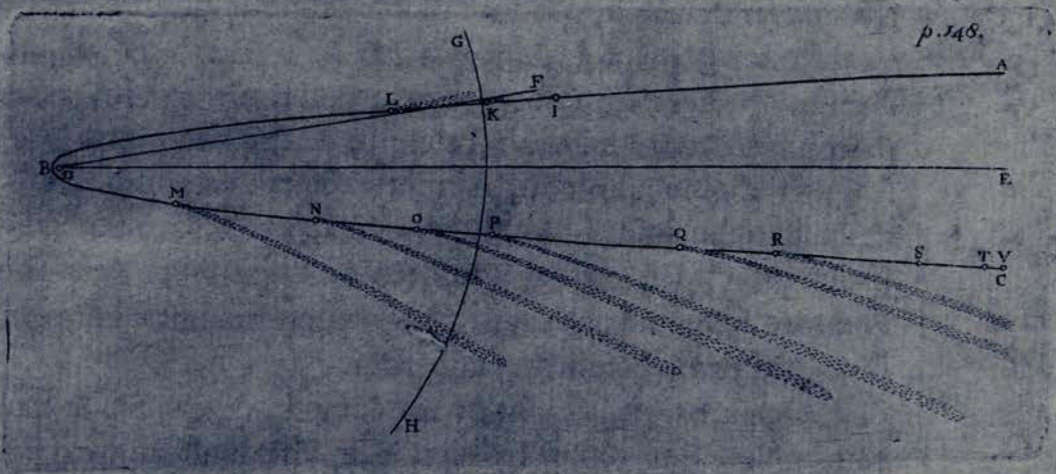
Congruunt igitur hæ obſervationes cum theoriâ, quatenus congruunt inter ſe; & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad uſque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis ſecuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit

cur non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab Eclipticâ in auſtrum declinabat; & poſtea, menſe *Decembri*, gradibus 29 vergebat ab Eclipticâ in ſeptentrionem; partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in ſolem & redibat à ſole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per ſigna novem, à leonis ſcilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter ſignum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris* deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantùm 40; poſtea verò, motu iterum accelerato, deſcripſit gradus ferè quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum theoriâ Planetarum, & cum accuratis obſervationibus aſtronomicis accuratè congruit, non poteſt non eſſe vera.

Cæterùm trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & caudam veram, quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere *(vid. Tab.)*: ubi ABC denotat trajectoriam cometæ, D ſolem, DE trajectoriæ axem, DF lineam nodorum, GH interſectionem ſphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, I locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, K locum ejuſdem *Nov.* 11, L locum *Nov.* 19, M locum *Dec.* 12, N locum *Dec.* 21, O locum *Dec.* 29, P locum *Jan.* 5 *ſequent.* Q locum *Jan.* 25, R locum *Feb.* 5, S locum *Feb.* 25, T locum *Mar.* 5, & V locum *Mar.* 9. Obſervationes verò ſequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4 & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta, non niſi ſemiſſem gradûs unius longa tubo decempedali viſa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30^{gr}. longa, ſolique directè oppoſita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ

p. 148.



quæ tunc erat in ♏ 9^{gr}. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali alâ, & deſinebat prope ſtellas A, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}^{gr}$. cum latitudine boreali $34\frac{1}{4}^{gr}$. circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero* α, β) deſinens in ♑ 26^{gr}. 43′, cum latitudine boreali 38^{gr}. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longè ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4^{gr}. cum latitudine boreali 42^{gr}. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, horâ 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hâc ſtellâ ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à ſtellâ illâ 2^{gr}. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22^{gr}. cum latitudine boreali 61^{gr}. Et hinc longa erat cauda 70^{gr}. circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat ferè ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans à β & *Schedir*, & diſtantiam ab utrâque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24^{gr}. cum latitudine $47\frac{1}{2}^{gr}$. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54^{gr}; ideoque deſinebat in ♉ 19^{gr}. cum latitudine 35^{gr}. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat 40^{gr}; curva autem erat, & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum, & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſimâ deſinebat è regione ſtellæ χ in latere *Perſei*. Diſtantia termini caudæ à circulo ſolem & cometam jungente erat 3^{gr}. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr}$. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum

6 vel 7; & nocte unâ & alterâ ſequente, ubi cœlum valdè ſerenum erat, luce tenuiſſimâ & ægerrimè ſenſibili attingebat longitudinem graduum duodecim, & paulo ultrà. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppoſitione ſolis boream verſus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aſpexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. ſe caudam ad longitudinem graduum 12 vidiſſe ſcribit. *Feb.* 25 & deinceps Cometa ſine caudâ apparuit.

Orbem jam deſcriptum ſpectanti, & reliqua Cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter conſtabit, quòd corpora Cometarum ſunt ſolida, compacta, fixa ac durabilia ad inſtar corporum Planetarum. Nam ſi nihil aliud eſſent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce, in tranſitu ſuo per viciniam Solis, ſtatim diſſipari debuiſſet. Eſt enim calor Solis ut radiorum denſitas, hoc eſt, reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à Sole. Ideoque cùm diſtantia Cometæ à centro Solis *Decemb.* 8. ubi in Perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam Terræ à centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æſtivi apud nos ut 1000000 ad 36, ſeu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major, quàm calor quem terra arida concipit ad æſtivum Solem, ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi rectè conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud Cometam in Perihelio verſantem ex radiis ſolaribus concipere poſſet, quaſi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in Perihelio ſuo calorem immenſum ad Solem concepit, & calorem illum diutiſſimè conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis, digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius, in aëre conſiſtens, vix amitteret. Globus autem major calorem diutiùs conſervaret in ratione diametri, propterea quòd ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor eſt pro quantitate materiæ

teriæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem*, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quòd duratio caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quàm ea diametri: & optârim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porro notandum eſt quòd Cometa menſe *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longè majorem & ſplendidiorem quàm antea menſe *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è Cometis oriuntur ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor, quòd cauda nihil aliud ſit quàm vapor tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterùm de Cometarum Caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe Solis, per tranſlucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis, in progreſſu ipſius à capite Cometæ in Terram; vel denique nubem eſſe, ſeu vaporem, à capite Cometæ jugiter ſurgentem, & abeuntem in partes à Sole averſas. Opinio prima eorum eſt, qui nondum imbuti ſunt ſcientiâ rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: ideoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius eſt, & ægriùs ſentitur: in Cœlis autem ſine materiâ reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum, luce Solis illuſtratum, uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum, diſtinctè ad nos tranſmiſſa, demonſtrat Medium cœleſte nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe,

* Rectius ut opinor diebus 20000000.

id,

id, quoniam rariſſimè contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones, tum oculorum, tum Aëris tremuli, referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt, quòd ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſat: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos, ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat, quòd Caudæ non ſoleant videri in Cometis, cùm eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: ſciendum eſt, quòd lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: Cometæ autem ſæpè caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valdè obtuſa. Sic enim Cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat, ſplendore notabili, uſque ad gradus 40, 50, 60 & 70 longitudinis & ultrà: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantùm magnitudinis; cauda verò, luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili, longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultrà: ut ſuprà dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10, ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa, in iiſdem cœli regionibus, in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa anni 1680 *Decemb.* 28. horâ $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, verſabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$, cum latitudine boreali $28^{gr}. 6'$, Sole exiſtente in ♑ $18^{gr}. 26'$. Et cometa anni 1577, *Dec.* 29 verſabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$ cum latitudine boreali $28^{gr}. 40'$, Sole etiam exiſtente in ♑ $18^{gr}. 26'$ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione

poſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri, & in regiones à Sole averſas aſcendere, confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quòd in planis orbium Cometarum, per Solem tranſeuntibus, jacentes deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quòd ſpectatori, in his planis conſtituto, apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propiùs accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quòd caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quòd curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quòd deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque ideo quòd cauda, convexo ſui latere, partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quòd caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores, & limite minùs indiſtincto terminatæ, quàm ad concava. Pendent igitur phænomena Caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectâ petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deferit, à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit, ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in viciniâ Solis, & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate

De Mundi Systemate

incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſiùs reflectet, & limite minùs indiſtincto terminabitur. De Caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hîc nihil adjicio; propterea quòd vel à mutationibus Aeris noſtri, & motibus nubium, caudas aliquâ ex parte obſcurantium, oriantur; vel fortè à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari (i).

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate Aeris noſtri. Nam Aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus, quàm Aqua ejuſdem ponderis; ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem Aëris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò, per regulam multis experimentis confirmatam, quòd compreſſio Aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quódque gravitas ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Terræ, computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. 2. ineundo, inveni quòd Aer, ſi aſcendatur à ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quàm apud nos in ratione longè majori, quàm ſpatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus Aeris noſtri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine ſemediametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones uſque ad ſphæram Saturni, & longè ultra. Proinde cùm Aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma, ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quàm ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altiùs aſcendat, debebit cauda eſſe quàm rariſſima. Et quamvis ob longè craſſiorem Cometarum atmoſphæram, magnamque corporum gra-

(i) De Mund. Syſt. § 67 & 70.

vitationem

vitationem Solem verſus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in ſe mutuò, fieri poſſit ut Aer in ſpatiis cœleſtibus, inque Cometarum caudis, non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè ſufficere, ex hâc computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudinè ſuâ paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat, & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum craſſitudinem, luce pariter ſolari illuſtratam, aſtra minima ſine claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quàm Aeris noſtri in tenebroſo cubiculo, latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis (k).

LIBER TERTIUS.

Quo temporis ſpatio vapor à capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci ferè poteſt ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi rectâ aſcendat à Sole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectâ aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſûs ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à lineâ caudæ divergat. Hoc pacto inveni quòd vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat à capite ante *Dec.* 11, ideoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore Perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio, in viciniâ Solis, celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiu apparuit, ex vapore ferè omni conſtabat, qui à tempore Perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non priùs evanuit, quàm ob nimiam ſuam tam à Sole illuſtrante quàm ab oculis noſtris diſtantiam vi-

(k) De Mund. Syſt. § 68.

De Mundi Systemate deri deſiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum, quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum, quem habuere ſub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrimè peragunt, ac diutiſſimè conſervant.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum, & progreſſum in partes à Sole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à ratione prorſus alienum, non obſtante quòd ſubſtantiæ craſſæ impeditiſſimis in regionibus noſtris à radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quàm graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu Aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii ſolares non agitant Media, quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa, calore ſibi communicato, rarefiet; & ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam, quâ prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes, ex quibus cauda componitur. Ad aſcenſum vaporum conducit etiam, quòd hi gyrantur circa Solem, & eâ actione conantur à Sole recedere: at Solis Atmoſphæra, & materia cœlorum, vel planè quieſcit, vel motu ſuo quem à Solis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſûs caudarum in viciniâ Solis, ubi orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & eâ ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt,

conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur, & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet, ut caudæ poſtea decidant à capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadent, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quo minùs caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque, facillimè accipiant, & poſtea liberrimè ſervent ([l]).

Caudæ igitur, quæ in Cometarum Periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde, poſt longam annorum ſeriem, cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubinde in Periheliis Cometarum illorum, qui ad uſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit, ac dilatatur. Quâ ratione fit, ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quàm juxta caput Cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem, & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi, & cum eorum Atmoſphæris miſceri, rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omninò requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſè ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & Terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur, & in Terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò

([l]) De Mund. Syſt. § 69.

De Mundi Systemate

ninò creſcunt, dein magnâ ex parte in Terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ indies augetur; & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuò decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor Spiritum illum, qui Aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipuè venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem excurrendo in caudas, diminuuntur; &, eâ certe in parte quæ Solem reſpicit, anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum à Sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modò ad ſolem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ, de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ diſtantiis obſcurius apparuit poſt Perihelium ſuum quàm antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigienſi*, *Novem.* 19, Cometa hicce luce ſuâ quantumvis plumbeâ & obtuſâ, æquabat Spicam Virginis, & clariùs micabat quàm poſtea. Et *Montenaro Nov.* 20. ſt. vet. Cometa apparebat major ſtellis primæ magnitudinis, exiſtente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ, qui menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quòd materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur, quòd capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſcura & exigua. Nam anno 1668 *Mart.* 5. ſt. nov. horâ ſeptimâ veſpertinâ *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo

nimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Luſitaniâ* quartam ferè cœli partem (id eſt, gradus 45) occupâſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt, quòd caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et in Chronico *Saxonico* ſimilis legitur cometa anni 1106, *cujus ſtella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex eâ exivit valdè clarus, & quaſi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio menſis *Februarii*, ac deinceps circa veſperam, ad occaſum Solis brumalem. Inde verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno, ab horâ tertiâ* [rectiùs ſextâ] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens*. Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quòd ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente verò die quantum potuit viſum eſt. Nam quàm minimâ fieri poteſt diſtantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cùm* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt, ad 60^{gr}.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* [An. 4. Olymp. 101.] *& aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis ſolaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare, vel paulo ſuperare, videbatur; ſed majores apparuere Cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem, vel etiam Lunam æquâſſe traduntur.

Diximus

De Mundi Systemate

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in orbibus valdè eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis minores eſſe ſolent, qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur; ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propiùs accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne Solem attractione ſuâ nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. Orbium verò tranſverſas diametros, & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iiſdem orbibus, poſt longa temporum intervalla, redeuntium, determinanda reliquo. Interea huic negotio Propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

PROP. XLII. PROB. XXII.

Inventam Cometæ Trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Aſſumatur poſitio plani Trajectoriæ, per Propoſitionem ſuperiorem inventa; & ſeligantur tria loca Cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quàm maximè diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longè à Perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in aſſumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. inſtitutas, deſcribatur ſectio conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventâ, deſcribi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut ſuprà: deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

Oper.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad I ut A ad B, & G ad I ut D ad E, & g ad I ut d ad e, & γ ad I ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & − probè obſervatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut ſit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $2T - 2S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et ſi in operatione primâ I deſignet inclinationem plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem nodi alterutrius; erit $I + nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo nodi. Ac denique ſi in operatione primâ, ſecundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ deſignent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem latera tranſverſa reſpectivè; erit $R + mr - mR + n\varrho - nR$ verum latus rectum, & $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ verum latus tranſverſum trajectoriæ, quam Cometa deſcribit. Dato autem latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum cometæ. Q. E. I.

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera tranſverſa, haud ſatis accuratè determinabuntur, niſi per collationem Cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures Cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem Cometam, in eodem orbe revolventem. Et tum demum, ex revolutionum temporibus, dabuntur orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ ſunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypotheſi quòd ſint Parabolicæ. Nam hujuſmodi Trajectoriæ cum phænomenis ſemper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ Cometæ anni 1680, quam cum obſervationibus ſuprà contuli, ſed etiam ex eâ Cometæ illius inſignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio*

DE MUNDI SYSTEMATE

obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, ſed minùs accuratè. Ex iiſdem obſervationibus *Halleius* noſter loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis ſic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum aſcendentem in ♊ 21^{gr}. 13′. 55″; Inclinationem orbitæ ad planum Eclipticæ 21^{gr}. 18′. 40″; diſtantiam Perihelii à Nodo in orbitâ 49^{gr}. 27′. 30″; Perihelium in ♌ 8^{gr}. 40′. 30″ cum latitudine auſtrinâ heliocentricâ 16^{gr}. 1′. 45″; Cometam in Perihelio *Novem.* 24^{d}. 11^{h}. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13^{h}. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri; & latus rectum Parabolæ 410286, exiſtente mediocri Terræ à Sole diſtantiâ 100000. Quàm probè loca Cometæ in hoc orbe computata congruunt cum obſervationibus, patebit ex Tabulâ ſequente ab *Halleio* ſupputatâ.

Temp. Appar. *Genadi*, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.		Loca obſervata.		Locacomputata in Orbe.
		gr. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″
Decemb. 3[d].18[h].29½	à Corde Leonis à Spicâ Virginis	46.24.20 22.52.10	Long. ♎ Lat. auſt.	7. 1. 0 21.39. 0	♎ 7. 1.29 21.38.50
4.18. 1½	à Corde Leonis à Spicâ Virginis	46. 2.45 23.52.40	Long. ♎ Lat. auſt.	16.15. 0 22.24. 0	♎ 6.16 5 22.24. 0
7.17.48	à Corde Leonis à Spicâ Virginis	44.48. 0 27.56.40	Long. ♎ Lat. auſt.	3. 6. 0 25.22. 0	♎ 3. 7.33 25.21 40
17.14.43	à Corde Leonis ab Hum. Orionis dext.	53.15.15 45.43.30	Long. ♌ Lat. auſt.	2.56. 0 49.25. 0	♌ 2.56. 0 49.25. 0
19. 9.25	à Procyone à Lucid Mandib. Ceti	35.13.50 52.56. 0	Long. ♊ Lat. auſt.	28.40.30 45.48. 0	♊ 28.43 0 45.46. 0
20. 9.53½	à Procyone à Lucid. Mandib. Ceti	40.49. 0 40. 4. 0	Long. ♊ Lat. auſt.	13. 3. 0 39.54. 0	♊ 3. 5. 0 39.53. 0
21. 9. 9½	ab Hum. dext. Orionis à Lucid Mandib. Ceti	26.21.25 29.28. 0	Long. ♊ Lat. auſt.	2.16. 0 23.41. 0	♊ 2.18 30 33.39.40
22. 9. 0	ab Hum. dext. Orionis à Lucid. Mandib. Ceti	29.47. 0 20.29.30	Long. ♉ Lat. auſt.	24.24. 0 27.45. 0	♉ 24.27. 0 27 46. 0
26. 7.58	à Lucidâ Arietis ab Aldebaran	23.20. 0 26.44. 0	Long. ♉ Lat. auſt.	9. 0. 0 12.36. 0	♉ 9 2.28 12.34 13
27. 6.45	à Lucidâ Arietis ab Aldebaran	20.45. 0 28.10. 0	Long. ♉ Lat. auſt.	7. 5.40 10.23. 0	♉ 7. 8.45 10.23.13
28. 7.39	à Lucidâ Arietis à Palilicio	18 29. 0 29.37. 0	Long. ♉ Lat. auſt.	5 24.45 8.22.50	♉ 5 27 52 8.23.37
31. 6.45	à Cing. Androm. à Palilicio	30.48.10 32.53.30	Long. ♉ Lat. auſt.	2. 7.40 4.13. 0	♉ 2. 8.20 4.16.25
Jan. 1665. 7. 7.37½	à Cing. Androm. à Palilicio	25.11. 0 37.12.25	Long. ♈ Lat. bor.	28.24.47 0.54 0	♈ 28.24. 2 0.53. 0
13. 7. 0	à capite Androm. à Palilicio	28. 7.10 38.55.20	Long. ♈ Lat. bor.	27. 6.54 3. 6.50	♈ 27. 6.39 3. 7.40
24. 7.29	à Cing. Androm. à Palilicio	20.32.15 40. 5. 0	Long. ♈ Lat. bor.	26.29.15 5.25.50	♈ 26.28.50 5.26. 0
Feb. 7. 8. 37			Long. ♈ Lat. bor.	27. 4.46 7. 3.29	♈ 27.24 55 7. 3.15
22. 8.46			Long. ♈ Lat. bor.	28.29.46 8.12.36	♈ 28 29.58 8.10.25
Mar. 1. 8.16			Long. ♈ Lat. bor.	29.18.15 8.38.26	♈ 29 18.20 8.36.12
7. 8.37			Long. ♉ Lat. bor.	0. 2.48 8.56.30	♉ 0. 2.42 8.56.56

De Mundi Systemate

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis, quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28^{gr}. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7^{gr}. 8′. 58″. Secunda arietis erat in ♈ 29^{gr}. 17′. 18″ cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 16″. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo A, erat in ♈ 28^{gr}. 24′. 45″ cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 33″. Cometa verò *Feb.* 7^{d}. 7′. 30″ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* 7^{d}. 8′. 37″ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & A rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ à ſtellâ γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & A, id eſt 1^{gr}. 19′. 46″ in circulo magno, atque ideo ea erat 1^{gr}. 20′. 46″ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1^{gr}. 20′. 26″, manebit longitudo Cometæ ♈ 27^{gr}. 9′. 49″. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione Cometam poſuit in ♈ 27^{gr}. 0′ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26^{gr}. 59′. 24″. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27^{gr}. 4′. 46″. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem Cometæ jam poſuit 7^{gr}. & 4′ vel 5′ boream verſus. Eandem rectiùs poſuiſſet 7^{gr}. 3′. 29″, exiſtente ſcilicet differentiâ latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & A.

Feb. 22^{d}. 7^{h}. 30′ *Londini*, id eſt *Feb.* 22^{d}. 8^{h}. 46′ *Gedani*, diſtantia Cometæ à ſtellâ A, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam A & primam arietis, ſeu 15′. 57″. Et diſtantia cometæ à lineâ jungente ſtellam A & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4′. Ideoque Cometa erat in ♈ 28^{gr}. 29′. 46″, cum lat. bor. 8^{gr}. 12′. 36″.

Mart. 1^{d}. 7^{h}. 0′ *Londini*, id eſt *Mart.* 1^{d}. 8^{h}. 16′ *Gedani*, Cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1^{gr}. 33′, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia Cometæ à ſecundâ arietis erat 8′. 16″ ſecundum *Hookium*, vel 8′. 5″ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa verò ſecundum *Gottignies* jam modò prætergreſſus fuerat ſecundam arietis, quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id eſt 1′. 35″ circiter

citer (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta 1′. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo Cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″. LIBER TERTIUS.

Mart. 7d. 7h. 30′ *Pariſiis* (id eſt *Mart.* 7d. 8h. 37′ *Gedani*) ex obſervationibus *Auzoutii* diſtantia Cometæ à ſecundâ arietis æqualis erat diſtantiæ ſecundæ arietis à ſtellâ A, id eſt 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & ſecundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. Ideoque Cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex ſchemate obſervationum *Auzoutii*, quod *Petitus* conſtruxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54′. Sed ſculptor viam cometæ ſub finem motûs ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in ſchemate obſervationum *Auzoutii*, à ſe conſtructo, incurvationem irregularem correxit, & ſic latitudinem cometæ fecit eſſe 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere poteſt 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Viſus etiam fuit hic Cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′, cum lat. bor. 9gr. 3½′ circiter.

Apparuit hic Cometa menſes tres, ſignaque ferè ſex deſcripſit, & uno die gradus ferè virginti confecit. Curſus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, theoria à principio ad finem cum obſervationibus non minus accuratè congruit, quàm theoriæ Planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent; ut inſpicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta ſecunda ab angulo inter nodum aſcendentem & perihelium, ſeu conſtituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) parallaxis annua inſignis fuit; & inde demonſtratur motus annuus Terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano Eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23; inclinatio orbitæ ad Eclipticam 83gr. 11′; Perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; diſtantia Perihelia à Sole 56020, exiſtente radio orbis magni

2 100000,

100000, & tempore perihelii *Julii* 2^d^. 3^h^. 50′. Loca autem Cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Comp. Lat. Bor.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37. 4	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	−0.39	−0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Auſtr.	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Auſtr.	−3.48	−2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.53	11. 7.12	5.16.50	−0. 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21^gr^. 16′. 30″; Inclinatio orbitæ ad planum Eclipticæ 17^gr^. 56′. 0″; Perihelium in ♒ 2^gr^. 52′. 50″; Diſtantia Perihelia à Sole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000; et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4^d^. 7^h^. 39′. Loca verò ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis.	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	−0.12	+0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0. 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	−0.47	+2.26
22. 8. 8	9.33.35	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	−0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+1.22	−0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	−0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum Cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus Nodus aſcendens (computante D. *Bradleo*, Aſtronomiæ apud *Oxonienſes* Profeſſore *Saviliano*) erat in ♈ 14^{gr}. 16′; Inclinatio orbitæ ad planum Eclipticæ 49^{gr}. 59′; Perihelium in ♉ 12^{gr}.15′.20″; Diſtantia Perihelia à Sole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000; & tempore æquato Perihelii *Septem.* 16^{d}. 16^{h}. 10′. Loca verò Cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* obſervatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1723 Temp. Æquat.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Com. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d.h. ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9.8. 5	♒ 7.22.15	5. 2. 0	♒ 7.21.26	5. 2.47	+49	−47
10.6.21	6.41.12	7.44.13	6.41.42	7.43.18	−50	+55
12.7.22	5.39.58	11.55. 0	5.40.19	11.54.55	−21	+ 5
14.8.57	4.59.49	14.43.50	5. 0.37	14.44. 1	−48	−11
15.6.35	4.47.41	15.40.51	4.47.45	15.40.55	− 4	− 4
21.6.22	4. 2.32	19.41.49	4. 2.21	19.42. 3	+11	−14
22.6.24	3.59. 2	20. 8.12	3.59.10	20. 8.17	− 8	− 5
24.8. 2	3.55.29	20.55.18	3.55.11	20.55. 9	+18	+ 9
29.8.56	3.56.17	22.20.27	3.56.42	22.20.10	−25	+17
30.6.20	3.58. 9	22.32.28	3.58.17	22.32.12	− 8	+16
Nov. 5.5.53	4.16.30	23.38.33	4.16.23	23.38. 7	+ 7	+26
8.7. 6	4.29.36	24. 4.30	4.29.54	24. 4.40	−18	−10
14.6.20	5. 2.16	24.48.46	5. 2.51	24.48.16	−35	+30
20.7.45	5.42.20	25.24.45	5.43.13	25.25.17	−53	−32
Dec. 7.6.45	8. 4.13	26.54.18	8. 3.55	26.53.42	+18	+36

De Mundi Systemate

His exemplis abundè ſatis manifeſtum eſt, quòd motus Cometarum per Theoriam à nobis expoſitam non minùs accuratè exhibentur, quàm ſolent motus Planetarum per eorum theorias. Et propterea orbes Cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum Cometæ, in quolibet orbe revolventis, tandem ſciri, & tum demum orbium Ellipticorum latera tranſverſa, & Apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20^{gr}. 21′; Inclinatio plani orbis ad planum Eclipticæ erat 17^{gr}. 2′; Perihelium erat in ♒ 2^{gr}. 16′; & diſtantia Perihelia à Sole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* 16^{d}. 3^{h}. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe Cometæ, qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa ſpatio annorum 75, & axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}: 75 \times 75$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia Aphelia Cometæ hujus à Sole, erit ad diſtantiam mediocrem Terræ à Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt, ſi Cometa ſpatio annorum ſeptuaginta quinque in hoc orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur, & altiùs aſcendere.

Cæterùm Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum à Sole diſtantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in ſe mutuò nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non eſt expectandum, ut Cometa idem in eodem orbe, & iiſdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quàm quæ à cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco, more Planetarum, ſed inde migrent, & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis ſuis, ubi tardiſſimè moventur, quàm longiſſimè diſtent ab invicem, & ſe mutuò quàm minimè trahant. Quâ de cauſâ Cometæ,

tæ, qui altiùs deſcendunt, ideoque tardiſſimè moventur in Aphe- liis, debent altiùs aſcendere. LIBER TERTIUS.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat à Sole in Perihelio ſuo quàm parte ſextâ diametri Solis (m); & propter ſummam velocitatem in viciniâ illâ, & denſitatem aliquam Atmoſphæræ Solis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad Solem accedere: & ſingulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio, ubi tardiſſimè movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari poteſt, & ſubinde in Solem incidere. Sic etiam ſtellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro ſtellis novis haberi. Hujus generis ſunt ſtellæ fixæ, quæ ſubito apparent, & ſub initio quàm maximè ſplendent, & ſubinde paulatim evaneſcunt. Talis fuit ſtella in cathedrâ Caſſiopeiæ, quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, luſtrando illam cœli partem nocte ſerenâ minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus ſplendidiorem, & luce ſuâ vix cedentem Veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejuſdem menſis ubi maximè ſplenduit; & ex eo tempore paulatim decreſcentem, & ſpatio menſium ſexdecim evaneſcentem obſervavit. Menſe *Novembri*, ubi primùm apparuit, Venerem luce ſuâ æquabat. Menſe *Decembri*, nonnihil diminuta, Jovem æquare videbatur. Anno 1573, menſe *Januario* minor erat Jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evaſit æqualis. Menſe *Aprili* & *Maio*, ſtellis ſecundæ magnitudinis; *Junio*, *Julio* & *Auguſto*, ſtellis tertiæ magnitudinis; *Septembri*, *Octobri* & *Novembri*, ſtellis quartæ; *Decembri*, & anni 1574 menſe *Januario*, ſtellis quintæ; & menſe *Februario* ſtellis ſextæ magnitudinis æqualis videbatur, & menſe *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac ſplendidus, poſtea flavus, & anni 1573 menſe *Martio* rutilans inſtar Martis aut ſtellæ Aldebaran; *Maio* autem albitudinem ſublividam induxit, qualem in Saturno cernimus, quem colorem uſque in finem ſervavit, ſemper tamen obſcurior facta. Talis etiam fuit ſtella in dextro pede Serpentarii, quam *Kepleri* diſcipuli anno 1604, die 30 *Septembris* ſt. vet. ap-

(m) De Mund. Syſt. § 75, 76, 77.

parere cœpiſſe obſervârunt, & luce ſuâ ſtellam Jovis ſuperâſſe, cùm nocte præcedente minimè apparuiſſet. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtellâ novâ, ſupra modum ſplendente, *Hipparchus* ad Fixas obſervandas, & in catalogum referendas, excitatus fuiſſe dicitur. Sed Fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſuâ fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex Sole & ſtellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in Atmoſphæras Planetarum, & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos; & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypothesis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unuſquiſque radio ad Solem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole. Ut periodica Planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicatâ diſtantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conſerventur, & tranquillè natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus Vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus Cometarum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi Vortices tollantur.

Projectilia, in Aere noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato Aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat; ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc Vacuo

cuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſupra Atmoſphæram Terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrimè moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis, ſecundum leges ſuprà expoſitas, perpetuò revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitus acquirere per leges haſce minimè potuerunt. Liber Tertius.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eâdem motûs directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eâdem motûs directione, in planis orbium Planetarum quamproximè. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis Mechanicis; ſiquidem Cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur: quo motûs genere Cometæ per orbes Planetarum celerrimè & facillimè tranſeunt; & in Apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutiùs morantur, quàm longiſſimè diſtant ab invicem, ut ſe mutuò quàm minimè trahant. Elegantiſſima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non niſi conſilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi ſtellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum, hæc omnia, ſimili conſilio conſtructa, ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cùm lux Fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux Solis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne Fixarum ſyſtemata per gravitatem ſuam in ſe mutuò cadant, hic eadem immenſam ab invicem diſtantiam poſuerit.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, ſed ut univerſorum Dominus. Et propter dominium ſuum, Dominus Deus * Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam Deus eſt vox relativa, & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio Dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus Deus eſt Anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt Ens æternum, infinitum, abſolutè perfectum: ſed Ens, utcunque perfectum, ſine dominio, non eſt Dominus Deus. Dicimus enim Deus meus, Deus veſter, Deus *Iſraelis*, Deus deorum, & Dominus dominorum: ſed non dicimus Æternus meus, Æternus veſter, Æternus *Iſraelis*, Æternus deorum; non dicimus Infinitus meus, vel Perfectus

* Id eſt Imperator univerſalis.

fectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox Deus paſſim † ſignificat Dominum: ſed omnis Dominus non eſt Deus. Dominatio Entis ſpiritualis Deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur Deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & Infinitus, Omnipotens & Omniſciens; id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique; & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cùm unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam, nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivè in duratione, co-exiſtentes in ſpatio, neutræ in Perſonâ hominis, ſeu principio ejus cogitante; & multo minùs in ſubſtantiâ cogitante Dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem Deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantiâ ſubſiſtere non poteſt. In ipſo ‡ continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil patitur ex corporum motibus; illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentiâ Dei. Deum ſummum neceſſariò exiſtere in confeſſo eſt: et eâdem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam

† *Pocockus* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ* *du* (& in caſu obſiquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc cenſu principes vocantur dii, *Pſalm.* lxxxiv. 6. & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſò propter defectum dominii.

‡ Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Natura deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius* Georgic. *lib.* 4. *v.* 220, & Æneid. *lib* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio. *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri, ut *Paulus* in Act. xvii. 27, 28. *Johannes* in Evang. xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7, 8, 9. *Solomon* 1 Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12, 13, 14. *Jeremias* xxiii. 23, 24. Fingebant autem Idololatræ Solem, Lunam, & Aſtra, animas hominum & alias Mundi partes eſſe partes Dei ſummi, & ideò colendas, ſed falſò.

ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus Deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorſus deſtituitur; ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minimè cognoſcimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores; audimus tantùm ſonos; tangimus tantùm ſuperficies externas; olfacimus odores ſolos; & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nullâ actione reflexâ cognoſcimus; & multo minùs ideam habemus ſubſtantiæ Dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi; & Deus ſine dominio, providentiâ, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quàm Fatum & Natura. A cæcâ neceſſitate metaphyſicâ, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate Entis, neceſſariò exiſtentis, ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem Deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de Deo à rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis diſſerere, ad Philoſophiam Naturalem pertinet.

Hactenus Phænomena cælorum & maris noſtri per vim gravitatis expoſui; ſed cauſam gravitatis nondum aſſignavi. Oritur utique hæc vis à cauſâ aliquâ, quæ penetrat ad uſque centra Solis & Planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum, in quas agit (ut ſolent cauſæ Mechanicæ) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicatâ ratione diſtantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in ſingulas Solis particulas; & recedendo à Sole decreſcit accuratè in duplicatâ ratione diſtantiarum ad uſque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifeſtum eſt, & ad

De Mundi Systemate

ad uſque ultima Cometarum Aphelia, ſi modò Aphelia illà quieſcant. Rationem verò harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *Hypotheſis* vocanda eſt; & hypotheſes, ſeu Metaphyſicæ, ſeu Phyſicæ, ſeu Qualitatum Occultarum, ſeu Mechanicæ, in *Philoſophiâ Experimentali* locum non habent. In hâc Philoſophiâ Propoſitiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum, & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quòd Gravitas reverâ exiſtat, & agat ſecundum leges à nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quàm attrahendo corpuſcula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Senſatio omnis excitatur; & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus Spiritûs, per ſolida nervorum capillamenta, ab externis ſenſuum organis ad cerebrum, & à cerebro in muſculos, propagatis. Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritûs accuratè determinari & monſtrari debent.

FINIS PRINCIPIORUM.

DE
MUNDI SYSTEMATE
LIBER.

DE

MUNDI SYSTEMATE

LIBER.

FIXAS in ſupremis mundi partibus immotas perſiſtere, & Planetas his inferiores circa Solem revolvi, Terram pariter moveri curſu annuo, diurno verò circa axem proprium, & Solem, ceu focum Univerſi, in omnium centro quieſcere, antiquiſſima fuit Philoſophantium ſententia. Sic enim ſenſerant olim *Philolaus*, *Ariſtarchus Samius*, *Plato* ætate maturiore, *Pythagoreorum* turba (a), & his antiquior *Anaximander*, & *Romanorum* Rex ille ſapientiſſimus *Numa Pompilius*. Is in ſymbolum Orbis rotundi & ignis Solaris in centro, templum erexit *Veſtæ*, formâ rotundâ, & ignem perpetuum in medio aſſervari ſanxit. Ab *Ægyptiis* autem, aſtrorum antiquiſſimis obſervatoribus, propagatam eſſe hanc ſententiam verſimile eſt. Etenim ab illis, & à gentibus conterminis, ad *Græcos*, gentem magis Philologicam quàm Philoſophicam,

Cœlos eſſe fluidos.

Archimedes in Arenario. Ariſtot. lib. 2. de cœlo. Plutarch. lib. 3. de placitis Philoſ. & in Numâ.

(a) De antiquiſſimis Pythagoreis gravem mihi dubitationem movet Timæus Locrus, qui in libro περὶ ψυχᾶς κόσμω Terram diſertiſſimè conſtituit in centro Mundi: ſupra hanc Lunam; ſupra Lunam Solem, anni ſpatio circulum ſuum abſolventem. Hunc æquis ferè paſſibus comitari dicit Mercurium et Venerem. Tum Planetis tribus reliquis, Marti, Jovi et Saturno, ſuam cuique velocitatem, ſuum converſionis ſpatium tribuit. Omnes autem intra ſphæram Primi Mobilis contineri ait, cujus vertigine, cum alia omnia inferiora, tum Solem ipſum abripi.

cam, Philoſophia omnis antiquior juxtà & ſanior manâſſe videtur: & ſacra *Veſtæ* ingenium *Ægyptiorum* ſapiunt, myſteria, captum vulgi ſuperantia, ſacris ritibus & Hieroglyphicis pingentium. Subinde docuerunt *Anaxagoras*, *Democritus*, & alii nonnulli, Terram in centro mundi immotam ſtare, & aſtra omnia in occaſum aliqua celeriùs alia tardiùs moveri, idque in ſpatiis liberrimis. Namque orbes ſolidi poſtea ab *Eudoxo*, *Calippo*, *Ariſtotele*, introducti ſunt; declinante indies Philoſophiâ primitus introductâ, & novis *Græcorum* commentis paulatim prævalentibus. Cum his orbibus malè conſiſtunt Phænomena Cometarum. Hos, inter corpora cœleſtia à multis olim numeratos, *Chaldæi*, rerum Aſtronomicarum peritiſſimi, pro ſtellis errantibus habuere (b): quaſi ſemel ſingulis revolutionibus, in orbium valdè excentricorum partes infimas deſcendendo, ſe nobis per vices conſpiciendos exhiberent. Eoſdem poſtea, in regiones infra Lunam neceſſariò detruſit iſta orbium ſolidorum hypotheſis; & iis iiſdem viciſſim per nuperas Aſtronomorum obſervationes in cœlos Lunâ ſuperiores reſtitutis, confracti ſunt illi orbes, & ex æthere deturbati.

Principium motûs circularis in ſpatiis liberis.

2. Quibus vinculis Antiqui Planetas in ſpatiis liberis retineri, deque curſu rectilineo perpetuò retractos, in orbem regulariter agi docuere, non conſtat. In hujus rei explicationem orbes ſolidos excogitatos fuiſſe opinor. Philoſophi recentiores aut vortices eſſe volunt, ut *Keplerus* & *Carteſius*, aut aliud aliquod ſive impulſûs ſive attractionis principium, ut *Borellus*, *Hookius*, & ex noſtratibus alii. Ex motûs lege primâ certiſſimum eſt vim aliquam requiri. Nobis propoſitum eſt quantitatem & proprietates ipſius eruere, atque effectus in corporibus movendis inveſtigare mathematicè: proinde ne ſpeciem ejus hypotheticè determinemus, diximus ipſam generali nomine centripetam, quæ tendit in centrum aliquod; vel etiam, ſumpto nomine de centro, circumſolarem, quæ tendit in Solem; circumterreſtrem, quæ in Terram; circumjovialem, quæ in Jovem; & ſic in cæteris.

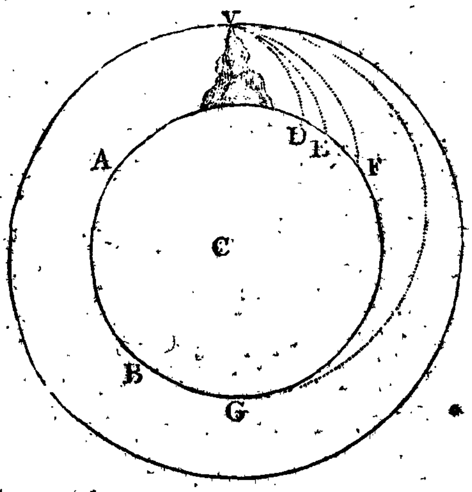
Effectus virium centripetarum.

3. Viribus centripetis Planetas in orbibus certis retineri poſſe, intelligetur ex motibus projectilium. Lapis projectus, urgente gravitate ſuâ, deflectitur de curſu rectilineo, &, curvam lineam in aëre deſcribendo, tandem cadit in terram; ſi motu velociore

(b) Vide Diodor. Sic. Lib. 15. C. 1. et Senecæ Quæſt. Nat. Lib. 7.

projiciatur,

projiciatur, pergit longiùs. Augendo velocitatem, fieri poſſet, ut arcum deſcriberet milliaris unius, duorum, quinque, decem, centum, mille; ac tandem ut, pergendo ultra terminos Terræ, non amplius in terram caderet. Deſignet AFB ſuperficiem Terræ; C centrum ejus; & VD, VE, VF, lineas curvas, quas projectile de montis præalti vertice V, ſecundum lineas horizonti parallelas, auctis cum velocitatis gradibus, ſucceſſivè emiſſum deſcribat. Et ne aëris reſiſtentia, quâ motus cœleſtes vix retardantur, in computum veniat, fingamus hunc omnem tolli, vel ſaltem nil reſiſtere. Et eâdem ratione quâ corpus velocitate minore deſcribit arcum minorem VD, & majore arcum majorem VE, & auctâ adhuc velocitate pergit longiùs ad F, & longiùs ad G; idem tandem, ſi augeatur ſemper velocitas, ſuperabit totum telluris ambitum, & redibit ad montem, unde fuerat projectum. Cumque area, quam, radio ad centrum terræ ducto, deſcribit, ſit (per Prop. I. Lib. I. Princip. Math.) proportionalis tempori, velocitas ejus in reditu ad montem non minor erit quàm ſub initio: ſervatâ autem velocitate, poteſt idem ſæpiùs eâdem lege revolvi. Imaginemur jam corpora de regionibus altioribus ſecundum lineas horizontales projici; puta de locis milliaria quinque, decem, centum, mille vel plura, totidemve Telluris ſemidiametros, altis; &, pro variâ corporum velocitate, & vi gravitatis in ſingulis regionibus exercitâ, deſcribentur arcus Telluri vel concentrici, vel variè excentrici; inque his trajectoriis pergent corpora ad modum Planetarum cœlos tranſcurrere.



4. Et quemadmodum ex deſcenſu lapidis demiſſi, demonſtrativè colligitur eundem gravitare, neque minùs certum gravitatis indicium eſt perpetua illa projectorum deflexio in terram: ſic omnis omnium in ſpatiis liberis motorum corporum de recto tramite deviatio, & perpetua in locum quemvis deflexio, certiſſimum eſt indicium, vim aliquam extare, quâ corpora undique in locum illum urgentur. Utque ex conceſſâ gravitate neceſſe eſt corpora Certitudo argumenti.

omnia

omnia in his terris inferiora petere; atque adeo, vel rectâ cadere, ſi quieſcentia demittantur, vel de recto tramite perpetuò deflectere in terram, ſi projiciantur obliquè: ita, ex conceſſâ vi in centrum quodcunque tendente, non minùs neceſſarium eſt omnia, in quæ vis illa exercetur, vel rectâ deſcendere ad centrum illud; vel ſi obliquè moveantur, perpetuò de recto tramite in centrum vergere. Quâ autem ratione vires ex motibus, & motus ex viribus colligendi ſunt, copioſè expoſitum eſt in Libris de Motu.

Vires centripetas ad ſingula Planetarum centra tendere.

5. Tendere autem vires centripetas ad corpora Solis, Telluris, & Planetarum, ſic colligo. Gyratur Luna circa Terram noſtram, radiiſque ad ipſius centrum ductis, deſcribit areas temporibus proportionales quàm proximè. Id ex velocitate Lunæ, cum ipſius apparentibus diametris collatâ, certiſſimum eſt: diametro minore, quæ majorem arguit diſtantiam, tardior eſt motus; majore velocior. Motibus magis regularibus gyrantur Satellites Jovis circa Jovem, circulos Jovi concentricos æquabili motu deſcribentes quoad ſenſum. Sic & comes Saturni circa hunc Planetam motu ſatis circulari & æquabili revolvitur, excentricitate vixdum animadverſâ. Venerem & Mercurium circa Solem revolvi, demonſtratur ex eorum phaſibus lunaribus: plenâ facie ſiti ſunt ultra Solem, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem, per diſcum ejus nonnunquam tranſeuntes. Et Venus quidem orbem circularem, Solique concentricum, uniformi motu deſcribit quamproximè. Mercurius autem, motu magis excentrico, ad Solem notabiliter accedit, & inde per vices recedit: ſed velocior ſemper eſt ubi Soli propior, quo fit, ut, radio ad Solem ducto, deſcribat areas temporibus proportionales. Terram denique circa Solem, aut Solem circa Terram, radio intercedente areas deſcribere temporibus exactè proportionales, demonſtratur ex Solis diametro apparente cum ipſius motu apparente collatâ. Hæc ſunt experimenta Aſtronomica: & ex his (per Libri Primi Propoſitiones tres primas & earum Corollaria) conſequens eſt, quòd dentur vires centripetæ, aut accuratè aut ſine errore notabili, ad centra Terræ, Jovis, Saturni, & Solis tendentes. In Mercurio, Venere, Marte, & Planetis minoribus, cùm deſint experimenta, valeat argumentum ex analogiâ.

6. Ex

Vires centripetas decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum à Planetarum centris.

6. Ex Propoſitionis autem quartæ Corollario ſexto conſequitur, quòd hæ vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro Planetæ cujuſque. Nam tempora periodica Satellitum Jovis ſunt inter ſe in ſeſquiplicatâ proportione diſtantiarum à centro hujus Planetæ. In his jam diu notata fuit hæc proportio; eamque tam accuratè obtinere, quàm ſit poſſibile ſenſibus diſcernere, ſignificavit mihi *Flamſtedius* noſter, has diſtantias micrometro & per ſatellitum eclipſes ſæpiùs menſus. Eaſdem, ante inventionem micrometri, *Galilæus*, pergendo ab intimo Satellite ad extimum, definivit eſſe ſemidiametrorum Jovis 6, 10, 16, 28, reſpectivè; *Simon Marius*, 6, 10, 16, 26; *Caſſinus*, 5, 8, 13, 23; *Borellus* magis exactè, $5\frac{2}{3}$, $8\frac{2}{3}$, 14, $24\frac{2}{3}$. Et, poſt inventionem micrometri, *Tounleius*, 5,51. 8,78. 13,47. 24,72; *Flamſtedius* autem, 5,31. 8,85. 13,98. 24,23. & exactiùs per eclipſes 5,578. 8,876. 14,159. 24,903. Sunt autem Satellitum ex obſervationibus *Flamſtedianis* periodica tempora, $1^d. 18^h. 28'. 36''$; $3^d. 13^h. 17'. 54''$; $7^d. 3^h. 59'. 36''$; & $16^d. 18^h. 5'. 13''$: & ex his derivatæ diſtantiæ ut numeri, 5,578. 8,878. 14,168. 24,968. qui cum diſtantiis obſervatione collectis ſatis accuratè congruunt. In Planetis autem circumſolaribus, Mercurio & Venere, proportio illa obtinet accuratiſſimè; quantum hactenus dimenſiones orbitarum, ex obſervationibus melioris notæ, determinârunt Aſtronomi.

Planetas ſuperiores Solem cingere, & radiis ad ipſum ductis areas deſcribere temporibus proportionales.

7. Martem quoque circa Solem revolvi, demonſtratur ex ipſius phaſibus, & proportione diametrorum apparentium. Nam ex phaſi plenâ prope conjunctionem Solis, & gibboſâ in quadraturis, certum eſt, quòd is Solem ambit: & cùm diameter ejus quaſi quintuplo major appareat in oppoſitione Solis quàm in conjunctione, & diſtantia ejus à Terrâ ſit reciprocè ut diameter apparens, erit diſtantia illa quintuplo minor circiter in oppoſitione quàm in conjunctione; at Martis à Sole eadem circiter erit diſtantia, in utroque caſu, cum diſtantiâ ejus in quadraturis, quæ ex phaſi gibboſâ colligitur. Utque Solem æquabili ferè diſtantiâ, Terram valdè inæquabili cingit: ſic etiam, radio ad Solem ducto, deſcribit aream ſatis uniformiter; at radio ad Terram ducto, nunc velox eſt, nunc ſtationarius, nunc retrogradus. Jovem Marte ſuperiorem eſſe, & motu quoque, quoad diſtantiam & areæ deſcriptionem, ſatis æquabili Solem circuire, ſic colligo. In literis

ad

ad me datis ſcripſit *Cl. Flamſtedius*, omnes intimi Satellitis, quas noverat hactenus accuratè obſervatas, Eclipſes cum theoriâ ſuâ, abſque errore duorum in tempore ſcrupulorum primorum, congruere; extimum non multo magis errare, penextimum vix triplo magis; penintimum verò multo magis; ſed minùs tamen à computationibus ſuis diffidere, quàm ſolet Luna à Tabulis vulgaribus: ſe verò per ſolos Satellitum motus medios, & æquationem lucis à *Romero* inventam, Eclipſes computare. Ponamus igitur Theoriam à motu Satellitis extimi, hactenus obſervato, minùs diffidere quàm errore duorum ſcrupulorum primorum: et erit ut Periodus integra dierum 16. 18^{hor}. 5′. 13″, ad tempus 2′, ita circulus integer graduum 360, ad arcum 1′. 48″ (c). Proinde error computi *Flamſtediani*, ad orbitam Satellitis reductus, minor erit quàm 1′. 48″; id eſt longitudo Satellitis, è centro Jovis ſpectati, determinabitur abſque errore 1′. 48″. At longitudo illa, ubi Satelles in medio umbræ verſatur, eadem eſt cum Jovis longitudine heliocentricâ; & propterea hypotheſis quam *Flamſtedius* ſequitur, nempe *Keplero-Copernicæa*, à ſe nuper (quoad motum Jovis) correcta, longitudinem illam rectè exhibet abſque errore 1′. 48″. Hâc longitudine, & notiſſimâ ſemper longitudine geocentricâ, determinatur diſtantia Jovis à Sole: quæ proinde ea ſemper eſt, quam exhibet iſta hypotheſis. Namque maximus ille in longitudine heliocentricâ error, 1′. 48″, inſenſibilis ferè eſt, & planè contemnendus; ſed & ex Satellitis ignotâ excentricitate oriri poteſt. Longitudine autem & diſtantiâ rectè definitis, neceſſe eſt ut Jupiter, radio ad Solem ducto, deſcribat areas eâ lege quam hypotheſis requirit, & propterea tempori proportionales. Idem de Saturno ex hujus affeclâ, per obſervationes *Hugenii* & *Halleji*, colligere licebit; quanquam obſervationum ſeries diuturnior in rei confirmationem & calculum ſatis accuratum deſideretur.

Vim, quâ Planetæ ſuperiores reguntur, non dirigi ad Terram. Eandem dirigi ad Solem.

8. Jupiter igitur, ſiquis hunc ſpectaret à Sole, nunquam appareret retrogradus, nunquam ſtationarius, ut ex Terrâ cernitur, ſed motu ſatis uniformi ſemper progrederetur. Ex motûs apparentis geocentrici inæqualitate ſummâ colligitur, per Propoſitionis tertiæ Corollarium quartum, quòd vis illa, quâ Jupiter deflectere cogitur

(c) Quòd ſi tempus converſionis Satellitis extimi veriùs ſumas $16^d - 16^h - {}'32 - {}''9$, tamen arcus circularis,

cogitur de motu rectilineo, & in orbem revolvitur, non dirigitur ad centrum Terræ. Et idem valet argumentum in Marte & Saturno. Quærendum eſt, per Prop. II & III. & hujus Corollaria, aliud harum virium centrum; circum quod, radiis intercedentibus, æquabilis ſit arearum deſcripto: et hoc eſſe Solem, jam probatum eſt in Marte quidem & Saturno præterpropter, in Jove verò abundè ſatis accuratè. Fingere licet Solem & Planetas vi quâvis aliâ æqualiter, & ſecundum lineas parallelas, urgeri. Verùm tali vi, per Legum Corol. 6. non mutabitur ſitus Planetarum inter ſe; nullus producetur effectus ſenſibilis: nos autem agimus de cauſis effectuum ſenſibilium. Rejiciatur igitur hujuſmodi vis omnis ut precaria, & ad cœlorum phænomena nil ſpectans; & vis omnis reliqua, quâ ſtella Jovis urgetur, tendet, per Propoſitionis tertiæ Corollarium primum, ad centrum Solis.

Vim circumſolarem per omnes Planetarum regiones decreſcere, in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole.

9. Diſtantiæ Planetarum à Sole eædem prodeunt, ſive Terram cum *Tychone*, ſive Solem cum *Copernico*, collocemus in centro ſyſtematis: & veras eſſe has diſtantias, jam probavimus in Jove. In his definiendis *Keplerus* & *Bullialdus* apprimè navarunt operam: unde & cum cœlis meliùs concordant ipſorum Tabulæ. Sunt autem harum diſtantiarum cubi in omnibus Planetis, in Jove inquam & Marte, Saturno & Tellure, æquè ac in Venere & Mercurio, ut quadrata temporum periodicorum; & propterea, per Corol. 6. Prop. IV. vis centripeta circumſolaris decreſcit, per univerſa Planetarum cœla, in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole. In examinandâ hâcce proportione ſumendæ ſunt diſtantiæ mediocres, ſive orbium ſemiaxes tranſverſi (per Prop. XV.) & negligendæ minutiæ, quæ, in definiendis orbibus, ex inſenſibilibus obſervationum erroribus oriri potuerint, quæve cauſis poſt aſſignandis tribuendæ ſunt. Sic incidetur ſemper in proportionem præfinitam exactè. Nam cùm diſtantiæ Saturni, Jovis, Martis, Terræ, Veneris & Mercurii à Sole, ex obſervationibus Aſtronomicis collectæ, ſint inter ſe, juxta computum *Kepleri*, ut numeri 951000, 519650, 152350, 100000, 72400, 38806; juxtaque computum *Bullialdi*, ut numeri 954198, 522520, 152350, 100000, 72398, 38585; eædem ex temporibus periodicis col-

circularis, qui ad integrum circuitum rationem habeat quam ſpatium illud temporis ad ſpatium '2, is amplitudinem '1 – "48 non ſuperabit.

lectæ, ſunt ut numeri 953806, 520116, 152399, 100000, 72333, 38710. Diſtantiæ *Kepleri* & *Bullialdi*, vix differunt ſenſibiliter, & ubi maximè differunt, claudunt inter ſe diſtantias ex *temporibus periodicis collectas*.

Vim circumterreſtrem decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum à Terrâ. Probatur ex hypotheſi quòd Terra quieſcit.

10. *In duplicatâ itidem diſtantiarum proportione vim circumterreſtrem decreſcere, ſic colligo.* Lunæ diſtantia mediocris à centro Terræ eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum*, *Keplerum* in Ephemeridibus, *Bullialdum*, *Hevelium*, & *Ricciolum*, 59; ſecundum *Flamſtedium*, $59\frac{1}{3}$; ſecundum *Vendelinum*, 60; ſecundum *Copernicum*, $60\frac{1}{3}$; ſecundum *Kircherum*, $62\frac{1}{2}$; ſecundum *Tychonem*, $56\frac{1}{2}$: verùm *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ, omninò contra naturam lucis, majores quàm Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem; hoc eſt, quaſi duodecimâ, vel decimâ quintâ, parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi 61 ſemidiametrorum terreſtrium; ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, uti ab Aſtronomis definitum eſt: &, per Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ, corpus, revolvendo in aëre noſtro juxta ſuperficiem Terræ quieſcentis, vi centripetâ, quæ eſſet ad vim eandem in diſtantiâ Lunæ in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro Terræ reciprocè, hoc eſt ut 3600 ad 1; revolutionem, ſublatâ aëris reſiſtentiâ, compleret horâ 1, minutis primis 24, ſecundis 27. Pone ambitum Terræ eſſe pedum *Pariſienſium* 123249600, uti à *Gallis* menſurantibus nuper definitum eſt: & corpus idem, ſublato motu ſuo circulari, & urgente eâdem vi centripetâ ac priùs, deſcriberet cadendo pedes *Pariſienſes* $15\frac{1}{12}$ tempore minuti unius ſecundi. Colligitur hoc ex calculo per Propoſitionem XXXVI. inito, & congruit cum experientiâ. Nam factis Pendulorum experimentis, & computo inde inito, demonſtravit *Hugenius*; quòd corpora, omni illâ cujuſcunque generis vi centripetâ, quâ juxta ſuperficiem Terræ urgentur, deſcendentia, deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes *Pariſienſes* $15\frac{1}{12}$.

Probatur ex Hypotheſi quòd terra movetur.

11. Quòd ſi motus concedatur Terræ, gyretur hæc & Luna, per Legum Corol. 4. & Prop. LVII. circa commune gravitatis centrum

centrum. Et Luna (per Prop. LX.) eodem tempore periodico dierum 27, hor. 7. 43′, vi eâdem circumterreſtri diminutâ in duplicatâ ratione diſtantiæ, revolvetur in orbitâ, cujus ſemidiameter eſt ad ſemidiametrum prioris, hoc eſt ad 60 ſemidiametros terreſtres, ut ſumma corporum Terræ & Lunæ, ad primam duarum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus terræ: hoc eſt, ſi ponamus Lunam, ob mediocrem ſuam diametrum apparentem $31'\frac{1}{2}$, eſſe quaſi quadrageſimam ſecundam partem Terræ, ut 43 ad $\sqrt[3]{\overline{42 \times 43}|^2}$; ſive ut 128 ad 127 circiter: ideoque ſemidiameter hujus orbitæ, hoc eſt diſtantia inter centra Lunæ & Terræ, jam erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut aſſignavit *Copernicus*, non abludentibus obſervationibus *Tychonicis*. In hâc diſtantiâ valet igitur duplicata illa proportio decrementi virium. Augmentum orbitæ ab actione Solis oriundum, ut planè contemnendum neglexi: eo ſubducto, relinquetur vera diſtantia quaſi $60\frac{4}{9}$ ſemidiametrorum terreſtrium.

12. Confirmatur præterea hæc ratio decrementi virium ex Planetarum excentricitate, & Apſidum tardiſſimo motu. Nam (per Corollaria Prop. XLV.) manifeſtum eſt, quòd nullâ aliâ ratione poſſint Planetæ omnes circumſolares, ſingulis revolutionibus, ſemel ad minimam à Sole diſtantiam deſcêndere, & ſemel ad maximam aſcendere, atque loca harum diſtantiarum manere immobilia. Parvus error in ratione duplicatâ efficeret motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem. At motus ille in Orbibus Planetarum circumſolarium vixdum poſt innumeras revolutiones ſenſibilis extitit. Aſtronomorum aliqui motum omnem negant; cæteri non majorem ſtatuunt quàm qui ex cauſis poſt aſſignandis facilè oriri poſſit, quique in quæſtione, de quâ agitur, nullius eſt momenti. Sed & motus longe major Aphelii Lunaris, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum trium, contemni poteſt. Hoc motu demonſtratur vim circumterreſtrem decreſcere in ratione diſtantiæ non minori quàm duplicatâ, & longè minori quàm triplicatâ: nam ſi ratio duplicata mutetur gradatim in triplicatam, augebitur motus Aphelii in infinitum, adeoque mutatione perexiguâ ſuperabit motum Aphelii Lunaris. Oritur motus ille tardiſſimus ex actione vis circumſolaris, ut poſthac dicetur.

Decrementum in duplicatâ ratione diſtantiarum à Terrâ & Planetis, probatur ex Planetarum excentricitate & Apſidum motu tardiſſimo.

cetur. Tollendo hanc cauſam quieſcet Apogæum Lunæ, & pervenietur ad proportionem duplicatam.

Quantitas virium tendentium ad ſingulos Planetas. Ingens vis circumſolaris.

13. Stabilitâ hâc proportione, conferri jam licet Planetarum vires inter ſe. In mediocri diſtantiâ Jovis à Terrâ, elongatio maxima Satellitis extimi à centro Jovis, ex obſervationibus *Flamſtedii*, eſt 8′. 13″. adeoque diſtantia Satellitis à centro Jovis, ad mediocrem diſtantiam Jovis à centro Solis, ut 124 ad 52012; ad mediocrem verò diſtantiam Veneris à centro Solis, ut 124 ad 7234. Sunt autem eorum tempora periodica $16\frac{3}{4}$ dierum, & $224\frac{2}{3}$ dierum. Et inde, per Corollarium ſecundum Propoſitionis quartæ, dividendo diſtantias per quadrata temporum, deducitur, vim, quâ Satelles urgetur in Jovem, eſſe ad vim quâ Venus urgetur in Solem, ut 442 ad 143: et minuendo vim, quâ Satelles urgetur, in duplicatâ ratione diſtantiæ 124 ad 7234, prodibit vis circumjovialis, in diſtantiâ Veneris à Sole, ad vim circumſolarem quâ Venus urgetur, ut $\frac{13}{100}$ ad 143, ſeu 1 ad 1100. Proinde ad æquales diſtantias vis circumſolaris 1100 vicibus major eſt quàm vis circumjovialis. Simili computo ex Satellitis Saturnii tempore periodico dierum 15, horarum $22\frac{2}{3}$, & maximâ ipſius à Saturno, mediocriter à nobis diſtante, elongatione 3′. 20″. colligo diſtantiam hujus Satellitis à centro Saturni eſſe ad diſtantiam Veneris à Sole, ut $92\frac{2}{5}$ ad 7234; & inde vim abſolutam circumſolarem majorem eſſe quàm vis abſoluta circumſaturnia, vicibus 2360.

Exigua vis circumterreſtris.

14. Ex regulari Veneris, Jovis, & aliorum Planetarum heliocentrico motu & irregulari geocentrico manifeſtum eſt (per Corol. 4. Prop. III.) quòd vis circumterreſtris collata cum vi circumſolari ſit perquàm exigua. Parallaxin Solis, ex dichotomiâ Lunæ Teleſcopiis notatâ, *Ricciolus* & *Vendelinus* ſeorſim determinare conati ſunt, eamque conſtituêre non majorem dimidio minuti unius primi. *Keplerus* parallaxin Martis acronychi, quæ multo major eſt, tam *Tychonicis* quàm propriis obſervationibus inſenſibilem reperit. *Flamſtedius* eandem micrometro aggreſſus, idque in perigæo Martis, nunquam reperit majorem viginti quinque minutis ſecundis; & inde concludit parallaxin Solis eſſe ſummùm decem minutorum ſecundorum. Unde conſequens eſt, quòd diſtantia Lunæ à Terrâ non habet majorem rationem ad diſtantiam Terræ à Sole, quàm 29 ad 10000; neque majorem ad diſtantiam

Veneris

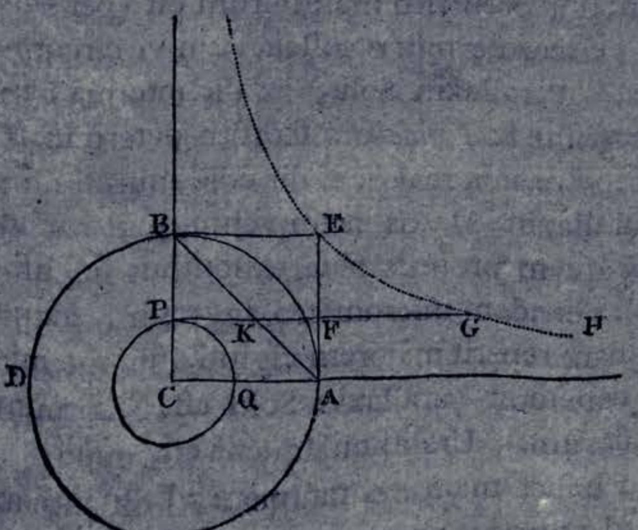
Veneris à Sole, quàm 29 ad 7233. Inde & ex temporibus periodicis, methodo jam expoſitâ, deducetur, quòd vis abſoluta circumſolaris ſit major quàm vis abſoluta circumterreſtris, vicibus 229400 ad minimum. Quòd ſi conſtaret tantùm ex obſervationibus *Riccioli* & *Vendelini*, parallaxin eſſe minorem dimidio minuto primo, tamen inde ſequeretur vim abſolutam circumſolarem ſuperare vim circumterreſtrem vicibus 8500.

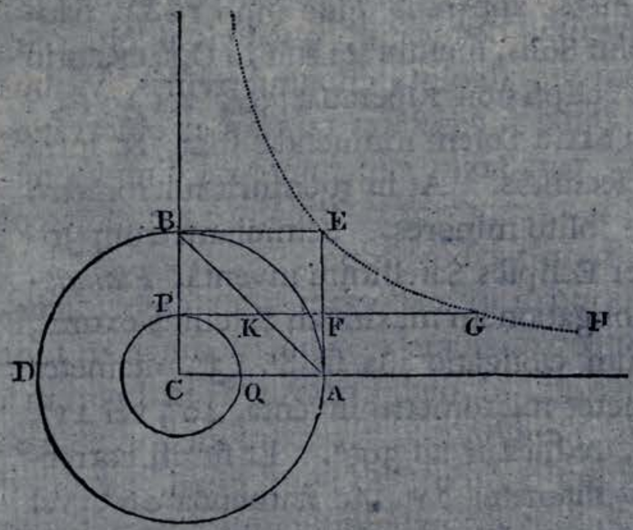
15. Similibus computis incidi in analogiam inter vires & corpora Planetarum: ſed antequam hanc expono, definiendæ ſunt Planetarum apparentes diametri in mediocribus diſtantiis eorum à Terrâ. Diametrum Jovis, *Flamſtedius* micrometro menſus eſt 40″ vel 41″, eamque annuli Saturni 50″, & Solis quaſi 32′. 13″. Diameter corporis Saturnii eſt ad diametrum annuli, juxta *Hugenium* & *Halleium*, ut 4 ad 9, juxta *Galletium* ut 4 ad 10, juxta *Hookium* (teleſcopio pedum ſexaginta uſum) ut 5 ad 12. Ex ratione mediocri 5 ad 12 colligitur diameter corporis quaſi 21″.

Planetarum diametri apparentes.

16. Et hæ ſunt magnitudines apparentes. Verùm puncta omnia lucida, per inæqualem lucis refrangibilitatem, dilatantur in Teleſcopiis, occupantque in foco vitri objectivi ſpatium circulare latitudine quaſi quinquageſimæ partis aperturæ vitri: ita tamen ut lux in circuitu rariſſima vix aut ne vix quidem ſentiatur; in medio verò, ubi conſtipatior eſt, ſenſumque ſatis ferit, lucidum conſtituat circellum, cujus latitudo pro ſplendore puncti lucentis varia ſit, ac tertiam circiter quartamve aut quintam ferè partem latitudinis totius ut plurimum adæquet. Deſignet ABD circulum lucis totius; PQ, circellum luce ſatis conſpicuâ clarentem; C, centrum utriuſque; CA, CB, ſemidiametros circuli majoris rectum continentes angulum C; ACBE, quadratum his diametris comprehenſum; AB, diagonalem ejus; EGH, Hyperbolam

Correctio diametrorum apparentium.





perbolam centro C, aſymptotis CA, CB, deſcriptam; PG, perpendiculum ad ipſius BC punctum quodvis, P, erectum, & occurrens Hyperbolæ in G, rectiſque AB, AE in K & F: & lucis denſitas in loco quovis P erit, ex computo meo, ut longitudo FG, adeoque in centro infinita, prope circumferentiam quàm minima: lux autem tota intra circellum PQ eſt ad totam extra, ut area quadrilatera CAKP ad triangulum PKB. Ibi concipe circellum PQ terminari, ubi lucis denſitas FG minor eſſe incipit, quàm quæ ſenſui movendo ſufficit. Et hinc eſt, quòd ignis trium pedum latitudinis, in diſtantiâ 191382 pedum, per Teleſcopium tripedale apparuit *Picarto* quaſi 8″ latus, qui ſolùm 3′. 14″. latus apparere debuiſſet. Hinc eſt, quòd Fixarum lucidiores per teleſcopia apparent latæ 5″. vel 6″; idque luce ſatis plenâ, luce autem debiliore latiùs excurrunt. Hinc eſt, quòd *Hevelius*, minuendo aperturam Teleſcopii, ſuſtulit bene magnam partem lucis in circuitu, effecitque ut diſcus Stellæ diſtinctiùs circinaretur, & minor evaderet, verùm tamen etiamnum latus appareret 5″, vel 6″: *Hugenius* autem, vitris juxta oculum fuligine leviter infectis, lucem undique erraticam adeo extinxit, ut Stellæ, punctorum inſtar, ſenſibili omni latitudine privatæ viderentur. Hinc eſt, quòd *Hugenius* latitudine obſtaculi quod lucem omnem interciperet, majores exhibuit Planetarum diametros, quàm ab aliis Micrometro definitum eſt: nam lux erratica, tecto Planetâ, latiùs cernitur, radiis fortioribus non ampliùs obſcurata. Hinc denique eſt, quòd Planetæ in Sole tam graciles appareant, luce dilatatâ attenuati. Neque enim Mercurius *Hevelio*, *Galletio* & *Halleio*, ſuperavit 12″, vel 15″, & Venus *Crabtrio* ſolùm 1′. 3″, *Horroxio* 1′. 12″, occupare viſa eſt; quæ tamen, juxta menſuras *Hevelii* & *Hugenii* extra diſcum Solis captas, implere debuiſſet 84″, ad minimum.

nimum. Sic & Lunæ diameter apparens, quæ anno 1684, paucis diebus ante & poſt eclipſin Solis, menſurata fuit in Obſervatorio *Pariſienſi* 31′. 30″, in ipſâ eclipſi non ſuperabat 30′, vel 30′. 5″. Igitur diametri Planetarum extra Solem minuendæ ſunt, & intra augendæ, minutis aliquot ſecundis. At in menſuris micrometro captis errores videntur eſſe ſolito minores. Semidiametrum Jovis, ex umbræ diametro per Eclipſes Satellitum inventâ, *Flamſtedius* determinavit eſſe ad elongationem maximam Satellitis extimi, ut 1 ad 24,903. Unde cùm elongatio illa ſit 8′. 13″, diameter Jovis erit $39\frac{1}{2}$. Igitur diameter micrometro inventa, 40″, vel 41″, rejiciendo lucem erraticam, reducitur ad $39\frac{1}{2}$″. Et ſimili correctione minuenda eſt Saturni diameter 21″, & ſtatuenda 20″, vel paulo minor. At Solis diameter ob lucem fortiorem paulo magis, ni fallor, minuenda eſt, & ſtatuenda quaſi 32′ vel 32′. 6″.

Cur Planetæ ſint aliqui magis alii minus denſi, ſintque vires ut quantitas materiæ in ſingulis.

17. Corpora, magnitudinis tam diverſæ, ad analogiam cum viribus tam propè accedere, myſterio certè non caret. Poſſibile eſt ut Planetæ ulteriores, defectu caloris, careant ſubſtantiis illis metallicis & mineris ponderoſis, quibus Terra referta eſt: utque corpora Veneris & Mercurii, majore Solis calore, magis concocta & coagulata ſint. Experimento ſpeculi uſtorii conſtat calorem augeri cum denſitate lucis; hæc autem augetur in duplicatâ ratione acceſſûs ad Solem. Inde colligitur calorem Solis ad Mercurium ſeptuplo majorem eſſe quàm apud nos tempore æſtivo; tanto autem calore aqua ebullit, & graves illi Vitrioli & Mercurii ſpiritus leniter exhalant, ut thermometro expertus ſum: proinde nulli apud Mercurium conſiſtunt liquores niſi graviores, qui magnum ſuſtinent calorem, & ex quibus ſubſtantiæ denſiſſimæ naſcantur. Quidni ſi Deus corpora ſingula, calore temperiei conveniente alenda, in totidem à Sole diſtantiis locaverit; ſintque adeo denſiora ſemper, quæ Soli propriora: eâ ratione conſtabit optimè, pondera Planetarum omnium eſſe inter ſe ut vires. Pervelim verò diametros Planetarum definiri exactiùs. Id fiet, ſi Lampas ad magnam aliquam diſtantiam luceat per foramen circulare, & minuatur tum foramen tum lux Lampadis, uſque eò ut ſpectrum per Teleſcopium appareat inſtar Planetæ, & iiſdem menſuris definiatur. Tum latitudo foraminis erit ad ſui ipſius diſtantiam à vitro objectivo, ut vera Planetæ diameter ad ipſius diſtantiam à nobis.

nobis. Diminui poteſt lux Lampadis interpoſitione pannorum, aut vitri infecti fuligine.

Alia virium & corporum analogia. Probatur in cœleſtibus.

18. Analogiæ jam deſcriptæ affinis eſt altera inter vires & attracta corpora. Quoniam actio vis centripetæ in Planetas decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ, & tempus periodicum augetur in ratione ſeſquiplicatâ; manifeſtum eſt, quòd in æqualium Planetarum æqualibus à Sole diſtantiis, æquales forent actiones, & æqualia tempora periodica: quòdque in æqualibus inæqualium diſtantiis, actiones collectitiæ forent ut Planetarum corpora. Namque actiones, quæ non eſſent ut corpora movenda, non poſſent corpora illa æqualiter retrahere de tangentibus orbitarum; & efficere ut revolutiones, æqualibus temporibus, in Orbitis item æqualibus complerentur. Sed nec motus Satellitum Jovis tam regulares eſſe poſſent, niſi vis circumſolaris æqualiter in Jovem & Satellites omnes, pro ratione ponderum, exerceretur. Eſtque eadem ratio Saturni & Satellitis ipſius; ut & Terræ & Lunæ noſtræ, uti (ex Corol. 2 & 3. Prop. LXV.) manifeſtum eſt. Paribus igitur diſtantiis æqualis eſt actio vis centripetæ in omnes Planetas, pro ratione corporum, ſeu quantitate materiæ in corporibus; atque adeò in omnes etiam ejuſdem quantitatis particulas, ex quibus Planetæ componuntur. Nam ſi actio major eſſet in particulas unius generis, minor in illas alterius, quàm pro ratione quantitatis materiæ, foret etiam actio major vel minor in Planetas, non ſolùm pro ratione quantitatis, ſed etiam pro genere materiæ quæ in uno copioſiùs, in alio parciùs, reperiretur.

Probatur in terreſtribus.

19. Analogiam certè in corporibus diverſorum generum quæ in Terrâ noſtrâ extant, tentavi quàm accuratiſſimè. Actio vis circumterreſtris, corporibus movendis proportionalis, movebit eadem æqualibus temporibus, æquali cum velocitate (per Motus Leg. 2.) facietque tum omnia demiſſa, temporibus æqualibus, per æqualia ſpatia deſcendere; tum omnia, filis æqualibus ſuſpenſa, æqualibus temporibus oſcillari. Actione majore minora erunt tempora, minore majora. Deſcenſus autem corporum omnium (demptâ ſaltem aëris perexiguâ reſiſtentiâ) æqualibus temporibus fieri jamdudum obſervârunt alii: & exactiſſimè notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, ſale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam

parabam pyxides duas ligneas æquales: unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Æqualibus, pedum undecim, filis pendentes pyxides conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aëris reſiſtentiam omninò paria: & paribus oſcillationibus juxta poſitæ ibant unà, & redibant diutiſſimè. Proinde copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad actionem ejus in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus: & ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuiſſet.

20. Cùm autem actio vis centripetæ in corpus attractum, paribus diſtantiis, proportionalis ſit materiæ in hoc corpore; rationi etiam conſentaneum eſt, ut ſit etiam proportionalis materiæ in corpore trahente. Etenim actio mutua eſt, facitque corpora conatu mutuo (per Motûs Legem 3.) accedere ad invicem, & proinde ſibi ipſi conformis eſſe debet in corpore utroque. Conſiderari poteſt corpus unum ut attrahens, alterum ut attractum, ſed hæc diſtinctio magis mathematica eſt quàm naturalis. Attractio reverâ eſt corporis utriuſque in utrumque, atque adeo ejuſdem generis in utroque. Analogiarum conſenſus.

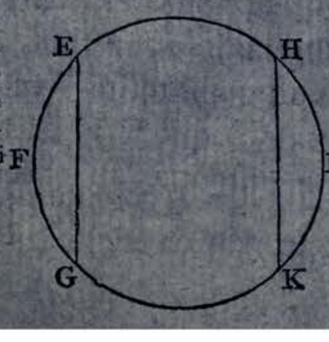
21. Et hinc eſt quòd vis attractiva reperiatur in utroque. Sol trahit Jovem & cæteros Planetas, Jupiter trahit Satellites; & paritate rationis, Satellites agunt in ſe invicem & in Jovem, & Planetæ omnes in ſe mutuò. Et quamvis binorum Planetarum actiones in ſe mutuò diſtingui poſſint ab invicem, &, ut actiones binæ, quibus uterque trahit alterum, conſiderari: tamen quatenus intermediæ ſunt, non ſunt binæ, ſed operatio ſimplex inter binos terminos. Contractione funiculi unius intercedentis poſſunt bina corpora ad invicem trahi. Cauſa actionis gemina eſt, nimirum diſpoſitio utriuſque corporis; actio item gemina, quatenùs in bina corpora: at quatenùs inter bina corpora, ſimplex eſt & unica. Non eſt una operatio quâ Sol v. g. trahit Jovem, & alia operatio quâ Jupiter trahit Solem, ſed una operatio quâ Sol & Jupiter conantur ad invicem accedere. Actione, quâ Sol trahit Jovem, conantur Jupiter & Sol ad ſe mutuò accedere (per Motûs Leg. 3.) & actione, quâ Jupiter trahit Solem, conantur etiam Ju- Et coincidentia.

piter & Sol ad ſe mutuò accedere: Sol autem non attrahitur actione duplici in Jovem, neque Jupiter actione duplici in Solem, ſed una eſt actio intermedia, quâ ambo accedunt ad ſe mutuò. Ferrum trahit magnetem, æquè ac magnes ferrum; nam ferrum omne in viciniâ magnetis trahit etiam aliud ferrum. At actio inter magnetem & ferrum ſimplex eſt, & à Philoſophis conſideratur ut ſimplex: operatio ferri in magnetem ipſa eſt magnetis operatio ſeipſum inter & ferrum, quâ ambo conantur accedere ad ſe mutuò. Id ex eo manifeſtum eſt, quòd ſublato magnete ceſſat propè vis tota ferri. Ad hunc modum concipe ſimplicem exerceri inter binos Planetas ab utriuſque conſpirante naturâ oriundam operationem; & hæc eodem modo ſe habebit ad utrumque: adeò proportionalis exiſtens materiæ in uno eorum, proportionalis erit materiæ in altero.

Inſenſibiles eſſe corporum parvorum vires.

22. Dicet fortè quis, corpora omnia hâc lege ſe mutuò trahere debere, contra experientiam in terreſtribus. Sed reſpondeo, quòd experientia in terreſtribus planè nulla eſt. Sphærarum homogenearum attractiones, juxta ſuperficies earum, ſunt (per Prop. LXXII.) ut diametri: unde ſphæra, Terræ homogenea, diametroque pedis unius deſcripta, minùs trahet corpuſculum juxta ſuperficiem ſuam, quàm Terra juxta ſuam, vicibus 20000000 circiter: et vis tantilla nullos edet ſenſibiles effectus. Hujuſmodi globi duo, quartâ tantùm digiti parte ab invicem diſtantes, in ſpatiis liberis, haud minori quàm menſis unius intervallo, vi mutuæ attractionis accederent ad invicem. Globorum minorum coitus eſſet tardior in ratione diametrorum. Sed nec montes toti ſuffecerint ad ſenſibiles effectus: ad radices montis hemiſphæricis alti tria milliaria & lati ſex, Pendulum, vi montis attractum, non deviabit ſcrupulis duobus primis à perpendiculo. Vires haſce in ſolis Planetarum ingentibus corporibus intueri licet; niſi forte de minoribus diſputemus in hunc modum.

Tendere tamen vires ad corpora omnia terreſtria proportionales quantitati materiæ.



23. Deſignet EFGI globum Telluris, ſectum plano quovis EG, in partes duas EFG, EIG. Pars EFG, incumbendo in partem EIG, premit ipſam toto ſuo pondere. Nec poteſt pars EIG hanc preſſionem ſuſtinere, & immota perſiſtere, niſi æquali conatu in contrarium.

contrarium. Partes igitur ponderibus ſuis ſe mutuò æqualiter urgent, id eſt, trahuntur in ſe mutuo æqualiter, ut lex tertia requirit: adeoque diſtractæ ab invicem & demiſſæ caderent in ſe mutuò, cum velocitatibus, quæ eſſent reciprocè ut corpora. Quæ omnia in magnete experiri & intueri licet. Deſignet jam EFG corpus aliquod exiguum in ſuperficie Terræ: & quoniam particulæ hujus & Terræ reliquæ, EIG, attractiones in ſe mutuò ſunt æquales; attractio autem particulæ in Terram (nimirum pondus ejus) eſt ut materia particulæ, uti experimento Penduli probatum eſt; erit etiam attractio Terræ in particulam ut materia particulæ: adeoque corporum omnium terreſtrium vires attractivæ, ut quantitas materiæ in ſingulis.

24. Vires autem, quæ ſunt ut materia in omnium formarum corporibus terreſtribus, atque adeo non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus univerſis, tam cœleſtibus, quàm terreſtribus; & in omnibus eſſe proportionales materiæ: eò quòd hæc omnia, non genere ſubſtantiæ, ſed formis & modificationibus ſolummodo, differunt. Id verò ſic etiam probatur in cœleſtibus. Conſtitit actionem vis circumſolaris in omnes Planetas, ad æqualitatem diſtantiarum reductos, eſſe ut materia in Planetas: idem ſimiliter conſtat de actione vis circumjovialis in Satellites Jovis; & par eſt ratio attractionis omnium Planetarum in unumquemque. Inde verò ſequitur (per Prop. LXIX.) quòd eorum vires attractivæ ſunt ut materia in ſingulis.

Probatur eaſdem vires in corpora cœleſtia tendere.

25. Igitur ut partes Terræ ſe mutuò trahunt, ſic etiam faciunt partes Planetarum. Si Jupiter & Satellites ejus coirent, & in unum formarentur globum; pergerent ſinguli proculdubio ſe mutuò trahere ut priùs: & vice verſâ, ſi corpus Jovis reſolveretur in globos plures, credendum eſt, quòd hi non minùs traherent ſe mutuò, quàm trahunt Satellites. His attractionibus fit, ut corpora Telluris & omnium Planetarum ſphæricam affectent figuram, utque partes eorum cohæreant, & non ſpargantur per æthera. Oriri verò has vires ex univerſali naturâ materiæ jam conſtitit, & propterea ex particularum viribus componi vim globi totius. Inde verò conſequens eſt (per Corol. 3. Prop. LXXIV.) quòd vis particulæ cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ ab eâdem

Decreſcere vires à Planetarum ſuperficiebus extrorſum in duplicatâ ratione, introrſum in ratione diſtantiarum à centris.

 particulâ;

particulâ; & (per Prop. LXXIII. & LXXV.) quòd vis globi totius decreſcit à ſuperficie ſuâ extrorſum in duplicatâ ratione, & introrſum in ratione ſimplici diſtantiarum à centro, ſi modò globus ex uniformi materia conſtat: & quamvis globi in progreſſu à centro ad circumferentiam non ſint uniformes, valebit tamen decrementum in ratione duplicatâ diſtantiæ extrorſum (per Prop. LXXVI.) ſi modò ſimilis ſit inæquabilitas undique in progreſſu per circuitum: & hujuſmodi globi duo (per eandem Propoſitionem) ſe mutuò trahent, vi decreſcente in duplicatâ ratione diſtantiæ inter centra.

Quantitates virium & motuum inde oriundorum in ſingulis caſibus.

26. Eſt igitur globi cujuſque vis abſoluta ut quantitas materiæ in ipſo. Vis autem motrix, quâ globus unuſquiſque trahitur in alterum, quamque vulgus in terreſtribus per vocem ponderis deſignat, eſt ut contentum ſub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum diſtantiæ inter centra (per Corol. 4. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis eſt quantitas motûs, quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum: vis autem acceleratrix, quâ globus unuſquiſque pro ratione materiæ ſuæ attrahitur in alterum, eſt ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra (per Corol. 2. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis eſt velocitas, quâ globus attractus, dato tempore, movebitur in alterum. Quibus probè intellectis, jam facile fuerit determinare motus corporum cœleſtium inter ſe.

Planetas omnes circa Solem revolvi.

27. Collatis Planetarum viribus, vidimus circumſolarem cæteris majorem eſſe mille vicibus & ampliùs. Urgente autem vi tantâ neceſſe eſt, ut corpora omnia inter ſpatium ſyſtematis Planetarum, & longè ultra, rectâ deſcendant in Solem; niſi aliò moveantur. Neque Terra de numero talium corporum excludenda eſt. Luna certè de genere Planetarum eſt, & iiſdem attractionibus obnoxia cum cæteris Planetis: nam & vi circumterreſtri retinetur in orbe ſuo. Terram verò & Lunam æqualiter trahi in Solem probavimus ſuprà: ſed & corpora omnia communibus attractionum legibus obnoxia eſſe jam antè probavimus. Quanto autem

(d) Vide Princip. Lib. 1. Prop. XXXVI. Cor. H.

(e) Subductis calculis comperimus caſu recto Solem uſque delatum iri ſtellam Veneris ſpatio dierum

autem tempore corpus unumquodque, motu circumſolari privatum, deſcenderet, & cadendo perveniret uſque ad Solem, innoteſcit (per Prop. XXXVI.) ex diſtantiâ ejus à Sole: nimirum dimidio temporis periodici, quo corpus ad diſtantiam duplo minorem revolvi poſſet (d); ſive tempore quod eſt ad tempus periodicum Planetæ, ut 1 ad $4\sqrt{2}$. Ut, quòd Venus cadendo perveniret ad Solem, ſpatio dierum quadraginta; Jupiter ſpatio annorum duorum & menſis unius; Terra & Luna ſpatio dierum 66 & horarum 19 (e). Quod cùm non accidit, neceſſe eſt ut hæc corpora moveantur aliorſum: nec ſufficit motus quilibet; ad impediendum deſcenſum requiritur velocitas ſatis magna. Et inde valet etiam argumentum in Planetis tardeſcentibus. Niſi vis circumſolaris decreſcat in duplicatâ ratione tarditatis, exceſſus ejus efficiet ut corpora deſcendant in Solem: verbi gratiâ, ſi motus, cæteris paribus, fiat duplo tardior, Planeta parte quartâ vis circumſolaris prioris retinebitur in orbitâ ſuâ, & exceſſu cæterarum trium partium quartarum deſcendet in Solem. Proinde Planetæ, Saturnus, Jupiter, Mars, Venus, & Mercurius, non retardantur verè in Perigæis, neque fiunt verè ſtationarii, & lento motu retrogradi. Iſta omnia ſunt apparentia tantùm: & motus abſoluti, quibus Planetæ perſeverant in orbitis ſuis, ſunt ſemper directi, & æquabiles quamproximè. Tales autem motus circa Solem peragi probavimus, & propterea Sol, ut centrum abſolutorum motuum, quieſcit: nam Terræ quies omninò deneganda eſt, ne Planetæ in Perigæis verè tardeſcant, & fiant verè ſtationarii lentéque retrogradi; & ſic defectu motûs deſcendant in Solem. Porrò quoniam Planetæ, Venus, Mars, Jupiter, cæterique, radiis ad Solem ductis deſcribunt orbes regulares, areaſque temporibus, uti oſtenſum eſt, quoad ſenſum proportionales: conſequens eſt (per Prop. III. & Corol. 3. Prop. LXV.) quòd Sol nullâ vi notabili urgetur, niſi quâ Planetæ omnes æqualiter, pro corporum quantitatibus, & ſecundum lineas parallelas, urgentur, adeoque ſyſtema totum transfertur in directum. Rejiciatur tranſlatio illa ſyſtematis totius, & Sol propemodum quieſcet in ipſius centro. Si Sol revolveretur circa Terram, & Planetas reliquos circum ſe deferret,

dierum 39, cum horis $17\frac{16}{100}$; ſtellam Jovis ſpatio annorum duorum cum diebus 35, horis $9\frac{12}{100}$; Tellurem denique noſtram ſpatio dierum 64 cum horis $13\frac{44}{100}$.

deberet

deberet Terra Solem trahere vi magnâ; Planetas autem circumſolares vi nullâ ſenſibilem effectum habente (omninò contra Corol. 3. Prop. LXV.) Adde, quòd ſi Terra, ob gravitatem partium, in infimâ mundi regione à pleriſque hactenus locata fuit: jam Sol potiori jure, ob vim ſuam centripetam mille vicibus & ampliùs gravitate terreſtri majorem, in locum infimum detrudi debebit, centrumque ſyſtematis conſtitui. Vera autem ſyſtematis conſtitutio ſic pleniùs & exactiùs intelligetur.

Planetarum omnium commune gravitatis centrum quieſcere, & Solem tardiſſimè moveri. Definitur motus Solis.

28. Quoniam Fixæ quieſcunt inter ſe, concipiamus Solem, Terram & Planetas, tanquam ſyſtema corporum utcunque moventium inter ſe, & omnium commune centrum gravitatis (per Legum Corollarium quartum) vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum. Caſu poſteriore movebitur etiam ſyſtema totum uniformiter in directum. Dura eſt hæc hypotheſis: eâ rejectâ, quieſcet commune illud centrum gravitatis. Ab eodem centro Sol nunquam longè recedit. Incidit Solis & Jovis commune gravitatis centrum in ſuperficiem Solis (f). Si Planetæ omnes ad eandem Solis partem cum Jove locarentur, commune Solis & omnium centrum vix duplo longius à centro Solis recederet (g). Igitur Sol, pro vario Planetarum ſitu diverſimodè agitatus, & motu quodam libratorio lentè ſemper errans, nunquam integrâ ſui diametro à centro quieſcente Syſtematis totius recedit. Ex Solis autem & Planetarum ponderibus ſuprà inventis, & ſitu omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum: eoque dato, locus Solis ad tempus propoſitum.

Planetas nihilo minus revolvi in Ellipſibus umbilicos habentibus in Sole; & radiis ad Solem ductis areas deſcribere temporibus proportionales.

29. Circa Solem, hoc modo libratum, revolvuntur cæteri Planetæ in Orbibus Ellipticis, & radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales quamproximè, ut (in Prop. LXV.) expoſitum eſt. Si Sol quieſceret, & Planetæ cæteri non agerent in ſe invicem, forent Orbes Elliptici, & areæ temporibus proportionales exactè (per Prop. XI. & Corol. 1. Prop. XIII.) Actiones Planetarum in ſe invicem, collatæ cum actionibus Solis in Planetas, nullius ſunt momenti, neque adeò ſenſibiles errores inducunt: ſuntque errores illi minores in revolutionibus circa Solem more jam deſcripto agitatum, quàm in revolutionibus circa Solem quieſcentem (per Prop. LXVI. & Corol. Prop. LXVIII.) præſertim ſi

(f) Vide Princip. Lib. 3. Not. cc.

(g) Ibid.

Orbis

Orbis cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis Planetarum omnium interiorum: nimirum umbilicus Orbis Mercurii in centro Solis, umbilicus Orbis Veneris in communi centro gravitatis Mercurii & Solis, umbilicus Orbis Telluris in communi centro gravitatis Veneris, Mercurii & Solis; & ſic deinceps. Hoc pacto umbilici Orbium Planetarum omnium, præter Saturnum, non diſtabunt ſenſibiliter à centro Solis; neque umbilicus Orbis Saturni recedet ſenſibiliter à communi centro gravitatis Jovis & Solis. Proinde centrum Solis non malè ſtatuitur ab Aſtronomis umbilicus communis Orbium cunctorum. In ipſo Saturno error inde ortus non eſt major quàm 1′. 45″. Si Orbis iſte, locando umbilicum in communi centro gravitatis Jovis & Solis, melius congruerit cum phænomenis, inde confirmabuntur hæc omnia quæ diximus.

De Orbium dimenſionibus, deque motu Apheliorum & Nodorum.

30. Si Sol quieſceret, & Planetæ nil agerent in ſe invicem, quieſcerent etiam eorum Aphelia & Nodi (per Prop. I. XI. & Cor. Prop. XIII.) & forent Orbium Ellipticorum axes majores ut latera cubica quadratorum temporum periodicorum (per Prop. XV.) adeoque ex datis temporibus periodicis darentur. Menſuranda ſunt hæc tempora non à mobilibus æquinoctiorum punctis, ſed à ſtellâ primâ arietis. Ex motu autem Solis augetur ſemiaxis quilibet, quaſi tertiâ parte diſtantiæ centri Solis à communi centro gravitatis Solis & Planetæ (per Prop. LX.) & actionibus Planetarum exteriorum in interiores nonnihil augentur tempora periodica interiorum, at vix ſenſibiliter, & Aphelia moventur tardiſſimè in conſequentia (per Corol. 6 & 7. Prop. LXVI.) Sic & actionibus Cometarum, ſiqui ultra Saturnum verſentur, augebuntur periodica tempora Planetarum omnium; & maximè ea exteriorum: & Aphelia omnium movebuntur in conſequentia. Progredientibus autem Apheliis, regredientur Nodi (per Corol. 11 & 13. Prop. LXVI.) & regreſſus eorum, ſi fortè quieſcat planum Eclipticæ, erit (per Corol. 16. Prop. LXVI.) ad progreſſum Aphelii in Orbe unoquoque, ut regreſſus Nodorum Lunæ ad progreſſum Aphelii ipſius quamproximè; hoc eſt ut 10 ad 21 circiter. Confirmare autem videntur obſervationes aſtronomicæ Aphelia tardiſſimè progredi, & Nodos regredi, reſpectu Fixarum. Et inde verſimile eſt, Cometas in regionibus ultra Planetas verſari. Hi in Orbibus valde

valde excentricis revoluti, tranſcurrunt velociter perihelia ſua, &, motu in apheliis longè tardiſſimo, tempus ferè totum conterunt in regionibus ſupra Planetas, ut poſthac fuſiùs explicabitur.

Ex principiis allatis derivanturmotus omnes Lunares hactenus ab Aſtronomis notati.

31. Planetas in hunc modum revolventes poſſe alios, ceu Satellites, aut Lunas, circum ſe deferre, conſtat (ex Propoſitione LXV.) Actione autem Solis fit, ut Luna noſtra velociùs moveatur, & radio ad terram ducto deſcribat aream pro tempore majorem, Orbemque habeat minùs curvum, atque adeò propius accedat ad Terram, in ſyzygiis quàm in quadraturis, niſi quatenus impedit motus excentricitatis. Namque excentricitas maxima eſt, ubi apogæum Lunæ in ſyzygiis verſatur, & minima ubi idem in quadraturis conſiſtit; & inde Luna in perigæo velocior eſt & nobis proprior, in apogæo autem tardior, & remotior in ſyzygiis quàm in quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili: & Apogæum quidem velociùs progreditur in ſyzygiis ſuis, tardius regreditur in quadraturis, &, exceſſu progreſſûs ſupra regreſſum, annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem quieſcunt in ſyzygiis ſuis, & velociſſimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius quadraturis quàm in ſyzygiis: & motus medius tardior in perihelio Terræ quàm in ipſius aphelio. Plures inæqualitates in motu Lunari nondum ab Aſtronomis notantur. Hæ autem omnes conſectantur ex principiis noſtris (per Corol. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Prop. LXVI.) & in cœlis reverâ extare noſcuntur. Id in *Horroxii* hypotheſi illâ ingenioſiſſimâ, &, ni fallor, omnium accuratiſſimâ, quam *Flamſtedius* ad cœlos aptavit, videre licet. Corrigendæ tamen ſunt hypotheſes Aſtronomicæ in motu Nodorum. Hi æquationem, ſeu proſthaphæreſin, maximam admittunt in Octantibus ſuis, eſtque hæc inæqualitas maximè conſpicua ubi Luna in Nodis, atque adeò in Octantibus, verſatur. Inde Tycho, & poſt eum alii, rejecerunt hanc inæqualitatem in octantes Lunæ, eamque fecerunt menſtruam. Docent autem rationes à nobis allatæ hanc ad octantes Nodorum referri debere, & annuam conſtitui.

Ut & alii nonnulli nondum obſervati motus inæquabiles.

32. Præter inæqualitates ab Aſtronomis notatas, extant aliæ nonnullæ, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Ve-

locitates enim, ſeu motus horarii, Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis ſolaris. Eſtque Variatio præterea in ratione duplicatâ temporis inter quadraturas quamproximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI.) Sunt & inæqualitates omnes in parte orbis Solem verſus paulò majores quàm in parte oppoſitâ, ſed differentiâ vix aut ne vix quidem ſenſibili.

33. Per computationem quandam, quam brevitatis gratiâ non deſcribo, invenio etiam, quòd area, quam Luna radio ad terram ductо ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, ſit quamproximè ut ſumma numeri $237\frac{3}{10}$, & ſinûs verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius eſt unitas; atque adeò quòd quadratum diſtantiæ Lunæ à Terrâ ſit ut ſumma illa diviſa per motum horarium Lunæ ([h]). Hæc ita ſe habent, ubi Variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris: ſin Variatio major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione. Tentent Aſtronomi, quàm probè diſtantiæ ſic inventæ congruerint cum Lunæ diametris apparentibus.

Et diſtantiæ Lunæ à Terrâ ad tempus datum.

34. Ex motibus Lunæ noſtræ, derivare licet motus Lunarum, ſeu Satellitum, Jovis & Saturni. Namque motus medius nodorum ſatellitis extimi Jovialis eſt ad motum medium nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte 8^{gr}. 24′ in antecedentia. Motus medii Nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis ſatellitis cujuſque, in conſequentia, eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ſunt ad æquationes

Derivantur motus Satellitum Jovis & Saturni ex motibus Lunæ.

([h]) Vide Princip. Lib. 3. Prop. XXVI & XXVII.

maximas nodorum & augis Lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. Variatio ſatellitis, è Jove ſpectati, eſt ad variationem Lunæ, ut ſunt motus toti nodorum temporibus periodicis ſatellitis & Lunæ ad invicem (per idem Corollarium) adeoque in ſatellite extimo non ſuperat $5''. 12'''$. Parvitate harum inæqualitatum, & tarditate motuum, fit, ut motus ſatellitum tam regulares reperiantur; utque Aſtronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut afferant tardiſſimè retrogradum.

Planetas reſpectu Fixarum æquabili motu circum axes ſuos revolvi; hunc motum ad æquationem temporis aptiſſimum eſſe.

35. Interea dum Planetæ in hunc modum circum centra longinqua in orbem redeunt, rotantur ſinguli circum axes proprios; Sol quidem diebus 26; Jupiter horis 9, minutis primis 56; Mars horis $24\frac{2}{3}$; Venus horis 23; idque in planis ad planum Eclipticæ non multùm inclinatis, & ſecundum ordinem ſignorum; ut ex maculis in eorum corporibus per vices in conſpectum redeuntibus definiunt Aſtronomi. Similis eſt revolutio Terræ noſtræ facta horis 24. Hos motus actionibus virium centripetarum non accelerari nec retardari conſtat (per Corol. 22. Prop. LXVI.) Sunt igitur præ cæteris omnibus æquabiles, atque adeo ad menſuram temporis aptiſſimi. Sed revolutiones ex reditu, non ad Solem, ſed ad Stellam aliquam fixam definiendæ ſunt æquabiles. Nam ſitu Planetarum ad Solem inæquabiliter variato, revolutiones eorum à Sole ad Solem redduntur inæquabiles.

Lunam pariter motu diurno circa axem ſuum revolvi, & inde librationem ipſius oriri.

36. Sic & Luna revolvitur circa axem proprium, motu maximè æquabili reſpectu Fixarum. Revolvitur autem tempore dierum 27, horarum 7. min. 43. id eſt menſe ſidereo; ita ut motus iſte diurnus æqualis ſit motui medio Lunæ in orbe ſuo. Proinde eadem Lunæ facies convertetur ſemper in centrum, circa quod motus iſte medius peragitur; hoc eſt, in orbis lunaris umbilicum exteriorem quamproximè. Inde oritur deflexio faciei de Terrâ, nunc in Orientem quidem, nunc verò in Occidentem, pro ſitu umbilici quem reſpicit; eſtque deflexio illa æqualis proſthaphæreſi orbis lunaris, ſeu differentiæ inter motum medium & verum. Hæc eſt libratio Lunæ in longitudinem. Eſt & libratio in latitudinem, orta ab inclinatione axis lunaris ad planum orbis in quo

Luna

Luna circa Terram revolvitur. Servat enim axis ille ſitum ſuum ad Fixas quamproximè, & inde poli nobis per vices in conſpectum veniunt. Id intelligere licet ex motu Telluris, cujus poli, ob inclinationem axis ad planum Eclipticæ, per vices illuſtrantur à Sole. Situm axis ad Fixas, & ſitûs hujus variationem exactè determinare, Problema eſt Aſtronomo dignum.

De præceſſione æquinoctiorum, deque motu libratorio axis Telluris & Planetarum.

37. Ex Planetarum revolutionibus diurnis conatur materia recedere ab axibus hujus motûs; & inde partes liquidæ ſurgunt paulò altiùs juxta Æquatorem quàm juxta Polos, parteſque ſolidas inundabunt niſi pariter ſurgentes. Ideò Planetæ paulò craſſiores ſunt juxta Æquatorem quàm juxta Polos, & eorum puncta æquinoctialia propterea regrediuntur; axeſque motu oſcillatorio bis in ſingulis revolutionibus nutant, & bis redeunt ad inclinationem priorem; ut in Corol. 18. Prop. LXVI. expoſitum eſt. Nam & Jupiter, prælongis tubis viſus, non omnino rotundus cernitur, ſed illius diameter Eclipticæ parallela paulo eſt oblongior, quàm quæ à Septentrione in Auſtrum ducitur.

Mare bis fluere debere & bis refluere ſingulis diebus, & æſtum incidere in horam tertiam ab appulſu luminaris ad meridianum loci.

38. A Telluris etiam motu diurno & attractionibus Solis & Lunæ, mare noſtrum ſingulis diebus, tam Lunaribus, quàm Solaribus, bis intumeſcere debet, & bis defluere (per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI.) & aquæ altitudo maxima præcedere horam ſextam diei utriuſque, & ſequi duodecimam præcedentem. Tarditate motûs diurni retrahitur æſtus ad horam duodecimam; & vi motûs reciprocationis protrahitur idem, & in horam ſextæ propiorem differtur. Interea dum tempus per phænomena certiùs determinabitur, quidni, rationem mediocrem tenentes, conjiciamus æſtum maximum in horam tertiam? Hoc pacto aqua toto tempore aſcendet, quo vis Luminarium ad ipſam attollendam major eſt; deſcendetque, toto tempore quo minor eſt. Namque vis illa major eſt ab horâ nonâ ad horam tertiam, & minor à tertiâ ad nonam. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm ſupra: & per horas diei Lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad Meridianum loci revolvitur.

Æſtus maximos in ſyzygiis Luminarium ac Terræ, minimos

39. Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur diſtinctè, ſed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium conjunctione vel oppoſitione conjungentur eorum effectus,

in quadraturis fieri; idque horâ tertiâ ab appulſu Lunæ ad Meridianum loci: aſt extra ſyzygias & quadraturas deviare aliquantulum ab horâ illâ tertiâ in horam tertiam ab appulſu ſolis.

effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam, ubi Luna deprimit; deprimetque, ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teſte, major eſt effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra ſyzygias & quadraturas, æſtus maximus, qui ſolâ vi lunari incidere ſemper deberet ad horam tertiam lunarem, & ſolâ ſolari in tertiam ſolarem; compoſitis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius eſt; adeoque in tranſitu Lunæ à ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam lunarem, in tranſitu Lunæ à quadraturis ad ſyzygias.

Majores eſſe æſtus ubi Luminaria ſunt in perigæis.

40. Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis à Terrâ. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in ſyzygiis majores ſint, & in quadraturis minores (cæteris paribus) quàm tempore æſtivo; & Luna in perigæo, ſingulis menſibus, majores ciet æſtus quàm ante vel poſt dies quindecim, ubi in apogæo verſatur. Unde fit, ut æſtus duo omninò maximi in ſyzygiis continuis ſe mutuò non ſequantur.

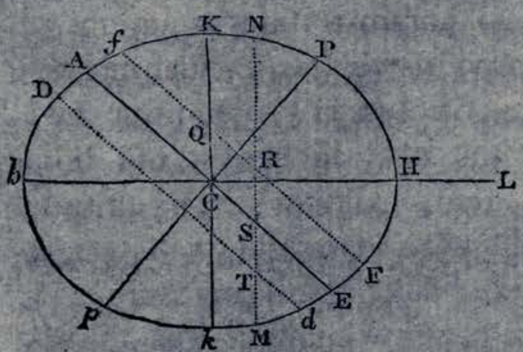
Majores eſſe æſtus circa æquinoctia.

41. Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius declinatione, ſeu diſtantiâ ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque motûs reciprocationem nullam cieret. Igitur Luminaria, recedendo de æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eò quòd Lunæ, jam in æquatore conſtitutæ, effectus maximè ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias, & minimi in quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque; & æſtum

maximum

maximum in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æſtivo, fit, ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant Æquinoctium vernum, quàm ſequantur; & ſæpiùs ſequantur autumnale, quàm præcedant.

42. Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Æſtus extra Æquatorem vicibus alternis majores & minores fieri.



Deſignet A*p*EP Tellurem, aquis profundis undique coopertam; C, centrum ejus; P, *p*, polos; AE, æquatorem; F, locum quemvis extra æquatorem; F*f*, parallelum loci; D*d*, parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; L, locum quem Luna ante horas tres occupabat; H, locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *b*, locum huic oppoſitum; K, *k*, loca inde gradibus 90 diſtantia; CH, C*b*, Maris altitudines maximas menſuratas à centro Telluris; & CK, C*k*, altitudines minimas: & ſi axibus H*b*, K*k* deſcribatur Ellipſis; deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem, H*b*, deſcribatur Sphærois HPK*bpk*; deſignabit hæc figuram maris quamproximè; & erunt CF, C*f*, CD, C*d*, altitudines maris in locis F, *f*, D, *d*. Quinetiam ſi in præfatâ Ellipſeos revolutione punctum quodvis, N, deſcribat circulum NM, ſecantem parallelos F*f*, D*d* in locis quibuſvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo Maris in locis omnibus R, S, T, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f*, horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt ortum Lunæ: & affluxus poſterior, in *f*, erit minor quàm affluxus prior in F. Diſtinguitur enim mare totum in duos omninò fluxus ingentes & hemiſphæricos; unum in hemiſphærio KH*k*C, ad boream vergentem; alterum in Hemiſphærio oppoſito K*bk*C; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet. Hi fluctus, ſemper ſibi mutuò oppoſiti, veniunt per vices ad Meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo

intervallo horarum Lunarium duodecim. Cúmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem. Æſtus autem major, declinante Lunâ in verticem loci, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, &, Lunâ declinationem mutante, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos, & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum; obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Per motus impreſſi conſervationem minui differentiam æſtuum, & fieri quoque ut æſtus maximus menſtruus ſit tertius à Syzygiâ.

43. Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motûs impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minores. Unde fit, ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ad invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii.

Motus maris impedimento alveorum retardari.

44. Fieri etiam poteſt, ut æſtus omnium maximus ſit quartus vel quintus à ſyzygiis, vel tardiùs adveniat; eò quòd retardantur motus marium in tranſitu per loca vadoſa ad littora. Sic enim æſtus accedit ad littus occidentale *Hiberniæ*, horâ tertiâ lunari; & poſt horam unam & alteram ad portus in littore auſtrali ejuſdem inſulæ; ut & ad *Inſulas Caſſiterides*, vulgo *Sorlings* dictas: dein ſucceſſivè ad *Falmuthum*, *Plymuthum*, *Portlandiam*, *Inſulam Vectam*, *Winchelſejam*, *Doveriam*, oſtium *Tameſis* & pontem *Londinenſem*, conſumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipſius alveis haud ſatis profundis impeditur æſtuum propagatio. Incidit enim æſtus ad *Inſulas Fortunatas*, & ad occidentalia marique *Atlantico* expoſita littora *Hiberniæ*, *Galliæ*, *Hiſpaniæ* & *Africæ* totius, uſque ad *Caput bonæ ſpei*, in horam tertiam lunarem; præterquam in locis nonnullis vadoſis, ubi æſtus impeditus tardiùs

diùs advenit, inque *Freto Gaditano*, quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æſtuat. Pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras *Americæ*, accedit æſtus primò ad *Braſiliæ* littora maximè orientalia circa horam lunarem quartam vel quintam; deinde ad oſtium *Fluvii Amazonum* horâ ſextâ; ad inſulas verò adjacentes horâ quartâ; poſtea ad *Inſulas Bermudas* horâ ſeptimâ; & ad *Floridæ* portum *S. Auguſtini* horâ $7\frac{1}{2}$. Tardiùs igitur progreditur æſtus per Oceanum, quàm pro ratione motûs Lunæ. Et pernecceſſaria eſt hæcce retardatio, ut mare eodem tempore deſcendat inter *Braſiliam* & *Novam Franciam*, aſcendatque ad *Inſulas Fortunatas* & litora *Europæ* & *Africæ*, & vice verſâ. Namque mare aſcendere nequit in uno loco, quin ſimul deſcendat in altero. Lege jam deſcriptâ agitari quoque *Mare Pacificum* veriſimile eſt. Namque æſtus altiſſimi in litore *Chilienſi* & *Peruviano* incidere dicuntur in horam tertiam lunarem; ſed quâ velocitate propagantur inde ad litus orientale *Japoniæ* & ad *Inſulas Philippinas*, cæteraſque regno *Sinarum* adjacentes, nondum reperi.

Ex alveorum & litorum impedimentis varia oriri phænomena: ut quòd mare non niſi ſemel intumeſcat diebus ſingulis.

45. Porrò fieri poteſt ut æſtus propagetur ab Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citiùs tranſeat per aliqua freta quàm per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtum dividi in duos æquales, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam vel tertiam, vel viceſimam ſeptimam, ab impulſu Lunæ ad Meridianum portûs. Si Luna in hocce ad Meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Sin Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet, ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio; & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantùm perveniet ad maximam altitudinem, & ſemel

ad

ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum habemus, in portu regni *Tunquini* ad *Batſham* in latitudine boreali $20^{gr}. 50'$. Ibi aqua, die tranſitum Lunæ per æquatorem ſequente, ſtagnat; dein, Lunâ ad boream declinante, incipit fluere & refluere, non bis ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum: cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum; dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; &, Lunâ declinationem mutante, ceſſat, & mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ, & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus de Oceano in hunc portum duplex patet: unus rectior & brevior inter *Inſulam Hainan* & litora *Quantungi*, Provinciæ *Sinarum*; alter per circuitum inter Inſulam eandem & litora *Cochini*. Per breviorem citiùs propagatur æſtus ad *Batſham*.

Phil. Tranſ. Num. 162.

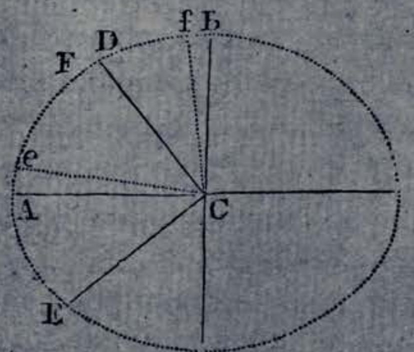
Tempora æſtuum intra fluviorum alveos eſſe magis inæqualia quàm in Oceano.

46. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum curſu. Nam curſus ille faciet aquam tardiùs influere ex mari, & in mare citiùs & velociùs refluere, atque adeò diutiùs refluere quàm influere; præſertim ſi longè in flumen aſcenditur, ubi minor eſt vis maris. Sic in fluvio *Anovæ*, ad tertium lapidem infra *Briſtoliam*, refert *Sturmius* aquam horis quinis influere, ſeptenis refluere: ſupra *Briſtoliam*, ut ad *Caneſham* vel *Bathoniam*, differentia proculdubio major eſt. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam prope Luminarium ſyzygias, vehementior maris motus, faciliùs ſuperando reſiſtentiam fluminum, faciet aquam citiùs ac diutiùs influere, adeoque minuet hanc differentiam. Interea verò dum Luna ad ſyzygias properat, neceſſe eſt ut flumina, ob curſus ſuos per magnitudinem æſtuum impeditos, magis impleantur, & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè poſt Syzygias, quàm proximè antea. Eâ de cauſâ æſtus omnium tardiſſimi non incident in ipſas ſyzygias, ſed paulò præcedent. Dixi æſtus etiam ante ſyzygias retardari vi Solis. Conjungatur cauſa utraque, &

æſtuum retardatio et major erit, & ſyzygias magis præcedet. Quæ omnia ita ſe habere colligo ex Tabulis æſtuum, quas *Flamſtedius* ex obſervationibus quàm plurimis conſtruxit.

Æſtus à mari majore & profundiore majores oriri, & majores eſſe ad littora Continentium quàm in medio mari ad inſulas, atque adhuc majores in ſinubus vadoſis, ore lato in Oceanum patentibus.

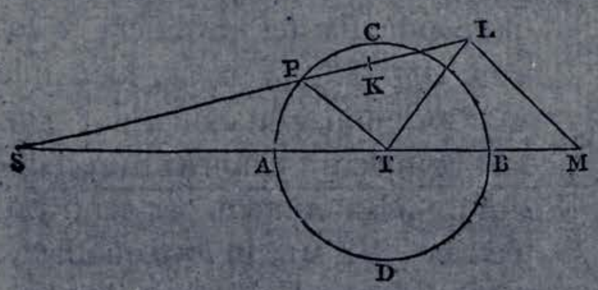
47. Legibus hactenus deſcriptis reguntur æſtuum tempora. Magnitudo pendet à magnitudine marium. Deſignet C centrum Terræ; EADB, ovalem maris figuram; CA, ovalis hujus ſemiaxem majorem; CB, ſemiaxem minorem priori inſiſtentem ad angulum rectum; D, punctum medium inter A & B; & ECF, vel *eCf*, angulum ad centrum Terræ, quem maris, litoribus E, F vel *e*, *f* terminati, latitudo ſubtendit. Verſetur autem punctum A in medio inter puncta E, F, & punctum D in medio inter puncta *e*, *f*; & ſi per differentiam altitudinum CA, CB exponatur quantitas æſtûs in mari profundiſſimo, Terram totam cingente, deſignabit exceſſus altitudinis CA ſuper altitudinem CE vel CF, quantitatem æſtûs in medio maris EF, litoribus E, F terminati; & exceſſus altitudinis C*e* ſuper altitudinem C*f*, quantitatem æſtûs ad litora ejuſdem maris quamproximè. Unde liquet æſtus in medio mari longè minores eſſe quàm ad litora, & æſtus ad litora eſſe propemodum ut maris latitudo EF, arcu quadrantali non major. Et hinc eſt quòd prope æquatorem, ubi mare inter *Africam* & *Americam* anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quàm hinc inde in Zonis Temperatis, ubi maria latè patent, inque *Maris Pacifici* litoribus ferè cunctis, tam *Americanis* quàm *Sinicis*, & inter Tropicos & extra; quódque ad Inſulas medio in mari ſitas vix aſſurgant ultra pedes duos vel tres; in litoribus autem magnarum Continentinm ſint triplo vel quadruplo majores, & ultrà: præſertim ſi motus de Oceano patente venientes gradatim contrahantur in ſpatium anguſtum, & aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur: ut ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Angliâ*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgò *Auranches* dictam) in *Normanniâ*; ad *Cambajam* & *Pegu* in *Indiâ orientali*. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc



inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus accedendi vel recedendi priùs frangi poteſt, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes, 40, vel 50, & ampliùs. Sic & freta oblonga, vadoſa, & oſtiis reliquo alveo amplioribus & profundioribus in Oceanum patentia, cujus generis ſunt *Britannicum*, & *Magellanicum* ad introitum orientalem, magis fluent & refluent, curſumve intendent & remittent; eâque de cauſâ altiùs aſcendent ac deprimentur. Ad littora *Americæ auſtralis*, *Mare Pacificum* non rarò in refluxu ſuo remeare dicitur ad milliaria duo, & fugere viſum in litore ſtantis. Unde & ibi æſtus fiunt ſolito altiores. In aquis autem profundioribus ſemper minor eſt fluendi & refluendi velocitas, & propterea minor quoque aſcenſus ac deſcenſus. Nec Oceanus talibus in locis ad pedes pluſquam ſex, octo vel decem, aſcendere noſcitur. Aſcenſus verò quantitatem ſic computo.

Ex Principiis allatis computatur vis Solis ad perturbandos motus Lunæ.

48. Deſignet S Solem; T, Terram; P, Lunam; PADB, orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST, & SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM; & ſi vis mediocris circumſolaris agens in Terram exponatur per diſtantiam ST, vel SK; erit SL vis circumſolaris agens in Lunam. Ea componitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipſius SM pars TM, perturbat motum Lunæ (ut in Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt).



Quatenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur, urgebitur Terra viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas, TM & ML, deſignare. Vis ML, in mediocri ſuâ quantitate, eſt ad vim, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam PT revolvi poſſet, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI.) hoc eſt in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, min. 43, ad dies 365, hor. 6, min. 9, id eſt ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Vis, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$, revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ eodem

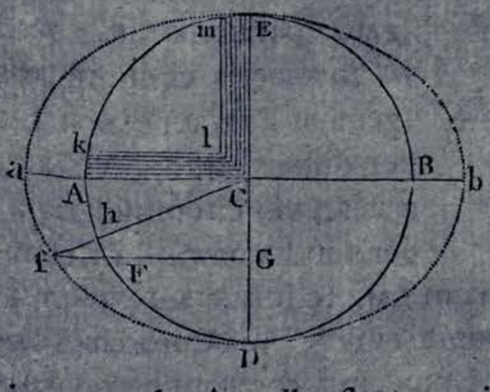
eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60. Ideoque vis mediocris ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Unde datur etiam vis TM, ex proportione linearum TM, ML. Hæ ſunt vires Solis, quibus motus Lunæ perturbatur.

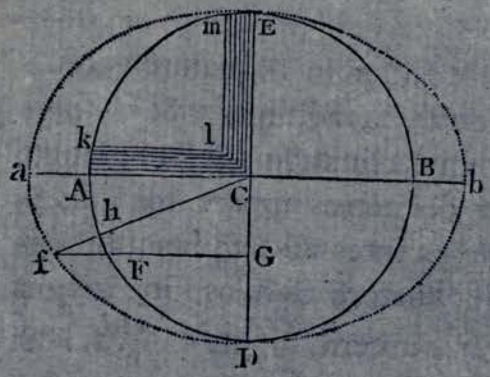
49. Si deſcendatur de orbe Lunæ ad ſuperficiem Terræ, minuentur hæ vires in ratione diſtantiarum $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis ML jam fiet 38604600 vicibus minor quàm vis gravitatis. Hæc vis, Terram undique æqualiter urgendo, vix aut ne vix quidem mutabit motum marium, adeoque in explicatione motûs illius negligi poſſit. Vis altera TM, in locis in quorum Zenith vel Nadir Sol conſtituitur, eſt triplo major quàm vis ML, adeoque 12868200 vicibus minor quàm vis gravitatis.

Computatur vis Solis ad mare movendum.

50. Deſignet jam ADBE Telluris ſuperficiem ſphæricam; *a*D*b*E, aquam ſupernatantem; C, centrum utriuſque; A, locum cui Sol perpendiculariter imminet; B, locum oppoſitum; D, E, loca inde gradibus nonaginta diſtantia; ACE *mlk*, canalem cylindricum rectangulum tranſeuntem per centrum Terræ. Vis ML, in loco quolibet, eſt ut diſtantia loci à plano DE, cui recta AC perpendicularis eſt; adeoque in canalis parte EC*lm*, nulla eſt; in parte alterâ AC*lk*, eſt ut gravitas in ſingulis altitudinibus. Nam gravitas in deſcenſu ad centrum Terræ eſt ubique ut altitudo (per Prop. LXXIII.) Igitur vis ML, urgendo aquam ſurſum minuet gravitatem ejus in canalis crure AC*lk* in datâ ratione. Et propterea aqua in hoc crure aſcendet, ut defectus gravitatis compenſetur majore altitudine; neque priùs ſtabit in æquilibrio, quàm gravitas totius æquetur gravitati totius in canalis crure *clm*E. Quoniam gravitas particulæ cujuſque eſt ut diſtantia ipſius à centro Terræ, creſcet pondus aquæ totius in crure canalis in duplicatâ ratione altitudinis; adeoque altitudo aquæ in crure AC*lk* fiet ad altitudinem aquæ in crure *clm*E, in dimidiatâ ratione numeri 12868201 ad 12868200; ſive in ratione numeri 25623053 ad

Computatur altitudo æſtûs ſub æquatore ex vi Solis oriunda.





numerum 25623052; & altitudo in crure alterutro, E C*lm*, ad differentium altitudinum ut 25623052 ad 1. Eſt autem altitudo illa in crure E C*lm* pedum *Pariſienſium* 19615800, ut à *Gallis* nuper definitum eſt: & inde per analogiam illam prodit differentia altitudinum $9\frac{1}{5}$ digitorum hujus pedis. Igitur vi Solis major erit altitudo maris ad A quàm ad E digitis circiter novem (l). Et quamvis aqua in canali A C E*mlk* congeletur, & rigeat; manebunt tamen altitudines aquarum, Terræ ſupernatantium, ad A & E, locaque omnia intermedia.

Computatur altitudo æſtûs ſub parallelis ex vi ſolis oriunda.

51. Deſignet A*a* exceſſum illum altitudinis digitorum novem ad *a*; & *bf*, exceſſum altitudinis in alio quovis loco *b*; & ad D C, demittatur normalis *f*G, occurrens ſphæræ in F. Ob ingentem Solis diſtantiam, quâ fit ut lineæ omnes ad Solem tendentes pro parallelis haberi poſſint, eſt vis T M in loco quovis *b* vel *f*, ad vim illam in loco A, ut ſinus F G ad radium A C; adeoque cùm vires illæ tendant ſecundum lineas parallelas in Solem, generabunt hæ parallelas altitudines F*f*, A*a*, in eâdem ratione. Et propterea figura aquæ D*fa*E*b* ſphærois erit, facta per revolutionem Ellipſeos circa majorem axem *ab*. Eſt inſuper altitudo perpendicularis *fb* ad altitudinem obliquam *f*F, ut *f*G ad *f*C, ſeu F G ad A C; & propterea altitudo *fb* eſt ad altitudinem A*a* in duplicatâ ratione F G ad A C; id eſt, in ratione quam habet ſinus verſus anguli D C*f* duplicati ad duplicatum radium, & inde datur. Et hinc Sole circa Terram apparenter revolvente, innoteſcit ratio intumeſcentiæ ac detumeſcentiæ ſingulis momentis in loco quolibet ſub Æquatore. Innoteſcit etiam decrementum æſtûs maris tàm ex latitudine locorum quàm ex declinatione Solis oriundum. Nimirum quòd ex latitudine locorum, aſcenſus & deſcenſus maris in locis ſingulis diminuitur in ratione duplicatâ ſinûs complementi latitudinis; quódque ex declinatione Solis, aſcenſus & deſcenſus ille ſub Æquatore diminuitur in ratione duplicatâ ſinûs complementi declinationis: ſed & extra æquatorem ſemiſumma aſcenſûs matutini

(l) Princip. Lib. 3. Prop. XXXVI.

&

& aſcenſûs veſpertini, id eſt aſcenſus mediocris, diminuitur in eâdem ratione quamproximè.

Ratio æſtuum ſub æquatore in ſyzygiis & quadraturis ex vi Solis & Lunæ conjunctim.

52. Deſignent S & L vires Solis & Lunæ in Æquatore verſantium, & mediocriter diſtantium à Terrâ; R, radium; T & U, ſinus verſos duplicatorum complementorum declinationis Solis & Lunæ ad tempus datum; D & E, mediocres diametros apparentes Solis & Lunæ; F ac G, earum diametros apparentes ad tempus illud datum; & erunt vires, ad æſtus ſub æquatore ciendos, in ſyzygiis quidem $\frac{VG^3}{2RE^3}L + \frac{TF^3}{2RD^3}S$; in quadraturis autem, $\frac{VG^3}{2RE^3}L - \frac{TF^3}{2RD^3}S$. Si eadem æſtuum ratio obſervetur etiam ſub parallelis, habebimus ex obſervationibus, in boreali noſtrâ regione exactè factis, proportionem inter vires L & S. Et tum demum per hanc regulam prædicere licebit quantitates æſtuum ad ſingulas ſyzygias & quadraturas.

Computatur vis Lunæ ad æſtus ciendos & altitudo aquæ inde oriunda.

53. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali, totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt quaſi pedum 45; in quadraturis autem pedum tantùm 25. Luminarium diametros apparentes, quæ hîc non definiuntur, aſſumamus eſſe mediocres; ut & Lunæ declinationem in quadraturis æquinoctialibus mediocrem eſſe, ſeu graduum $23\frac{1}{2}$; & ſinus verſus duplicati complementi erit 1682 poſito radio 1000. Solis autem in æquinoctiis, & Lunæ in ſyzygiis, declinatio nulla eſt; & ſinus verſus duplicati complementi 2000. Inde fit vis in ſyzygiis $L+S$, in quadraturis $\frac{1682}{2000}L-S$, æſtuum altitudinibus 45 pedum & 25 pedum, ſeu 9 paſſuum & 5 paſſuum, proportionalis. Et ductis extremis & mediis in ſe, fit $5L+5S=\frac{15138}{2000}L-9S$, ſeu $L=\frac{28000}{5138}S=5\frac{5}{11}S$. Porro tempore æſtivo aſcenſum maris in ſyzygiis eſſe ad aſcenſum in quadraturis ferè ut 5 ad 4 memini me audiſſe. In ipſis ſolſtitiis veriſimile proportionem paulo minorem eſſe, puta 6 ad 5. Inde verò conſectatur eſſe $L=5\frac{1}{6}S$. Donec aliquid certius ex obſervationibus conſtiterit, aſſumamus $L=5\frac{1}{3}S$; & cùm æſtus ſint ut vires, vis autem Solaris cieat æſtum altum novem digitos, vis Lunaris ciebit æſtum altum pedes quatuor. Demus altitudinem illam, per vim reciprocationis aquarum, quâ motus ſemel impreſſus aliquamdiu conſervatur, duplicari, vel fortè triplicari;

triplicari; & generabitur æſtuum quantitas illa omnis, quæ in Oceanis reverâ conſpicitur.

Has vires Solis & Lunæ vix aliter quàm per æſtus Maris ſentiri poſſe.

54. Sufficiunt igitur hæ vires commovendo Mari: aſt alios tamen effectus ſenſibiles in hâc Terrâ, quantum animadverto, producent nullos. Nam cùm granum unum in pondere granorum 4000, ope libræ exactiſſimæ, ſentiri vix poſſit, vis autem ſolaris ad ciendos æſtus ſit 12868200 vicibus minor vi gravitatis; & ſumma virium Solis & Lunæ, major exiſtens in ratione $6\frac{1}{3}$ ad 1, ſit 2032890 vicibus minor vi eâdem gravitatis: perſpicuum eſt, quòd conjunctæ illæ vires ſint vicibus quingentis minores, quàm quæ pondus corporis cujuſvis, in librâ appenſi, ſenſibiliter augere vel minuere poſſint; & propterea corpus nullum appenſum movebunt ſenſibiliter. Unde nec in experimentis Pendulorum, Barometrorum, Inſidentium Aquæ ſtagnanti, & Staticis ſimilibus, ſenſibiles edent effectus. Atmoſphæra quidem his viribus fluet & refluet ad modum maris, ſed motu tam exiguo ut exinde ventus nullus ſenſibilis oriatur [m].

Corpus Lunare eſſe quaſi ſextuplo denſius quàm Solare.

55. Si Lunæ & Solis tam effectus in æſtibus ciendis, quàm diametri apparentes, æquarentur inter ſe; forent horum vires abſolutæ ut magnitudines (per Corol. 14. Prop. LXVI.) At lunaris effectus eſt ad effectum Solis, ut $5\frac{1}{3}$ ad 1 circiter: & diameter minor, in ratione $31\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{5}$, ſeu 45 ad 46. Augenda eſt autem vis Lunæ in ratione effectûs directè, inque ratione triplicatâ diametri inverſè: eoque pacto fiet vis Lunæ, collata cum ipſius magnitudine, ad vim Solis collatam cum hujus magnitudine, ut $5\frac{1}{3}$ ad 1 ſemel, & 45 ad 46 ter; id eſt ut $5\frac{7}{10}$ ad 1 circiter. Habet igitur Luna vim abſolutam centripetam majorem in ratione $5\frac{7}{10}$ ad 1 pro magnitudine corporis ſui, quàm Sol pro magnitudine ſui; adeoque denſior eſt in eâdem ratione.

Lunam denſiorem eſſe Terrâ noſtrâ in ratione 3 ad 2 circiter.

56. Tempore $27^{d}. 7^{h}. 43'$, quo Luna revolvitur circa Terram, revolvi poſſet Planeta circa Solem ad diſtantiam 18,954 diametrorum Solis ab ipſius centro, poſito quòd Solis diameter mediocris apparens ſit $32'\frac{1}{5}$. Hoc tempore revolvi poſſet Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam 30 diametrorum terreſtrium. Si idem eſſet numerus diametrorum in utroque caſu, foret vis abſoluta circumterreſtris ad vim abſolutam circumſolarem, ut mag-

[m] Delirant igitur, qui cœli mutationes ex vi Lunæ arceſſunt.

nitudo

nitudo Terræ ad magnitudinem Solis (per Corol. 2. Prop. LXXII.) Quoniam plures ſunt diametri terreſtres in ratione 30 ad 18,954, minus erit corpus Telluris in ratione illâ triplicatâ, hoc eſt in ratione $3\frac{28}{29}$ ad 1. Eſt igitur vis Telluris, pro magnitudine corporis ſui, ad vim Solis, pro magnitudine ſui, ut $3\frac{28}{29}$ ad 1; atque adeo denſitas Terræ ad denſitatem Solis in eâdem ratione. Cùm igitur denſitas Lunæ ſit ad denſitatem Solis ut $5\frac{7}{10}$ ad 1, erit denſitas Lunæ ad denſitatem Terræ ut $5\frac{7}{10}$ ad $3\frac{28}{29}$, ſeu 23 ad 16. Unde cùm magnitudo Lunæ ſit ad magnitudinem Terræ ut 1 ad $41\frac{1}{2}$ circiter, erit vis abſoluta centripeta Lunæ ad vim abſolutam centripetam Terræ, ut 1 ad 29 circiter; nec non quantitas materiæ in Lunâ ad quantitatem materiæ in Terrâ, in eâdem ratione. Hinc datur commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ exactiùs quàm antè: quo cognito, licebit jam diſtantiam Lunæ à Terrâ magis accuratè colligere. Sed malim expectare donec proportio corporum Lunæ ac Terræ ad invicem ex phænomenis æſtûs marini determinetur exactiùs: ſperans etiam interea confore, ut ambitus Terræ ex majoribus ſtationum intervallis menſuretur, quàm hactenus à quoquam factum fuit.

57. HACTENUS expoſui Syſtema Planetarum. Stellas autem fixas immenſis intervallis ab hoc ſyſtemate diſtare, colligitur ex defectu parallaxeos annuæ. Hanc minuto primo minorem eſſe certiſſimum eſt, & propterea diſtantias Fixarum ſuperare diſtantiam Saturni à Sole, vicibus pluſquam 360. Qui Terram Planetis, & Solem Fixis annumerant, longiùs amovebunt Fixas argumentis ſequentibus. Ex Telluris motu annuo oriri debet tranſlatio Fixarum inter ſe, parallaxi duplicatæ propemodum æqualis. At Stellæ majores & propiores, reſpectu ulteriorum, quæ per Teleſcopia ſolummodo viſuntur, nondum moveri notantur. Demus motum eorum minorem eſſe minutis viginti ſecundis, & diſtantia Fixarum proximarum ſuperabit mediocrem diſtantiam Saturni vicibus 2000. Rurſus Saturnus diſco ſuo 17″, vel 18″, lato excipit $\frac{1}{2100000000}$ partem circiter lucis Solaris. Namque tanto minor eſt diſcus ille ſuperficie totâ ſphæricâ orbis Saturnii. Si Saturnus reflectere ſupponatur quaſi partem quartam hujus lucis, lux

De Fixarum diſtantiâ.

lux tota quæ ab ejus hemiſphærio lucido reflectitur, erit quaſi $\frac{1}{42000000000}$ pars lucis totius manantis ab hemiſphærio Solis. Ergo cùm lux rareſcat in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis lucentis, ſi Sol magis diſtaret quàm Saturnus vicibus $10000 \times \sqrt{42}$, hic appareret æquè lucidus ac jam Saturnus apparet, abſque annulo ſuo; atque adeò paulo lucidior foret quàm Stella fixa primæ magnitudinis. Ponamus igitur diſtantiam, quâ Sol luceret ut Fixa, majorem eſſe quàm diſtantia Saturni quaſi vicibus 100000, & ipſius diameter apparens erit $7''''$. $16'''''$. parallaxis autem à Terræ motu annuo orta $13''''$. Atque tanta erit diſtantia, diameter apparens, & parallaxis Fixarum magnitudinis primæ, Soli noſtro, quoad magnitudinem & lucem, æqualium. Fingere quidem licet partem bene magnam lucis Fixarum, in tranſitu ſuo per tanta ſpatia, ſiſti & interire, adeoque Fixas propiùs admoveri debere: verùm hâc ratione Fixæ ulteriores vix conſpici poſſent. Demus verbi gratiâ tres quartas lucis partes interire in tranſitu à Fixis proximis ad nos, & partes tres quartæ bis interibunt in tranſitu per duplum ſpatium, ter in tranſitu per triplum, & ſic deinceps; adeoque Fixæ quæ ſunt duplo remotiores erunt ſexdecim vicibus obſcuriores; nimirum quadruplo obſcuriores ob diminutam diametrum apparentem, atque rurſus quadruplo obſcuriores ob amiſſam lucem; & eodem argumento Fixæ triplo remotiores erunt $9 \times 4 \times 4$, ſeu 144, vicibus obſcuriores; & Fixæ quadruplo remotiores erunt $16 \times 4 \times 4 \times 4$, ſeu 1024, vicibus obſcuriores. Tanta autem lucis diminutio cum phænomenis, & hypotheſi quòd Fixarum diverſæ ſunt diſtantiæ, neutiquam conſiſtit.

Cometas, quoties in conſpectum veniunt, eſſe Jove propiores, probatur ex parallaxi in longitudinem.

58. Tantis igitur intervallis ab invicem diſtantia ſidera nec trahent ſe mutuò ſenſibiliter, nec à Sole noſtro trahentur. At Cometas vi circumſolari obnoxios eſſe neceſſe eſt: etenim ut defectus parallaxeos diurnæ extulit eos regionibus ſublunaribus, ſic ex parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes, ſub exitu apparitionis, aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores, ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum, ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi

Terra

Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ſitu. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometâ & celeriùs fertur, Cometa fit retrogradus; ſi tardiùs, fit ſaltem tardior; & Terra pergente ad contrarias partes, celerior. Et colligendo differentias inter motus celeriores & tardiores, atque ſummas motuum celeriorum & retrogradorum, eaſque cum ſitu & motu Terræ, ex quibus oriuntur, conferendo; prodiit mihi, ex hâc parallaxi, diſtantia Cometarum, quo tempore nudis oculis videri deſinunt, minor ſemper quàm diſtantia Saturni, & ut plurimum minor quàm diſtantia Jovis.

59. Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis, quamdiu moventur celeriùs; at in fine curſûs, ubi motus apparens à parallaxi oriundus majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas meo computo collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt, quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendant ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Probatur ex parallaxi in latitudinem.

60. Confirmatur præterea tanta propinquitas ex parallaxi orbis annui, quatenus ea præterpropter colligitur per hypotheſin, quòd Cometæ moventur uniformiter in lineis rectis. Nota jam eſt methodus (à *Keplero* tentata, à *Walliſio* & *Wrennio* perfecta) colligendi diſtantiam Cometæ juxta hanc hypotheſin ex quatuor obſervationibus: & Cometæ ad hanc regularitatem reducti tranſire ſolent per medium regionis Planetarum. Ut Cometæ annorum 1607 & 1618 inter Solem & Terram, deſiniente *Keplero*; ille anni 1664, infra orbem Martis; & iſte anni 1680, infra orbem Mercurii; deſinientibus *Wrennio* & aliis. Per ſimilem hypotheſin rectilineam, *Hevelius* Cometas omnes, quorum obſervationes extant, locavit infra orbem Jovis. Errant igitur, & abſque calculo Aſtronomico loquuntur, qui, ex regulari motu Cometarum, vel ablegant eos in regiones Fixarum, vel motum Telluri denegant; cùm non poſſint eorum motus ad omnimodam regularitatem ſatis reduci, niſi ex admiſſo tranſitu per regiones Telluri

Probatur aliter ex parallaxi.

Telluri moventi vicinas. Et hæc ſunt argumenta ex parallaxi, quatenus ea abſque exactâ cognitione orbium & motuum Cometarum determinari poſſit.

Ex luce capitum probatur Cometas deſcendere ad orbem Saturni.

61. Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ; in duplicatâ ratione ob auctam diſtantiam à Sole, & in alia duplicatâ ratione ob diminutam apparentem diametrum. Inde intelligitur, quòd Saturnus ob duplam diſtantiam & dimidiam ferè diametrum apparentem, apparere debet quaſi 16 vicibus obſcurior quàm Jupiter; & quòd, ſi diſtantia ejus eſſet quadruplo major, foret lux ejus 256 vicibus minor, adeoque nudis oculis cerni vix poſſet. Cometæ autem non raró æquant Saturnum luce ſuâ, nec tamen ſuperant ipſum diametris apparentibus. Cometa anni 1678, juxta obſervationem *Hookii*, æquabat luce ſuâ Fixas primæ magnitudinis; & caput ejus, ſeu Stella in medio comæ, per teleſcopium pedum quindecim viſum, apparebat æquè lucidum ac Saturnus propè Horizontem; diameter verò capitis erat ſolummodo 25″, id eſt eâdem ferè cum diametro circuli æquantis Saturnum cum annulo. Coma capiti circumfuſa erat quaſi decuplo latior, nimirum $4\frac{1}{6}$ min. Rurſus Cometæ anni 1682 minima capillitii diameter, per tubum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem, ſeu Stella in medio, vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantùm 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis ſuperabat Cometam anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Adde quòd Cometa anni 1665, menſe *Aprili*, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſuâ pene Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′; at nucleus cum Planetis, ope Tubi optici, collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Adde annulum, & Saturni facies jam dupla erit; lux verò haud intenſior quàm Cometæ; proindeque Cometa propior erat Soli quàm Saturnus. Ex proportione nuclei ad capilli-

tium, his obſervationibus patefactâ, & latitudine, quæ rarò ſuperat 8′ vel 12′, patet ſtellas Cometarum, ut plurimum, ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis; lucem verò interea cum luce Saturni non rarò conferri poſſe, eamque aliquando ſuperare. Et inde diſtantias eorum in periheliis vix eſſe majores quàm Saturni. In diſtantiâ duplo majore lux foret quadruplo minor, & fuſco pallore tantum cederet luci Saturni, quantum lux hujus cedit ſplendori Jovis: quæ differentia facilè notari poſſet. In diſtantiâ verò decuplo majore, corpora eorum ſuperarent corpus Solis, lux autem cederet luci Saturni vicibus centum. Inque diſtantiis majoribus corpora longe ſuperarent Solem, at in tenebris profundis conſtituta non amplius cernerentur. Tantùm abeſt ut, Sole noſtro in Fixis numerato, Cometæ ad medias regiones inter Solem & Fixas amoveantur. Ibi certè non multo magis illuſtrari deberent à Sole, quàm nos illuſtramur à maximâ Fixarum.

Ut & longè infra orbem Jovis, & quandoque infra orbem Terræ.

62. Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propiùs ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copiâ lucis, à ſe reflexæ, Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit, Cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, ut ex parallaxi probavimus. Idem verò quàm maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu, minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus, à capite ſemper ortus, per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. Poſteriore, referenda eſt lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Quòd ſi imagineris lucem hanc omnem congregari, & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò propior. Sic Cometa anni 1679, *Decembris* 12 & 15 ſtylo veteri, quo tempore caudam clariſſimam emittebat, & luci multorum Jovium, per tantum ſpatium diffuſæ ac dilatatæ, non imparem; magnitudine nuclei (ut obſervabat *Flamſtedius*) cedebat Jovi, adeoque erat Soli longè vicinior. Quini-

mo minor erat Mercurio: nam die 17 menſis hujus, ubi Terræ propior erat, apparuit *Caſſino* per teleſcopium pedum 35, paulo minor globo Saturni. Die octavo menſis hujus, tempore matutino, vidit *Hallejus* caudam perbrevem & latam, & quaſi ex corpore Solis jamjam orituri exeuntem, ad inſtar nubis inſolito more fulgentis, nec prius diſparentem quàm Sol ipſe inciperet ſupra horizontem conſpici. Superabat igitur hic ſplendor lucem nubium uſque ad ortum Solis; &, immediato Solis ſplendori ſolùm cedendo vincebat longè lucem omnium ſtellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipſa Luna, in tantâ Solis orientis vicinitate, cerni ſolet. Fingas lucem hancce dilatatam congregari, & in orbem nuclei Cometici, Mercurio minorem, coarctari: & ſplendore longè fortiori jam reddita magis conſpicua, Mercurium longè ſuperabit, adeoque erit Soli vicinior. Diebus 12 & 15 ejuſdem menſis, cauda hæc, per ſpatium longè majus diffuſa, apparuit rarior; at luce tamen adeo forti, ut, ſtellis fixis vixdum apparentibus, cerneretur; & mox trabis mirum in modum fulgentis ſpeciem exhibuit. Ex longitudine quadraginta vel quinquaginta graduum & latitudine duorum quantitatem lucis totius computes.

Idem probatur ex inſigni ſplendore caudarum in viciniâ Solis.

63. Confirmatur verò tantus Cometarum ad Solem acceſſus, ex ſitu eorum ubi maximè fulgent. Nam capite per Solem tranſeunte, & ſub radiis Solaribus adhuc latente, narrantur caudæ omnium fulgentiſſimæ de horizonte ad modum trabium ignearum exiiſſe; dein, capite in conſpectum veniente & longiùs à Sole recedente, ſplendorem ſemper minui, & in pallorem viæ lacteæ ſimilem, ſed imprimis multò magis conſpicuam, poſtea verò langueſcentem abire. Talis erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus *lib.* 1. *Meter.* 6. cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quòd ante Solem vel ſaltem ſub radiis Solaribus occidiſſet; ſequente verò die, quantum potuit viſum eſt. *Nam quàm minimâ fieri poteſt diſtantiâ, Solem reliquit, & mox occubuit.* Ob nimium ardorem, caudæ ſcilicet, nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed *procedente tempore* (ait *Ariſtoteles*) *cùm* cauda *jam minus flagraret, reddita eſt* capiti *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem*, id eſt ad 60^{gr}. *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum* Orionis *ibi evanuit.* Ejuſdem generis Cometas duos *Juſtinus lib.*

37 deſcribit, quos ait ita luxiſſe, *ut Cœlum omne conflagrare videretur, & magnitudine ſui quartam Cœli partem occupâſſe, & fulgore ſui Solis nitorem viciſſe.* Quibus ultimis verbis juxtapoſitio ardoris Cometici & Solis orientis vel occidentis inſinuatur. Accedit Cometa anni 1101, vel 1106, cujus ſtella erat parva & obſcura, ut ille anni 1680; *ſed ſplendor, qui ex eâ exivit, valde clarus, & quaſi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi Monacho*: apparuit initio menſis *Feb.* circa veſperum ad occaſum Solis brumalem. Inde & ex ſitu caudæ, colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno, ab horâ tertiâ*, rectius ſextâ, *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Cometa anni 1264, menſe *Julio*, aut circa Solſtitium, præcedebat Solem orientem, magnâ luce uſque ad medium Cœli verſus occidentem radios ſuos emittens. Et initio paulum aſcendebat ſupra horizontem; ſed, progrediente Sole, diſcedebat indies ab horizonte, donec tandem ipſum Cœli medium præteriret. Dicitur autem fuiſſe principio magnus & clarus, comam habens latam, quæ de die in diem cœpit deficere. Deſcribitur autem in *Append. Matth. Paris, Hiſt. Angl.* in hunc modum. *A. C.* 1265 *apparuit Cometa tam notabilis, ut nullus tunc vivens viderit talem priùs. Ab oriente enim cum magno fulgore ſurgens, uſque ad medium Hemiſphærii verſus occidentem omnia perlucidè pertrahebat.* Anno 1401, vel 1402, Sole infra horizontem demerſo, apparuit in occidente *Cometa lucidus ac clarus, comam erectam explicans ignis flammantis ſpecie, non ſecus ac haſtam ab occaſu in ortum radios jaculans; à Sole, infra horizontem demerſo, propriis radiis effuſis omnes orbis Terræ terminos coluſtrabat; nec aliis ſtellis lumen exſerere concedebat, aut aerem noctis umbrâ infuſcari: quòd ejus lumen aliorum ſplendorem vinceret, & ad Cœli verticem flammans protenderetur quamdiu ſupra horizontem extabat, &c. Hiſt. Byzant. Ducæ Michaelis Nepotis, cap.* 16. Ex ſitu caudæ, & tempore hujus primæ apparitionis, colligitur caput tunc fuiſſe vicinum Soli, & indies à Sole receſſiſſe: nam Cometa ille tres menſes perduravit. Anno 1527, *Aug.* 11, circa horam quartam matutinam viſus eſt per totam ferè *Europam* Cometa terrificus in *Leone*, duravitque per horam unam & quadrantem quotidiè flagrans. A ſubſolano ortus eſt

4 verſuſque

verſuſque meridiem, & occidentem aſcendit longitudine immenſâ; ſub ſeptentrione autem maximè conſpicuus fuit, & nube (id eſt caudâ) terribilis deſcribitur, ex mente plebis formam habens brachii incurvati cum gladio ingentis magnitudinis. Anno 1618, diebus extremis *Novembris*, increbuit rumor apparere ſub ortum Solis trabem candidam, quæ fuit nimirum cauda Cometæ, capite adhuc intra radiorum claritatem deliteſcente. *Novemb.* 24. & deinceps viſus eſt Cometa clarâ luce, capite & caudâ clariſſimis. Longitudo caudæ, quæ primùm graduum erat 20, vel 30, crevit uſque ad *Decemb.* 9, quando evaſerat graduum 75, at luce dilutiore ſemper & rariore quàm ſub initio. Anno 1668, *Mart.* 5, *ſt. n.* horâ ſeptimâ veſp. *Pater Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit horizonti proximum, ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in litore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; cauda ſub initio ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela, ſpeciem habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum. Poſtea verò luce decreſcente, aucta eſt magnitudine, quoad uſque Cometa apparere deſiit. Unde & *Caſſinus Bononiæ Martii* 10, 11 & 12, de horizonte exeuntem vidit ad longitudine graduum 32. In *Portugalliâ* verò quartam ferè Cœli partem, id eſt gradus 45, occupâſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenta, nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ manifeſtum eſt, quòd caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, ubi cauda maximè ſplendebat. His omnibus adde Cometam anni 1680, cujus inſignem ſplendorem, in conjunctione capitis cum Sole, jam antè deſcripſi. Arguit autem tantus ſplendor Cometas hujus generis reverâ tranſire per fontem luminis, præſertim cùm caudæ nunquam ita luceant in oppoſitione Solis, neque ibi legantur trabes igneæ apparuiſſe.

Probatur ex luce capitum quatenus ea cæteris paribus major eſt in viciniâ Solis.

64. Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terrâ Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior anni 1665, obſervante *Hevelio*, ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque prætererat perigæum; ſplendor verò capitis

capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa, radiis Solaribus obtectus, deſiit apparere. Cometa anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine menſis *Julii*, ubi primùm conſpectus eſt, tardiſſimè movebatur minutos primos 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur, uſque ad *Sept.* 4, quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat: id quod etiam ex diametro capitis, micrometro menſuratâ, colligitur; quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6, eſſe tantùm 6′. 5″, incluſâ comâ; at *Sept.* 2, eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longè minus apparuit, quàm in fine motûs: at initio tamen, in viciniâ Solis, longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium menſis *Decembris*, & iſte anni 1680, circa finem ejuſdem menſis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in perigæis: verùm ſplendor maximus capitum contigit ante duas ferè ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis ſolaribus, & ſplendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate Solis. Die 12 menſis *Decembris*, conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantiâ novem graduum à Sole, id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17, apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velociſſimè motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat *Ori Pegaſi*, ſtellæ tertiæ magnitudinis; *Jan.* 3, apparebat ut ſtella quartæ; *Jan.* 9, ut ſtella quintæ; *Jan.* 13, ob ſplendorem Lunæ creſcentis, diſparuit; *Jan.* 25, vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Caput verò Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1, majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parvum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7, *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Si ſumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita, in longinquis regionibus poſita, luxiſſent ante & poſt æqualiter; id adeo ob æquales diſtantias à Terrâ. Quòd uno caſu maximè luxerunt, altero evanuerunt, vicinitati Solis in priore caſu,

caſu, diſtantiæ ejus in poſteriore aſcribendum eſt. Et ex magnâ illâ lucis utriuſque differentiâ concluditur magna vicinitas in priore. Nam lux Cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere, ubi capita velociſſimè moventur, atque adeo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in viciniâ Solis.

Idem confirmatur ex magno numero Cometarum viſorum in regione Solis.

65. Ex his intellexi tandem, cur Cometæ tantopere frequentent regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur, & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verùm percurrendo hiſtorias Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio Solem verſus, quàm in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux Solaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à Sole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quàm ſint ipſo Jove propiores. Spatii autem, tantillo intervallo circa Solem deſcripti, pars longè major ſita eſt à latere Terræ, quod Solem reſpicit; inque parte illâ majore, Soli utplurimum viciniores, magis illuminari ſolent. Per orbium quoque inſignem excentricitatem fit, ut Apſides imæ ſint Soli longè propiores, quàm ſi revolutiones in circulis Soli concentricis peragerentur.

Confirmatur etiam ex caudis majoribus & ſplendidioribus poſt conjunctionem capitum cum Sole quam antea.

66. Hinc etiam intelligimus, quare Cometarum caudæ in capitibus ad Solem properantibus raræ ſemper & breves apparent, & vix longitudinem graduum 15 vel 20 ſuperâſſe leguntur; at in receſſu capitum à Sole, fulgent ſæpe ad inſtar trabium ignitarum, & mox ad gradus 40, 50, 60, 70, & ultra, in longum porriguntur. Oritur utique tantus caudarum ſplendor tantaque longitudo ex calore Solis Cometam prætereuntem calefaciente. Et inde colligere videor, Cometas omnes, quorum tales ſunt caudæ, tranſiiſſe per viciniam Solis.

Cauda oriri ex atmoſphæris Cometarum.

67. Inde etiam colligere licet, quòd caudæ oriantur ex Atmoſphæris capitum. Eſt autem de Caudâ opinio triplex: eam vel jubar eſſe Solis, per tranſlucidum Cometæ caput propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite Cometæ in Terram; vel denique nubem, eſſe ſeu vaporem, à capite Cometæ jugiter ſurgentem, & abeuntem in partes à Sole adverſas. Opinio prima

prima eorum eſt, qui nondum imbuti ſunt ſcientiâ rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur à pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: adeoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aëre clariore, tenuius, & ægrè ſenſibile; in Cœlis autem, abſque materiâ reflectente, nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, & eâ ratione res redit ad opinionem tertiam. Nam materia illa reflectens non alibi reperiri debet quàm in regione caudæ, ne Cœlum totum, luce Solis illuſtratum, uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus; qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum, diſtinctè ad nos tranſmiſſa, demonſtrat Medium cœleſte nullâ vi refractivâ pollere. Nam quòd dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſimè contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt; quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt, quòd ſcintillatio in priore caſu generetur, in poſteriore verò ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos, abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat, quòd caudæ non ſoleant videri in Cometis, cùm eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos; & propterea caudas Fixarum non cerni; ſciendum eſt, quòd lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt, & valdè obtuſa. Sic enim Cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſuâ vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gra-

dus 40, 50, 60, longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28, caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantùm magnitudinis, cauda verò, luce quidem pertenui at ſatis ſenſibili, longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum, vel paulo ultra. Sed & *Feb.* 9 & 10, ubi caput nubis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa, in iiſdem cœli regionibus, in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa anni 1680 *Decemb.* 28, hora $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, verſabatur in ♓. 8°. 41′, cum latitudine boreali 28°. 6′; Sole exiſtente in ♑. 18°. 26′. Et Cometa anni 1577, *Decemb.* 29. verſabatur in ♓. 8°. 41′, cum latitudine boreali 28°. 40′, Sole etiam exiſtente in ♑. 18°. 26′, circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ, ex meis & aliorum obſervationibus, declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore verò, ex obſervationibus *Tychonis*, declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur, repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut phænomena Caudarum ex materiâ aliquâ reflectente deriventur. Vapores autem qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum atmoſphæris oriri poſſe ſic facilè intelligetur.

Aeris & vaporum immenſam eſſe raritatem in ſpatiis cœleſtibus: & perexiguam vaporum quantitatem ad phænomena caudarum efficere.

68. Aer, juxta ſuperficiem Terræ, ſpatium occupare noſcitur quaſi 1200 vicibus majus quàm Aqua ejuſdem gravitatis; adeoque aëris columna cylindrica pedes 1200 alta, ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea, ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 1200 dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ pedum 32. Igitur in altitudine pedum 1200, ſeu ſtadiorum duorum, eſt pondus aëris incumbentis minus, atque adeo raritas aëris compreſſi major, quàm juxta ſuperficiem Terræ, in proportione 33 ad 32.

Quo

(m) Vide Tractatum Noſtrum de Atmoſphærâ, in Actis Philoſophicis Societatis Regiæ Londinenſis.

Quo cognito computare jam licet raritatem aëris per regiones univerſas (ſubſidio Corollarii Propoſitionis XXII. *Libri Secundi Principiorum*) ex hypotheſi quòd Aeris expanſio ſit compreſſioni reciprocè proportionalis: comprobata eſt enim hæc proportio tum *Hookii* tum aliorum experimentis. Computationem ſubjunximus in Tabulâ ſequente, ubi columna prima deſignat altitudinem Aeris in milliaribus, quorum 4000 æquent ſemidiametrum Terræ; ſecunda, compreſſionem Aeris, ſeu pondus incumbens; ac tertia, raritatem ſeu extenſionem Aeris ejuſdem, poſito quòd gravitas decreſcat in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro Terræ. Latinorum verò characteres numerales hîc uſurpantur pro certo circulorum numero, ut ſcribendo 0,XVII 1224 pro 0,000000000000000001224 & 26956 XV pro 26956000000000000000 (m). Ex hâc Tabulâ liquet Aerem in progreſſu ad ſuperiora rareſieri; ut aëris, qui Terræ proximus eſt, ſphæra, diametro digiti unius deſcripta, & eâdem deinceps rarefactione dilatata, in altitudine ſemidiametri unius Terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones aduſque ſphæram Saturni, & longè ultra; atque in altitudine decem ſemidiametrorum Terreſtrium, impleret plus ſpatii quàm cœlum univerſum (juxta computationem ſuperiorem) cis Fixas occupat. Et quamvis ob longè craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque vim centripetam circumſolarem; fieri poſſit, ut Aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat: perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde ſufficere, ex hâc computatione perſpicuum eſt; nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris, luce Solis ſplendens, craſſitudine paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum

A E R I S

Altitudo.	Compreſſio.	Experrectio.
0	33	1
5	17,8515	1,8486
10	9,6717	3,4151
20	2,852	11,571
40	0,2525	136,83
400	0,XVII 1224	26956 XV
4000	0,CV 4465	73907 CII
40000	0,CXCII 1628	20263 CLXXXIX
400000	0,CCX 7895	41798 CCVII
4000000	0,CCXII 9878	33414 CCIX
Infinita.	0,CCXII 6041	54622 CCIX

craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur.

Quo pacto Caudæ oriri poſſint ex atmoſphæris capitum.

69. Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum, & progreſſum in partes à Sole averſas, *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere non eſt à ratione prorſus alienum, non obſtante quòd ſubſtantiæ craſſæ, impeditiſſimis in regionibus noſtris, à radiis ſenſibiliter propelli nequeant. Auctor alius particulas tam leves quàm graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, adeoque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum oriri. Aſcendit fumus in camino, impulſu aëris cui innatat. Aer ille, per calorem rarefactus, aſcendit ob diminutam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media, quæ permeant, niſi in reflexione & refactione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa, calore ſibi communicato, rarefiet; &, ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam quâ prius tendebat in Solem, aſcendet inſtar fluminis (n), & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: impetu etiam lucis ſolaris, ut jam dictum eſt, aſcenſum promovente.

Eaſdem ex his atmoſphæris oriri docetur ex ipſarum variis phænomenis.

70. Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averſas aſcendere, confirmatur præterea, ex legibus quas obſervant. Ut quòd in planis orbium Cometarum, per Solem tranſeuntibus, jacentes deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quòd ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor eſt, ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ; ut & ubi caput ad Solem propiùs accedit. Quòd caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurventur. Quòd curvatura major

(n) Fallor ni auctor ſcripſerit, *inſtar fumi*.

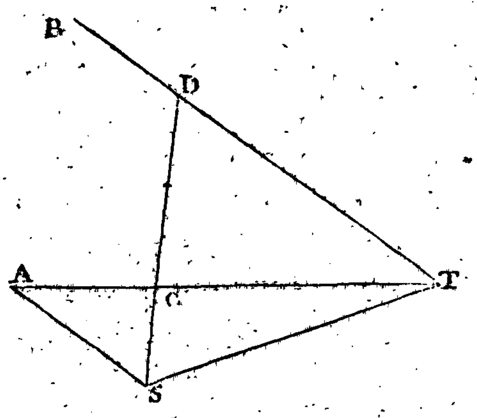
eſt,

eſt, ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quòd deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque adeo quòd cauda, convexo ſui latere, partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quòd caudæ, quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulò ſplendidiores, & limite minus indiſtincto terminatæ quàm ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quo caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus; ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole, uti jam dictum eſt; & ſuperiora vel rectà petere, ſi corpus fumans quieſcit, vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit, à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit, ubi aſcenſus vaporis velocior eſt, nimirum in viciniâ Solis & juxta corpus fumans. Namque ibi potentior eſt vis illa Solaris, quâ vapor aſcendit. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna, & quia vapor in columnæ latere præcedente paulò recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſiùs reflectet, & limite minùs indiſtincto terminabitur; vapore ad latus alterum paulatim langueſcente, & ex oculis ſenſim evaneſcente.

71. Cæterùm rerum naturalium cauſas reddere non eſt hujus inſtituti: vera an falſa fuerint hæc quæ modò dicta ſunt, id ſaltem in ſuperioribus confecimus; Radios à caudis Cometarum ſecundum lineas rectas per cœlos propagari, adeoque à partibus cœlorum venire, in quibus caudæ ſpectatoribus ubicumque conſtitutis apparent, quæque adeo à capitibus Cometarum in regiones à Sole averſas, porriguntur. Et hoc fundamento limitem denuò Cometarum diſtantiis in hunc modum ponimus. *Cometas infra orbem Mercurii quandoque deſcendere probatur ex caudis.*

Repreſentet S Solem; T, Terram; STA, diſtantiam Cometæ à Sole; & ATB, apparentem longitudinem caudæ. Et quoniam lux propaga-

tur



tur à termino caudæ ſecundum lineam rectam TB, reperietur terminus ille alicubi in lineâ TB. Sit ipſe punctum D, jungeque DS, ſecantem lineam TA in C. Et quia cauda ſemper opponitur Soli quamproximè; & propterea Sol, caput Cometæ, & terminus caudæ jacent in directum: reperietur caput Cometæ in C. Ipſi TB parallelam age SA, occurrentem lineæ TA in A, & Cometæ caput C neceſſariò reperietur inter T & A; eò quòd terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ TB, & lineæ omnes SD, quæ ab S ad lineam TB duci poſſunt, ſecant lineam TA alicubi inter T & A. Quare Cometa non poteſt longiùs abeſſe à Terrâ, quàm intervallo TA; nec à Sole, quàm intervallo SA ultra Solem, vel ST citra. Exempli gratiâ, *Decemb.* 12, 1680, Cometa diſtabat 9^gr. à Sole, & longitudo caudæ erat 35^gr. ad minimum. Conſtituatur ergo triangulum TSA; cujus angulus T æquetur diſtantiæ graduum 9; & angulus A, angulo ATB ſeu longitudini caudæ graduum 35; & erit SA ad ST, id eſt limes maximæ poſſibilis diſtantiæ Cometæ à Sole, ad ſemidiametrum orbis magni, ut ſinus anguli T ad ſinum anguli A, hoc eſt ut 3 ad 11 circiter. Quare Cometa eo tempore minus diſtabat à Sole quàm $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ Terræ à Sole; & propterea verſabatur aut intra orbem Mercurii, aut inter orbem illum & Terram. Rurſus *Decemb.* 21. diſtantia Cometæ à Sole erat $32\frac{2}{3}$gr. & longitudo caudæ 70^gr. Ergo ut ſinus $32\frac{2}{3}$gr. ad ſinum 70^gr. hoc eſt ut 4 ad 7, ita erat limes intervalli inter Cometam & Solem ad diſtantiam Terræ à Sole; & propterea Cometa nondum exceſſerat orbe Veneris. *Decemb.* 28. diſtantia Cometæ à Sole erat 55^gr. & longitudo caudæ 56^gr. Ergo limes intervalli inter Cometam & Solem nondum æquabat diſtantiam Terræ à Sole: & propterea Cometa nondum exceſſerat orbe Telluris. Ex parallaxi autem colligitur, quòd exceſſus ille incidit in *Jan.* 5, circiter, quódque Cometa deſcendebat longè infra orbem Mercurii. Concedamus ipſum in perihelio fuiſſe *Decemb.* 8. quo tempore cum Sole conjungebatur; & in itinere à perihelio ad exitum de orbe Telluris,

conſumentur dies 28, adeoque diebus viginti ſex vel ſeptem ſequentibus, quibus oculo inermi videri deſiit, vix duplicabat diſtantiam ſuam à Sole. Iiſdem argumentis limitando diſtantias aliorum Cometarum, pervenitur tandem ad hanc concluſionem: quòd Cometæ omnes, quamdiu ſe nobis oſtendunt, verſantur intra ſpatium ſphæricum centro Sole & intervallo Solis ac Terræ vel duplicato, vel ad ſummum triplicato, deſcriptum.

Cometas moveri in Sectionibus Conicis umbilicum habentibus in centro Solis; & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribere temporibus proportionales.

72. Verſantur igitur Cometæ, toto apparitionis tempore, intra ſphæram activitatis vis circumſolaris, adeoque agitantur ipſius impulſu & propterea (per Corol. 1. Prop. XIII. *Libri* 1. *Princip.*) deſcribunt Conicas Sectiones umbilicos habentes in centro Solis, & radiis ad Solem ductis conficiunt areas proportionales temporibus. Nam vis illa, in immenſum propagata, reget motus corporum longè ultra orbem Saturni.

Sectiones illas Conicas eſſe Parabolis finitimas. Id ex velocitate Cometarum colligitur.

73. Cæterùm de Cometis Hypotheſis eſt triplex: eos vel generari & interire, quoties apparent & evaneſcunt; vel de Fixarum regionibus venientes præterire ſyſtema noſtrorum Planetarum; vel denique circa Solem in orbibus valde excentricis perpetuò revolvi. Caſu primo Cometæ, pro variâ ſuâ velocitate, movebuntur in Sectionibus quibuſcunque Conicis; ſecundo, movebuntur in Hyperbolis; utroque indifferenter frequentabunt regiones omnes tam Polorum quàm Eclipticæ; tertio, motus peragentur in Ellipſibus valde excentricis, & ad ſpeciem Parabolarum quamproximè accedentibus; orbes autem, ſi lex Planetarum ſervetur, haud multum divaricabunt à plano Eclipticæ. Et quantum hactenus animadvertere potui, caſus tertius obtinet. Nam Cometæ maximè frequentant Zodiacum, & vix unquam pertingunt ad latitudinem heliocentricam graduum quadraginta. Moventur etiam in orbibus quamproximè Parabolicis, uti colligo ex eorum velocitate. Nam velocitas quâ Parabola deſcribetur, eſt ubivis ad velocitatem, quâ Cometa vel Planeta in circulo ad eandem à Sole diſtantiam revolvi poſſet, in dimidiatâ ratione numeri binarii ad unitatem (per Corol. 7. Prop. XVI.) Et meo quidem calculo talis circiter reperta eſt Cometarum velocitas. Rem examinavi, colligendo præterpropter velocitates ex diſtantiis, ac diſtantias ex parallaxi & phænomenis caudæ conjunctim. Errores in velocitates exceſſu, vel defectu, haud majores obvenere, quàm qui ex erroribus

bus in diſtantiis, eâ ratione collectis, oriri potuerint. Sed & uſus ſum hujuſmodi ratiocinio.

Quanto tempore Cometæ in Trajectoriis Parabolicis percurrant orbem magnum.

74. Diviſo orbis magni radio in partes mille, deſignent numeri in Tabulæ ſequentis columnâ primâ diſtantiam verticis Parabolæ à centro Solis in his partibus; & Cometa, temporibus in columnâ ſecundâ expreſſis, movebitur à Perihelio ad ſuperficiem ſphæræ, quæ centro Sole & radio orbis magni deſcribitur; & temporibus in Corol. 3, 4 & 5, expreſſis duplicabit, triplicabit & quadruplicabit eandem ſuam à Sole diſtantiam.

T A B. I.

Diſtantia inter centrum Solis & perihelium Cometæ.	Tempus tranſitûs Cometæ à Perihelio ad diſtantiam à Sole radio Orbis magni											
	Æqualem.			Duplicato æqualem.			Triplicato æqualem.			Quadruplicato æqualem.		
	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.
0	27.	11.	12	77.	16.	28	142.	17.	14	219.	17.	30
5	27.	16.	7	77.	23.	14						
10	27.	21.	0	78.	6.	24						
20	28.	6.	40	78.	20.	13	144.	03.	19	221.	8.	54
40	29.	1.	32	79.	23.	34						
80	30.	13.	25	82.	4.	56						
160	33.	5.	29	86.	10.	26	153.	16.	8	232.	12.	20
320	37.	13.	46	93.	23.	38						
640	37.	9.	49	105.	1.	28						
1280	.	.	. .	106.	06.	35	200.	6.	43	297.	3.	46
2560	.	.	. .	.	.	. .	147.	22.	31	300.	6.	03

Quo tempore Cometæ ingrediuntur orbem magnum, & egrediuntur eodem.

Quo tempore Cometa ingreditur ſphæram orbis magni, vel de eâdem egreditur, innoteſcit præterpropter ex parallaxi; expeditius autem per hanc Tabulam.

T A B.

TAB. II.

Diſtantia apparens Cometæ à Sole.	Cometæ motus apparens diurnus in orbe ſuo.		Diſtantia Cometæ à Terrâ in partibus quarum 1000 ſunt radius orbis magni.
	Directus.	Retrogradus.	
gr.	gr. min.	gr. min.	
60	2. 18	0. 20	1000
65	2. 33	0. 35	845
70	2. 55	0. 57	684
72	3. 7	1. 9	618
74	3. 23	1. 25	551
76	3. 43	1. 45	484
78	4. 10	2. 12	416
80	4. 47	2. 49	347
82	5. 45	3. 47	278
84	7. 18	5. 20	209
86	10. 27	8. 19	140
88	18. 37	16. 39	70
90	Infin.	Infin.	00

Quâ velocitate Cometæ anni 1680 orbem magnum trajecerint.

75. Incidit ingreſſus vel egreſſus in tempus diſtantiæ Cometæ à Sole in Columnâ primâ è regione motûs diurni expreſſæ. Sic anno 1681 *Jan.* 4. *ſt. v.* motus diurnus apparens Cometæ in orbe ipſius erat quaſi $3^{gr}. 5'$. Huic reſpondens diſtantia eſt $71\frac{2}{3}^{gr}$. Et aſſecutus eſt Cometa hanc à Sole diſtantiam *Jan.* 4. circa horam ſextam pomeridianum. Rurſus anno 1680, *Novembris* 11, Cometæ qui tunc apparuit motus diurnus erat quaſi $4\frac{2}{3}^{gr}$. & huic reſpondens diſtantia $79\frac{2}{3}^{gr}$. incidit in *Novemb.* 10, paulo antè mediam noctem. Hiſce quidem temporibus Cometæ aſſecuti ſunt diſtantiam quam habuit Terrâ à Sole, & Terrâ jam ferè in Perihelio verſabatur. Computata eſt autem Tabula prior pro mediocri diſtantiâ Terræ à Sole aſſumpta partium 1000, & major eſt hæc diſtantia intervallo, quod Terra quaſi ſpatio diei unius motu ſuo annuo, vel Cometa ſpatio horarum 16 motu ſuo percurrere poteſt. Ut Cometa reducatur ad mediocrem hanc diſtantiam partium 1000, addantur tempori priori & auferantur poſteriori horæ ſexdecim, & tempus prius evadet *Jan.* 4, horâ veſpertinâ 10; poſterius *Novemb.* 10, horâ matutinâ 6 circiter. Ex motuum diurnorum tenore & progreſſu colligitur quòd conjungebatur Cometa uterque cum Sole inter *Dec.* 7, & *Dec.* 9. Inde

ad *Jan.* 4, hor. 10 veſp. ex unâ parte, & *Nov.* 10, hor. 6 mat. ex alterâ, ſunt dies quaſi 28. Atque tot dies (per Tab. I.) in trajectoriis Parabolicis conſumi debebant.

Cometas hoſce non fuiſſe duos ſed unum & eundem Cometam. Quo orbe & qua velocitate hic cœlos trajecit docetur exactius.

76. Cæterum ex coincidentiâ Periheliorum & velocitatum conſenſu veriſimile fit, Cometas hoſce, quos ut duos jam conſideravi, non duos fuiſſe ſed unum & eundem Cometam. Eâ lege orbita hujus Cometæ vel Parabola erit, vel Coniſectio à Parabolâ parum diſcrepans, & ſuperficiem Solis propemodum tanget in vertice. Namque ex Tabulâ II. diſtantia Cometæ à Terrâ erat *Novemb.* 10, partium 360 circiter, & *Jan.* 4, partium 360 circiter. Inde & ex longitudinibus & latitudinibus Cometæ colligitur diſtantiam locorum à ſe invicem in quibus Cometa tunc verſabatur, fuiſſe partium quaſi 280. Hujus dimidium 140 eſt ordinatim applicatam ad orbitam Cometæ, abſcindens partem axis ejus radio orbis magni, ſeu partibus 1000, æqualem circiter. Et inde dividendo quadratum ordinatæ 140 per axis partem abſciſſam 1000, invenietur latus rectum 19,6, ſeu numero rotundo 20: cujus pars quarta 5 eſt diſtantia inter verticem orbitæ & centrum Solis. Diſtantiæ partium 5 in Tabulâ primâ congruunt dies 27, horæ 16, min. 7. Tanto igitur tempore Cometa conficiet iter in orbe Parabolico inter Perihelium ſuum & ſuperficiem ſphæricam orbis magni radio partium 1000 deſcripti, atque adeo tempus illud duplicatum ſeu dies 55 & horas $1\frac{1}{4}$ conſumet motu ſuo toto intra orbem magnum. Atque ita ſe res habet. Namque à *Novemb.* 10, hor. 6 mat. quando Cometa hunc orbem ingreſſus eſt ad *Jan.* 4, hor. 10 veſp. quando is eodem egreſſus eſt ſunt dies 55 & horæ 16. Differentia horarum $7\frac{3}{4}$ in rudi hocce computo contemnenda eſt, & fortè ex motu paulo tardius in orbitâ Ellipticâ confecto oriri poteſt. Inter ingreſſum & egreſſum tempus medium incidit in *Decemb.* 8. *hor.* 2 *mat.* Igitur hoc tempore debuit Cometa reperiri in Perihelio. Et ecce *Hallejus* hoc ipſo die próximè ante ortum Solis caudam perbrevem latam & fulgentiſſimam, uti diximus, ex horizonte perpendiculariter ſurgentem vidit. Ex ſitu caudæ colligitur Cometam jam prætergreſſum fuiſſe Eclipticam, & latitudinem borealem habuiſſe; adeoque Perihelium, quod ex alterâ parte Eclipticæ jacebat, jam tum præteriſſe, nondum tamen perveniſſe ad meridianum Solis. Inter Perihelium itaque & conjunctionem

junctionem Solis Cometa jam conſiſtens verſabatur ante horas paucas in Perihelio. Namque in tantâ Solis viciniâ moveri debuit celerrimè & ſingulis horis gradus fere dimidios apparenter percurrere.

77. Similibus computis colligo quòd Cometa anni 1618 ingreſſus erat ſphæricum limitem orbis magni *Decemb.* 7, ad Solis occaſum. Incidit autem ipſius conjunctio cum Sole in *Novemb.* 9 vel 10 circiter; dies intercedunt quaſi 28, ut in Cometa ſuperiore: nam & ex caudæ magnitudine, quâ par fuit Cometæ ſuperiori, veriſimile eſt ipſum pariter propemodum raſiſſe Solare corpus. Fulſerunt hoc anno Cometæ quatuor, quorum hic fuit ultimus: ſecundum, qui primo conſpectus eſt in viciniâ Solis orientis *Octob.* 31, & mox ſub radiis Solaribus evanuit, ſuſpicor eundem fuiſſe cum quarto, qui de radiis Solaribus emerſit circa *Novemb.* 9. His adde quòd Cometa anni 1607 ſphæram orbis magni ingreſſus fuit, *Sept.* 14. *ſt. vet.* & acceſſit ad minimam ſuam à Sole diſtantiam circa *Octob.* 19; dies intercedunt 35. Diſtantia illa Perihelii à Sole ſubtendebat angulum apparentem quaſi 23^{gr}. ad Terram, adeoque erat partium 390: tot autem partibus in Tab. I. reſpondent dies 34 circiter. Porrò Cometa anni 1665 in ſphæram orbis annui intrabat circa *Mart.* 17, & ad Perihelium accedebat circa *Apr.* 16; intercedentibus diebus 30. Diſtantia inter Perihelium & Solem ſubtendebat angulum quaſi 7^{gr}. ad Terram, adeoque erat partium quaſi 122: & his partibus in Tab. I. reſpondent dies 30. Rurſus Cometa anni 1682 intrabat in ſphæram orbis magni circa *Aug.* 11, & in Perihelio verſabatur circa *Sept.* 16, à Sole tunc diſtans intervallo partium quaſi 350, quibus in Tab. I. congruunt dies $33\frac{1}{2}$. Quinetiam celebris ille Regiomontani Cometa, qui anno 1472, per regionem poli borealis trajiciendo, confecit uno die iter graduum quadraginta, limitem orbis magni ingrediebatur *Jan.* 21, quo tempore polum præteribat: & inde properans ad Solem occultabatur ſub radiis Solaribus in ultimis diebus *Februarii*. Unde veriſimile eſt quòd dies triginta, aut paulò plures, conſumpti ſint inter ingreſſum illum & Perihelium Cometæ, quodque adeo Cometa iſte reverâ non celerior fuerit aliis Cometis, neque aliunde quàm ex tranſitu ſuo per viciniam Terræ tantam aſſecutus ſit celeritatem apparentem.

Quâ velocitate Cometæ moventur, docetur pluribus exemplis.

 78. Eſt

Proponitur inventio Trajectoriæ Cometarum.

78. Eſt igitur Cometarum velocitas, quatenus ea per hujuſmodi computationes nimium rudes definiri queat, ea ipſa quâcum Parabolæ, vel his affines Ellipſes, deſcribi debeant: & propterea, ex datâ inter Cometam & Solem diſtantiâ, datur quamproximè. Et hinc oritur Problema tale.

PROB.

Datur relatio inter velocitatem Cometæ & diſtantiam ipſius à centro Solis; requiritur Trajectoria.

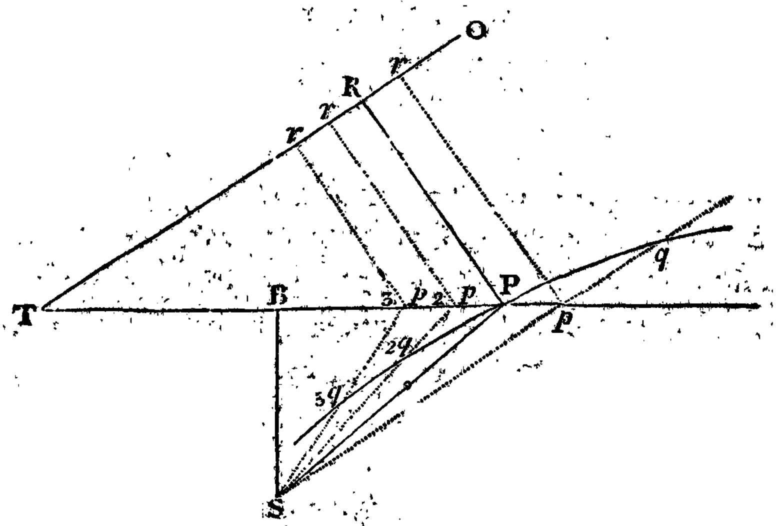
Soluto autem hoc Problemate, habebitur tandem methodus determinandi Trajectorias Cometarum quam exactiſſimè. Nam ſi relatio illa bis aſſumatur, & inde trajectoria bis computetur, deinde ex obſervationibus inveniatur error Trajectoriæ utriuſque; poteſt aſſumptio per regulam falſæ poſitionis corrigi, & ſic tertia inveniri trajectoria quæ cum obſervationibus plane congruet. Et hac methodo determinando Cometarum trajectorias ſciri tandem poteſt exactius quaſnam regiones hæc corpora percurrunt, quantæ ſint eorum velocitates, cujus generis trajectorias deſcribunt, & quænam ſint caudarum veræ magnitudines & formæ pro variis capitum diſtantiis à Sole. Quin etiam ſperandum eſt quod hac methodo ſciri tandem poſſit, utrum Cometæ ſtatis temporibus in orbem redeant, & quibus temporum periodis revolutiones ſingulorum compleantur. Solvitur autem Problema colligendo primum ex tribus vel pluribus obſervationibus motum horarium Cometæ ad tempus datum, deinde ex hoc motu Trajectoriam derivando. Sic pendet inventio Trajectoriæ ab unicâ obſervatione motuque horario tempore illius obſervationis, atque adeo ſeipſam vel probabit vel redarguet: nam concluſo, quæ ex motu horæ unius & alterius & hypotheſi falſâ deducitur, nunquam congruet cum motibus Cometarum à principio ad finem. Methodus computationis totius ita ſe habet.

LEMMA

LEMMA I.

Datas poſitione duas rectas OR, TP, *tertiâ* RP *ad rectum angulum* TRP *ſecare, eâ lege ut ſi ad datum aliquod punctum* S *ducatur recta* SP, *datum ſit contentum Solidum ſub ductâ illâ* SP *&* *quadrato rectæ* OR *terminatæ ad datum punctum* O. In Problematis ſolutionem præmittuntur Lemmata.

Conſit graphicè ſic. Sit contentum illud datum $M^2 \times N$. Ad rectæ OR punctum quodvis r erige perpendiculum rp occurrens ipſi TP in p. Et per puncta S, p, age Sq æqualem $\frac{M^2 \times N}{OR^2}$. Simili Methodo age tres vel plures rectas $S2q$, $S3q$, &c. & per puncta



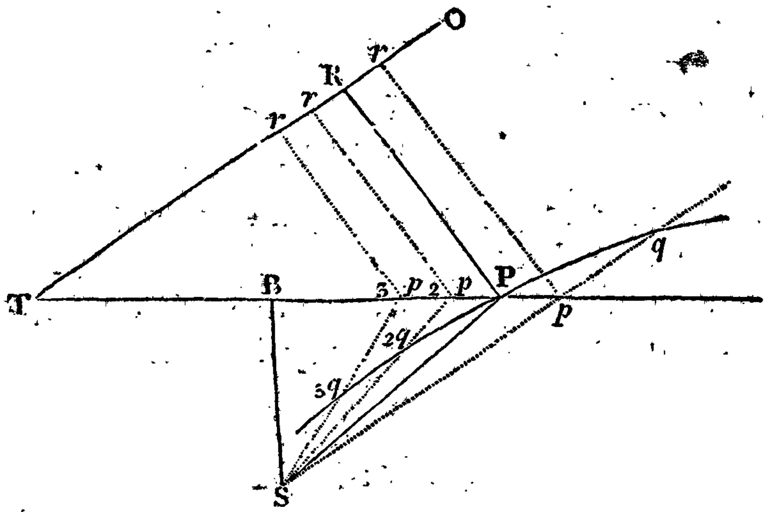
omnia q, $2q$, $3q$ acta linea regularis q, $2q$, $3q$ ſecabit rectam TP in puncto P, à quo demittendum eſt perpendiculum PR. Q. E. F.

Trignometricè ſic. Aſſumatur linea noviſſimè inventa TP, & inde in triangulis TPR, TPS dabuntur perpendicula TR, SB, & in triangulo SBP latus SP & error $\frac{M^2 \times N}{OR^2} - SP$. Fac ut error iſte puta D ſit ad errorem novum puta E, ut error $2p2q \pm 3p3q$ ad errorem $2p3p$, vel error $2p2q \pm D$ ad errorem $2pP$; & error ille novus additus vel ſubductus longitudini TP dabit longitudinem correctam TP ± E. Electio additionis vel ſubductionis inſpectione Schematis dirigitur. Siquando opus fuerit ulteriore correctione, operationem repete.

Arithmeticè ſic. Puta factum, ſitque lineæ TP graphicè inventæ correcta longitudo TP + e: & correctæ longitudines linea-

 rum

rum OR, BP & SP erunt $OR - \frac{TR}{TP}e$, $BP + e$ & $\sqrt{SP^2 + 2BPe + ee} = \frac{M^2 \times N}{OR^2 + \frac{2OR \times TR}{TP}e + \frac{TR^2}{TP^2}ee}$. Unde per methodum ſerierum conver-

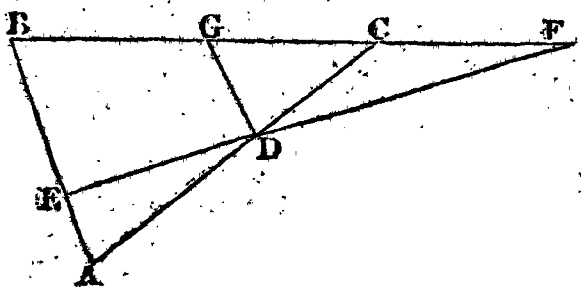


gentium fit, $SP + \frac{BP}{SP}e + \frac{SB^2}{2SP^3}ee$ &c. $= \frac{M^2N}{OR^2} + \frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2N}{OR^3}e + \frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2N}{OR^4}ee$ &c. Pro datis $\frac{M^2N}{OR^2} - SP$, $\frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2N}{OR^4} - \frac{BP}{SP}$, $\frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2N}{OR^4} - \frac{SB^2}{2SP^3}$, ſcribe F, $\frac{F}{G}$, $\frac{F}{GH}$, & ſignis probe obſervatis fiet $F + \frac{F}{G}e + \frac{F}{GH}ee = 0$, & $e + \frac{ee}{H} = -G$. Hinc, neglecto termino perexiguo $\frac{ee}{H}$, prodit $e = -G$. Si error $\frac{ee}{H}$ non eſt contemnendus, pone $-G - \frac{GG}{H} = e$.

Et notâ quòd his inſinuatur Methodus generalis ſolvendi difficiliora Problemata tam Trigonometricè quam Arithmeticè abſque perplexis illis computis & reſolutionibus affectarum æquationum, quæ hactenus in uſu fuerunt.

LEMMA II.

Datas poſitione tres rectas quartâ ſecare, cujus partes interceptæ datam habeant proportionem ad invicem, quæque tranſeat per punctum quod in unâ earum datur.



Dentur poſitione AB, AC, BC, & in AC detur punctum D. Ipſi AB agatur parallela DG occurrens BC in G; capiatur GF ad BG in datâ illâ ratione,

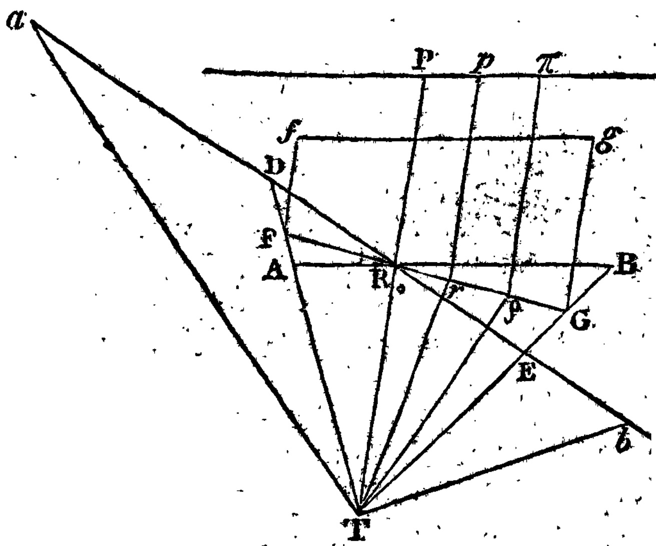
ratione, & agatur FDE: erit FD ad DE ut FG ad BG. Q. E. F.

Trigonometricè ſic. In triangulo CGD dantur anguli & latus CD, & inde latera reliqua, & ex datis rationibus dantur lineæ GF & BE.

LEMMA III.

Ad datum tempus invenire & graphicè exponere motum horarium Cometæ.

Ex obſervationibus probæ fidei dentur tres Longitudines Cometæ. Sunto harum differentiæ ATR, RTB, & requiratur motus horarius ad tempus obſervationis longitudinis intermediæ TR. Ducatur (per Lemma II.) recta ARB, cujus partes interceptæ AR, RB



ſint ut tempora inter obſervationes. Et ſi corpus tempore toto totam percurrat lineam AB uniformiter, & interea ſpectetur de loco T, is erit motus ejus apparens circa punctum R qui fuit Cometæ tempore obſervationis TR quamproximè.

Idem accuratius.

Dentur longitudines hinc inde magis diſtantes Ta, Tb, & (per Lemma II.) ducatur aRb, cujus partes aR, Rb ſint ut tempora inter obſervationes aTR, RTb. Secet hæc lineas TA, TB, in D & E; &: quoniam error inclinationis TRa creſcit quaſi in duplicatâ ratione temporis

temporis inter obſervationes, age FRG, eâ lege ut vel angulus DRF ad angulum ARF, vel linea DF ad lineam AF ſit in duplicatâ ratione temporis totius inter obſervationes *aτb* ad tempus totum inter obſervationes ATB, atque loco lineæ AB ſuperius inventæ uſurpetur linea jam inventa FG.

Convenit angulos ATR, RTB, *a*TA, BT*b* haud minores adhiberi quam decem vel quindecim graduum, ac tempora ipſis reſpondentia haud majora quam dierum octo vel duodecim, atque longitudines capi ubi Cometa celerrimè movetur. Hoc enim pacto errores obſervationum minorem habebunt rationem ad differentias longitudinum.

LEMMA IV.

Ad data tempora invenire longitudines Cometæ.

Fit capiendo in linea FG diſtantias R*r*, Rϱ temporibus proportionales, & ducendo lineas T*r*, Tϱ. Operatio trigonometrica palam eſt.

LEMMA V.

Invenire latitudines.

Ad radios TF, TR, TG erigantur normaliter tangentes obſervatarum latitudinum F*f*, RP, G*g*. Ipſi *fg* parallela ducatur PH. Huic occurrentia perpendicula *rp*, $\varrho\pi$, tangentes erunt latitudinum quæſitarum ad radios T*r*, Tϱ.

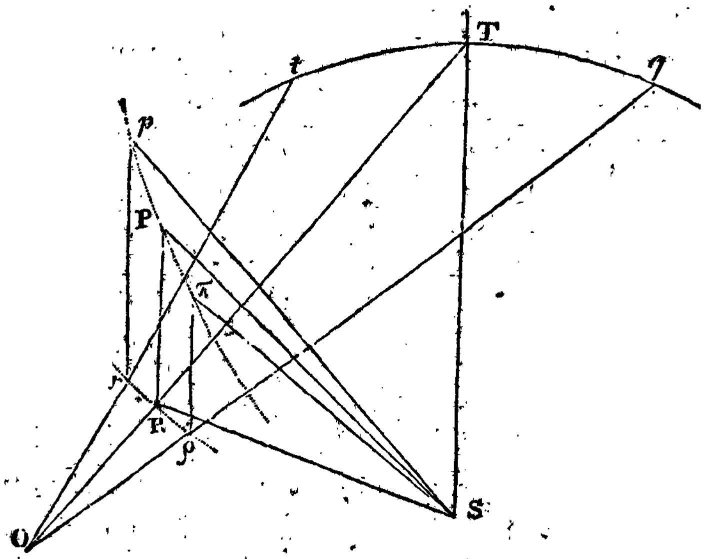
PROB. I.

Ex aſſumpta ratione velocitatis determinare Trajectoriam Cometæ.

Solvitur Problema. Deſignet S Solem; *t*, T, τ loca tria æquidiſtantia Telluris in ipſius Orbitâ; *p*, P, π loca totidem reſpondentia Cometæ in ipſius Trajectoria, interpoſitis inter ſingula intervallis horæ unius; *pr*, PR, $\pi\varrho$, perpendicula demiſſa ad planum Eclipticæ, & *r*Rϱ veſtigium Trajectoriæ in hoc plano. Jungantur S*p*, SP, Sπ, SR, ST, *tr*, TR, τϱ, TP, & coeant *tr*, τϱ in O: converget TR ad idem O quam proximè, error ſaltem contemnendus erit. Per Lemmata præcedentia dantur anguli *r*OR, ROϱ & proportiones *pr* & *tr*, PR ad

TR

TR, $\pi\rho$ ad $\tau\rho$. Datur etiam figura $t\mathrm{T}\tau o$ magnitudine & poſitione, una cum diſtantiâ TS & angulis STR, PTR, STP. Aſſumamus velocitatem Cometæ, in loco P, eſſe ad velocitatem Planetæ gyrantis in circulo ad eandem à Sole diſtantiam SP, ut v ad 1; & deter-



minanda erit linea $p\mathrm{P}\pi$ hâc lege; ut ſit ſpatium à Cometâ duabus horis deſcriptum $p\pi$, ad ſpatium $v\times t\tau$, hoc eſt ad ſpatium quod Tellus eodem tempore deſcribit multiplicatum per numerum v, in dimidiatâ ratione diſtantiæ Telluris à Sole ST ad diſtantiam Cometæ à Sole SP; utque ſit ſpatium pP, horâ primâ à Cometâ deſcriptum, ad ſpatium Pπ horâ ſecundâ à Cometâ deſcriptum, ut velocitas in p ad velocitatem in P; hoc eſt in dimidiatâ ratione diſtantiæ SP ad diſtantiam Sp, ſive in ratione 2SP ad SP + Sp. Minutias enim toto hoc opere negligo, quæ errorem ſenſibilem creare nequeunt.

Imprimis igitur, ut in reſolutione æquationum affectarum Mathematici primâ vice radicem conjecturâ colligunt, ſic in hoc opere analytico, conjecturam faciendo, aſſequor, ut poſſim, diſtantiam quæſitam TR, & (per Lemma II.) duco $r\rho$, primùm ita ut rR & Rρ æquentur; deinde (ubi proportio SP ad Sp hinc innotuerit) ita ut ſit rR ad Rρ, uti 2SP ad Sp + SP: & invenio rationes linearum $p\pi$, $r\rho$, & OR ad invicem. Ponatur eſſe M ad $v\times t\tau$ ut OR ad $p\pi$; &, ob proportionalia $p\pi^2 : \overline{v\times t\tau}|^2 :: \mathrm{ST} : \mathrm{SP}$, erit ex æquo $\mathrm{OR}^2 : \mathrm{M}^2 :: \mathrm{ST} : \mathrm{SP}$; adeoque contentum ſolidum $\mathrm{OR}^2\times\mathrm{SP}$ æquale dato $\mathrm{M}^2\times\mathrm{ST}$.

 Unde,

Unde, ſi triangula STP, PTR, jam locentur in eodem plano, dabuntur TR, TP, SP, PR (per Lemma I.) Hæc omnia perago primùm graphicè, opere celeri & rudi; dein graphicè majori cum diligentiâ; ultimò per computationem numeralem. Tum denuò ſitum linearum $r\varrho$, $p\pi$, determino accuratiſſimè una cum nodis & inclinatione plani $sp\pi$ ad planum Eclipticum; inque plano illo $sp\pi$ (per Prop. XVI. Libri I. Princip. Math.) deſcribo Trajectoriam, in quâ corpus movebitur emiſſum de dato loco P, ſecundum datam rectam $p\pi$, eâ cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem Telluris ut $p\pi$ ad $v\times t$]. Q. E. F.

PROB. II.

Aſſumptam velocitatis rationem & inventam Trajectoriam corrigere.

Adhibeatur obſervatio Cometæ ſub finem motûs, aliave aliqua quàm longiſſimè diſtans ab obſervationibus priùs adhibitis; & radii, qui in illâ obſervatione ad Cometam ducitur, planique $sp\pi$ quæratur interſectio, ut & locus Cometæ in trajectoriâ ad tempus illius obſervationis. Si interſectio iſta incidit in hunc locum, argumento eſt Trajectoriam rectè inventam eſſe. Sin minus, ſumendus erit novus numerus v, & trajectoria nova invenienda; dein locus Cometæ in hâc Trajectoriâ, tempore obſervationis illius probatoriæ, & interſectio radii cum plano Trajectoriæ determinandi ut priùs. Et ex variatione erroris, collatâ cum variatione aliarum quantitatum, colligetur, per regulam auream, quantæ debeant eſſe variationes ſeu correctiones illarum aliarum quantitatum, ut error evadat quàm minimus. Quibus adhibitis correctionibus, habebitur Trajectoria exactè ſatis; poſito quòd computatio innixa fuit obſervationibus exactis, quódque non multum erratum fuit in aſſumptione quantitatis v. Nam ſi multum erratum fuit, iterandum eſt opus eouſque dum Trajectoria inveniatur exactè ſatis. Q. E. F.

THEORIA LUNÆ.

OBSERVATORIUM *Grenovicenſe* occidentalius eſt *Pariſienſi* $2^{gr}. 19'$; *Uraniburgo* $12^{gr}. 51'. 30''$; & *Gedano* $18^{gr}. 48'$. Epochæ motûs medii Solis et Lunæ.

2. Solis & Lunæ motus medios ab æquinoctio verno, in meridiano *Grenovicenſi*, pono ſequentes: nempe *anno* 1680, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis eſt $9^{sig}. 20^{gr}. 34'. 46''$. Apogæi Solis $3^{sig}. 7^{gr}. 23'. 30''$. Motus medius Lunæ $6^{sig}. 1^{gr}. 35'. 45''$. Apogæi Lunæ $8^{sig}. 4^{gr}. 28'. 5''$. Nodi aſcendentis Orbitæ Lunaris $5^{sig}. 24^{gr}. 14'. 35''$. Et *anno* 1700, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis eſt $9^{sig}. 20^{gr}. 43'. 50''$. Apogæi Solis $3^{sig}. 7^{gr}. 44'. 30''$. Motus medius Lunæ $10^{sig}. 15^{gr}. 19'. 50''$. Apogæi Lunæ $11^{sig}. 8^{gr}. 18'. 20''$. & Nodi aſcendentis $4^{sig}. 27^{gr}. 24'. 20''$. Viginti enim annis *Julianis*, ſive diebus 7305, Solis motus eſt $20^{rev}. 0^{sig}. 0^{gr}. 9'. 4''$. Motus Apogæi Solis $21'. 00''$. Lunæ Motus eſt $247^{rev}. 4^{sig}. 13^{gr}. 34'. 5''$. Apogæi Lunaris Motus $2^{rev}. 3^{sig}. 3^{gr}. 50'. 15''$. Nodi Motus $1^{rev}. 0^{sig}. 26^{gr}. 50'. 15''$. Omnes prædicti Motus ſunt à puncto æquinoctii verni. Quòd ſi ab illis ſubducatur ipſius æquinoctialis puncti motus, in antecedentia interea factus, ſc. $16'. 40''$; manebunt motus reſpectu Fixarum in annis 20 *Julianis*: nempe Motus Solis $19^{rev}. 11^{sig}. 29^{gr}. 52'. 24''$. Apogæi Solis $4'. 20''$. Lunæ $247^{rev}. 4^{sig}. 13^{gr}. 17'. 25''$. Apogæi Lunæ $2^{rev}. 3^{sig}. 3^{gr}. 33'. 35''$. Nodi Lunæ $1^{rev}. 0^{sig}. 27^{gr}. 6'. 55''$.

3. Secundum hunc computum Annus Tropicus eſt $365^{dier}. 5^{hor}. 48'. 57''$. Annuſque Sidereus $365^{dier}. 6^{hor}. 9'. 14\frac{1}{2}''$. Annus.

4. Motus Medii Luminarium ſuprapoſiti variis afficiuntur inæqualitatibus.

Et

Et primò ſunt annuæ æquationes dictorum motuum mediorum Solis & Lunæ, & Apogæi Nodique lunæ.

Æquationes Annuæ. 5. Æquatio annua Motûs medii Solis pendet ab excentricitate Orbitæ Telluris circa Solem, quæ eſt partium $16\frac{11}{12}$, qualium mediocris diſtantia Solis à Terra eſt 1000; indeque vocatur Æquatio Centri: eſtque, cùm maxima, $1^{gr}. 56'. 20''$.

Maxima æquatio annua motûs medii Lunæ eſt $11'. 49''$; Apogæi ejus, $20'$; Nodique $9'. 30''$.

Atque quatuor iſte æquationes annuæ ſunt ſemper ſibi mutuò proportionales. Ideoque cùm earum aliqua eſt maxima, tres reliquæ ſunt etiam maximæ; diminutâ vero quâvis, minuuntur etiam & reliquæ in eâdem ratione: unde datâ æquatione annuâ centri Solis, dantur & tres reliquæ annuæ æquationes congruæ; illius igitur Tabula ſufficit. Nam ſi æquatio annua centri Solis, tempori cuivis congrua, inde deprompta vocetur P; & fiat $\frac{1}{10}P = Q$, $Q + \frac{1}{60}Q = R$, $\frac{1}{6}P = D$, $D + \frac{1}{30}D = E$, & $D - \frac{1}{60}D = 2F$; erit æquatio annua eidem tempori congrua Lunæ quidem R; Apogæi Lunaris, E; & Nodi, F. Adnotandum, ſi æquatio centri Solis eſt addenda, æquationem Lunæ prædictam eſſe ſubducendam, Apogæi Lunaris æquationem addendam, Nodi verò æquationem ſubducendam; & è contra, ſi æquatio centri Solis eſt ſubducenda, addenda erit Lunæ æquatio, Apogæi verò ſubducenda, & Nodi addenda.

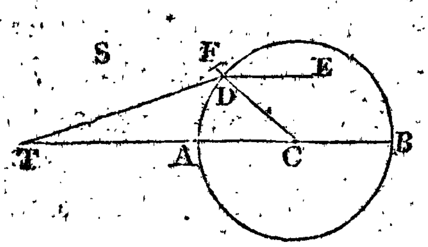
Æquatio Lunæ Prima. 6. Alia eſt æquatio motûs medii Lunæ, pendens à ſitu apogæi Lunaris reſpectu Solis; quæ maxima eſt, cùm apogæum Lunæ verſatur in octante cum Sole; & nulla, cùm illud ad ſyzygias vel quadraturas pervenerit. Æquatio hæc, quando maxima, ad $3'. 56''$ aſcendit, Sole in perigæo verſante; ſi verò Sol apogæum teneat, non ultra $3'. 34''$. In aliis diſtantiis Solis à Terrâ æquatio hæc maxima eſt reciproce ut cubus iſtius diſtantiæ. At cùm Lunæ apogæum eſt extra octantes, æquatio dicta evadit minor; eſtque ad maximam, poſitâ eâdem diſtantiâ Terræ & Solis, ut ſinus duplæ diſtantiæ lunaris apogæi à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium. Additur hæc motui Lunæ, dum lunæ Apogæum tranſit à Solis quadrato ad ſyzygiam; ſed inde ſubducitur, in tranſitu Apogæi à ſyzygiâ ad quadratum.

Æquatio Lunæ ſecunda. 7. Alia porro eſt motûs Lunæ æquatio, pendens ab aſpectu Nodorum

dorum orbitæ lunaris cum Sole; eſtque maxima, cùm nodi in Solis octantibus verſantur; evaneſcitque, cùm hi ad ſyzygias aut aſpectum quadratum appellunt. Æquatio hæc proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ, cúmque maxima ad 47″ aſcendit. Additur hæc motui Lunæ, dum Nodi tranſeunt à Solis ſyzygiis ad ejuſdem quadraturas; & ſubducitur, in eorum tranſitu à quadraturis ad ſyzygias.

Argumentum Annuum, Excentricitas, et Æquatio ſecunda Apogæi.

8. A Solis loco vero aufer motum medium apogæi Lunæ æquatum, ut ſuprà eſt oſtenſum; reſiduum erit argumentum annuum dicti apogæi. Exinde computentur lunæ Excentricitas & ſecunda æquatio ejus Apogæi, modo ſequenti. Referat T Terram; TS, rectam conjungentem Terram & Solem; TACB, rectam à Terrâ ductam ad locum medium Apogæi lunaris, ut ſuprà æquatum; angulus STA, argumentum annuum dicti apogæi; TA, lunaris orbitæ Excentricitatem minimam; TB, ejuſdem Excentricitatem maximam. Biſeca AB in C; centro C per A deſcribe circulum ADB; fiat angulus BCD æqualis duplo argumento annuo: juncta recta TD erit lunaris orbitæ Excentricitas, angulusque BTD erit ſecunda Apogæi lunæ æquatio.



Ad horum determinationem ſit mediocris diſtantia Lunæ à Terrâ, ſivè orbitæ lunaris ſemidiameter, partium 1000000: ejus maxima excentricitas, TB, erit partium 66782, & minima TA earundem 43319; adeo ut maxima orbis ejus æquatio, cum ſc. apogæum eſt in ſyzygiis, ſit 7gr. 39′. 30″, vel forſan 7gr. 40′. 00″ (ſuſpicio enim eſt hanc mutari pro ſitu apogæi in ♋ vel ♑); cùm verò illud in Solis quadrato hæret, dicta maxima æquatio ſit 4gr. 57′. 56″; & ut maxima apogæi æquatio ſit 12gr. 15′. 4″.

Æquatio centri Lunæ.

9. Conſtructâ ex hiſce principiis Tabulâ æquationum Apogæi lunæ & Excentricitatum ejus orbitæ ad ſingulos gradus argumenti annui; unde excentricitas TD & angulus BTD (ſc. æquatio ſecunda & præcipua apogæi) dato tempori congruentes facilè poſſint depromi: ad locum apogæi Lunæ primò æquatum, ut ſuprà, addatur æquatio modò inventa, ſi argumentum annuum minus ſit 90gr, aut majus 180gr, minus verò quàm 270gr; ſecus

verò

verò ab eo ſubducatur: ſumma vel differentia erit Apogæi lunaris locus ſecundò æquatus; quo ſubducto ex Lunæ loco tertiò æquato, relinquitur lunæ Anomalia Media dato tempori congrua. Porro, ex hâc anomaliâ Lunæ mediâ & modò inventâ orbis excentricitate habebitur (ope Tabulæ æquationum centri Lunæ ad ſingulos anomaliæ mediæ gradus, & aliquot excentricitates *v. g.* 45000, 50000, 55000, 60000 & 65000 fabricatæ) proſthaphæreſis ſive æquatio centri Lunæ, ut vulgò; quâ ſubductâ, in priori anomaliæ mediæ ſemicirculo, additâ verò in poſteriori, ad locum Lunæ hactenus ter æquatum, prodit Lunæ locus quartò æquatus.

Variatio. 10. Maxima Lunæ variatiò, ſc. quæ contingit cùm Luna eſt in octantibus Solis, eſt ferè reciprocè ut cubus diſtantiæ Solis à Terrâ. Capiatur ea 37′. 25″ cùm Sol eſt in Perigæo, & 33′. 4″ cùm in Apogæo: fiantque Variationis hujus in octantibus differentiæ reciprocè ut differentiæ cuborum diſtantiarum Solis à Terrâ, & exinde conſtruatur Tabula prædictæ Variationis lunæ in octantibus Solis (ejuſve logarithmi) ad ſingulos denos vel ſenos vel quinos gradus Anomaliæ Mediæ: et pro Variatione extra octantes, fiat ut radius ad ſinum duplæ diſtantiæ Lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ita ſuprà inventa Variatio in octante ad Variationem dato aſpectui congruam; quæ addita loco Lunæ ſuprà invento, in primo & tertio quadrante (computando à Sole) aut ab eodem ſubducta, in ſecundo & quarto, exhibet Lunæ locum quintò æquatum.

Æquatio Lunæ ſexta. 11. Rurſus, ut radius ad ſinum ſummæ diſtantiarum Lunæ à Sole & Apogæi lunæ ab Apogæo ſolis (vel ſinum exceſſûs iſtius ſummæ ſuprà 360$^{gr.}$) ita 2′. 10″ ad ſextam loci Lunæ æquationem; ſubducendam, ſi prædicta ſumma, vel dictus exceſſus, minor ſit ſemicirculo; addendam, ſi major.

Æquatio Lunæ ſeptima. 12. Fiat etiam ut radius ad ſinum diſtantiæ Lunæ à Sole ita 2′. 20″ ad æquationem ſeptimam. Hanc aufer, quando Lunæ lumen augetur; &, è contra, adde cùm illud minuitur; & prodibit Lunæ locus ſeptimò æquatus, quique eſt locus ejus in propriâ orbitâ. Notandum æquationem, quæ hîc effertur per mediocrem quantitatem 2′. 20″, non eſſe ejuſdem ſemper magnitudinis, ſed augeri & minui pro ſitu lunaris Apogæi. Nam ſi apogæum lunare

nare conjunctum fuerit cum Solis apogæo, prædicta æquatio eſt circiter 54″ major; ſin illi oppoſitum, tantundem minor: libratque inter maximam quantitatem 3′. 14″ minimamque 1′. 26″. Atque hæc obtinent, ubi Apogæum lunare eſt in Solis ſyzygiis; ubi verò illud in Solis quadrato hæret, minuenda eſt æquatio prædicta 50 circiter ſcrupulis ſecundis; aut integro ſcrupulo primo, quando apogæum lunæ & ſolis apogæum conjuncta ſunt; ſi verò ſunt oppoſita, propter obſervationum penuriam affirmare nequeo augendane ſit illa, an minuenda. Immo de ſuprapoſitis incremento & decremento æquationis 2′. 20″, propter obſervationum ſatis accuratarum defectum, certo ſtatuere non auſim.

13. Si æquationes ſexta & ſeptima augeantur vel minuantur in ratione reciprocâ diſtantiæ Lunæ à Terrâ, hoc eſt, in directâ ratione parallaxis horizontalis Lunæ; accuratiores fient. Atque iſtud prompte fiet, ſi priùs Tabulæ fuerint conſtructæ ad ſingula ſcrupula dictæ parallaxis, ſingulosque ſenos vel quinos gradus cum argumenti æquationis ſextæ pro æquatione ſextâ, tum diſtantiæ Lunæ à Sole pro ſeptimâ. Emendatio æquationum ſextæ ſeptimæque.

14. A loco Solis vero aufer medium motum Nodi aſcendentis Lunæ æquatum, ut ſuprà; reſiduum erit Nodi argumentum annuum; unde ejus æquatio ſecunda computabitur modo ſequenti. In figurâ præcedente referat ut priùs T Terram; TS, rectam jungentem Terram & Solem: referat porro TACB lineam ductam ad locum Nodi aſcendentis lunæ, ut ſuprà æquatum; & STA, argumentum annuum nodi. Capiatur TA ad AB ut 56 ad 3, ſive $18\frac{2}{3}$ ad 1. Biſeca BA in C; & centro C, intervallo CA, vel CB, deſcribe circulum ADB; fiatque angulus BCD æqualis duplo argumento nodi annuo, ut ſuprà invento; eritque BTD angulus æquatio ſecunda Nodi aſcendentis, addenda in tranſitu Nodi à Solis quadrato ad ſyzygiam, ſubducenda in ejuſdem tranſitu à ſyzygiâ ad quadraturam. Atque ſic habetur locus verus Nodi orbitæ lunaris: unde ex Tabulis, methodo vulgari conſtructis, ſupputabitur Lunæ latitudo & reductio Lunæ ab orbitâ ſuâ ad eclipticam, poſitâ inclinatione orbis lunaris ad planum Eclipticæ 4^{gr}. 59′. 35″, cùm nodi ſunt in Solis quadrato; & 5^{gr}. 17′. 20″ cùm iidem in ſyzygiis verſantur. Ex modò inventis longitudine & Æquatio Nodi ſecunda.

 latitudine,

latitudine, & datâ obliquitate eclipticæ $23^{gr}. 29'$, Lunæ aſcenſio recta & declinatio eruentur.

Lunæ Parallaxis horizontalis, Motus horarius, et Diameter.

15. Lunæ in ſyzygiis, mediocriter diſtantis à Terrâ, parallaxin horizontalem pono $57'.30''$; Motum horarium, $33'. 32''. 32'''$; & diametrum apparentem $31'. 30''$. In quadraturis verò, mediocriter à Terrâ diſtantis parallaxin pono $56'. 40''$; Motum horarium, $32'. 12''. 2'''$; & diametrum apparentem $31'. 3''$. Lunæ in Solis octante, mediocriter diſtantis, centrum diſtat à centro Terræ quaſi $60\frac{2}{9}$ ſemidiametrorum Terræ.

Solis Parallaxis horizontalis et diameter.

16. Solis parallaxin horizontalem pono $10''$; & $32'. 15''$ apparentem ejus diametrum in mediocri diſtantiâ à Terrâ.

Umbra Atmoſphæræ terreſtris.

17. Telluris atmoſphæra, refringendo & diſſipando Solis lumen, umbram projicit, perinde ac ſi opaca foret, ad altitudinem minimùm 40 aut 50 milliarium geographicorum: (Milliare geographicum appello partem ſexageſimam gradûs magni circuli in telluris ſuperficie): umbra hæc, in eclipſi lunari in lunam incidens, telluris umbram auctiorem reddit. Et ſingulis milliaribus atmoſphæræ terreſtris reſpondent ſingula ſcrupula ſecunda in lunæ diſco. Adeoque umbræ terreſtris ſemidiameter, in Lunæ diſcum projecta, augenda eſt 50 circiter ſecundis; aut, quod eodem recidit, in eclipſi lunari Lunæ parallaxis horizontalis augenda eſt in ratione circiter 70 ad 69.

LECTIONES OPTICÆ

Annis MDCLXIX, MDCLXX & MDCLXXI.

IN

SCHOLIS PUBLICIS CANTABRIGIENSIUM

EX CATHEDRA LUCASIANA HABITÆ.

ARGUMENTA CAPITUM

PARTIS PRIMÆ LECTIONUM OPTICARUM.

SECT. I. *Radiorum diverſam eſſe refrangibilitatem.* Pag. 253

SECT. II. *De Menſurâ Refractionum.* 272

SECT. III. *De Planorum Refractionibus.* 294

SECT. IV. *De Refractionibus curvarum ſuperficierum.* 330

OPTICÆ PARS PRIMA.

DE RADIORUM LUCIS REFRACTIONIBUS.

SECTIO PRIMA.

Radiorum diverſam eſſe Refrangibilitatem.

INVENTIO Teleſcopiorum nupera pleroſque Geometras ita exercuit, ut nihil in Opticâ non tritum, nullum inventioni præterea locum aliis reliquiſſe videantur. Et inſuper, cùm Diſſertationes, quas hîc non ita pridem audiviſtis, tantâ rerum Opticarum varietate, novarum copiâ, & accuratiſſimis earundem demonſtrationibus fuerint compoſitæ; fruſtranei forte videantur conatus & labor inutilis, ſi ego ſcientiam hanc iterum tractandam ſuſcepero. Verùm cùm Geometras in quâdam Lucis proprietate, quæ ad Refractiones ſpectat, hucuſque hallucinantes videam, demonſtrationes ſuas in hypotheſi quâdam Phyſicâ, haud bene ſtabilitâ, tacitè fundantes; non ingratum me facturum judico, ſi principia ſcientiæ hujus examini ſeveriori ſubjiciam; & quæ ego de iis ſimul excogitavi, & experientiâ multiplici habeo comperta, ſubnectam iis, quæ Reverendus meus Anteceſſor hîc [a] loci poſtrema dixit.

(a) Barrovius.

Imaginantur

Radiorum diverſa

Imaginantur Dioptricês ſtudioſi, quòd Perſpicilla ad quemlibet perfectionis gradum perduci poſſent, modò vitris, dum perpoliuntur, geometricam, quam vellent, figuram communicare concederetur; & in eum finem Inſtrumenta varia fuêre excogitata, quibus vitra in figuras Hyperbolicas, vel etiam Parabolicas, contererentur. Sed exacta iſtarum figurarum fabricatio nemini hucuſque ſucceſſit: ſcilicet aratur litus, & ne labores ſuos in negotio deſperato diutius inſumant, iis polliceri audeo, quòd, licet omnia fierent feliciter, nihil minùs tamen quàm votis ſuis reſponderent. Etenim vitra, licet efformentur ſecundum figuras in iſtum finem optimas, quæ poſſunt excogitari, tamen nón duplo plus præſtabunt, quàm ſphæricæ æquali politurâ perfectæ. Hæc autem non ideo loquor, quaſi peccatum eſſe à ſcriptoribus Opticês contenderem; illi enim omnia, pro intentione demonſtrationum ſuarum accuratè quidem & veriſſimè dixerunt; ſed aliquid tamen, idque maximi momenti, reliquerunt poſteris inveniendum; ſcilicet in refractionibus irregularitatem quandam reperio, quæ omnia perturbat; & non ſolùm efficit, ut figuræ conicarum ſectionum ſphæricas non multum ſuperent, ſed etiam ut ſphericæ multo minùs præſtent, quàm præſtarent, ſi dicta refractio eſſet uniformis.

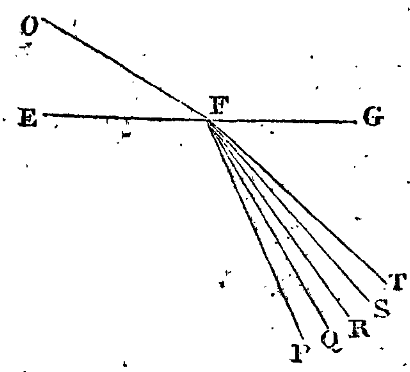
Itaque in Dioptricâ pedem figo, non ut eam pertractarem de integro, ſed tantùm ut hanc de naturâ Lucis proprietatem rimarer primò; deinde ut oſtenderem, quantum ex hâc proprietate perfectio Dioptricês impeditur; & quo pacto incommodum iſtud, quatenus natura rei ſinit, devitetur. Ubi & nonnulla proferam, quæ ad Teleſcopiorum juxtà & Microſcopiorum tum Theoriam tum Praxin ſpectant; oſtendens, quòd Opticês ſumma perfectio, præter opinionem receptam, ex Dioptricâ & Catoptricâ mixtis petenda eſt. Ac interea diſcrimen Colorum, & eorum geneſin à priſmatibus, & corporibus etiam coloratis, fuſè explicabo.

Quòd omnium Radiorum non ſit eadem Refrangibilitas.

2. De Luce itaque compertum habeo, quòd Radii ejus, quoad quantitatem refractionis, ab invicem differant. Ex iis, qui omnes habent eundem angulum incidentiæ, alii angulum refractionis aliquanto majorem, alii minorem habebunt. Plenioris illuſtrationis gratiâ, ſit EFG ſuperficies quælibet refringens, puta vitrea;

trea; & ducatur quævis OF huic occurrens in F, & cum eâ efficiens angulum OFE acutum. Concipe etiam radios ſolares per iſtam lineam OF ſibi continuò ſucceſſivos fluere, ita ut alii poſt alios in punctum F impingant, ibidemque in medium denſius refringantur; vel ſi mavis, finge parallelos radios indefinitè parùm diſtare ab OF, & incidere in puncta ipſi F viciniſſima. Jam ex opinione receptâ, hi radii, eandem habentes incidentiam, eandem quoque refractionem omnes habere debent; puta in lineam FR. At contrarium compertum habeo; ſcilicet, quòd poſtquam refringuntur, divergant ab invicem; quaſi quidam refringerentur in lineam FP; alii in lineam FQ; & alii in lineas FR, FS, & FT; ac alii etiam innumeri per ſpatia intermedia; ut & ultra citraque nonnulli pervagantes, prout radius quilibet ad refractionem majorem minoremve patiendum ſit aptus. Invenio præterea, quòd Radii FP maximè refracti colores Purpureos producant; & illi FT minimè refracti Rubros; qui autem hiſce intermedii, FQ, FR, FS, pergunt, colores intermedios; nempe Cæruleos, Virides & Flavos generant: & ſic Radii, prout apti ſunt, ut alii aliis magis atque magis refringantur, hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum, & Purpureum generant, unà cum omnibus intermediis, quos in Iride liceat conſpicere; unde productio colorum Priſmatis & Iridis facilè patebit. Sed his jam perfunctoriè notatis, quæ de Coloribus dicenda ſunt, in poſterum differam.

Refrangibilitas

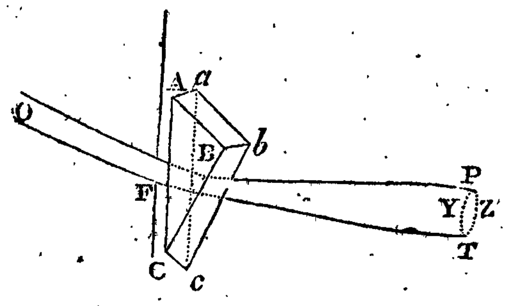


EXPER. I.

3. Sententiâ noſtrâ de hâc re ſic breviter explicatâ, ne putetis fabulas pro veris enarratas eſſe, rationes & experimenta, quibus iſthæc innituntur, continuò proferam. Et quoniam experimentum quoddam Priſmatis valde obvium mihi primò dedit occaſionem excogitandi reliqua, iſtum primùm explicabo. Sit F foramen aliquod in pariete vel feneſtrâ cubiculi, per quod radii ſolares OF trajiciantur; reliquis ubique foraminibus diligenter obturatis,

Probatur experimento vulgari per longitudinem imaginis ſolaris refractæ.

Radiorum diverſa turatis, ne lux alibi ingrediatur. Iſta autem obſcuratio cubiculi non eſt prorſus neceſſaria, ſed efficit tantùm, ut experimentum evadat aliquantò evidentius. Deinde Priſma triangulare vitreum, A*a*B*b*C*c*, ad foramen iſtud applicetur; quod radios, OF, per ſe trajectos, refringat verſus PYTZ; quos radios oppoſito pariete, vel papyro aliquâ, ad diſtantiam à Priſmate ſatis magnam, objectâ, terminatos videbis in figuram PYTZ; cujus nempe longitudo PT ſit quadruplex latitudinis YZ, & ampliùs. Et hinc evinci certo videtur, quòd radiorum, æqualiter incidentium, alii majorem aliis refractionem patiuntur. Nam ſi contrarium eſſet verum, prædicta Solis imago appareret ferè orbicularis, & in quâdam poſitione Priſmatis ad ſenſum orbicularis conſpiceretur; id quod contra omnem experientiam eſt. Quocunque enim ſitu Priſma diſpoſui, nunquam tamen potui efficere, quin longitudo imaginis eſſet latitudinis pluſquam quadrupla; angulo ſcilicet priſmatis ACB, vel *acb*, exiſtente graduum plus minus ſexaginta.

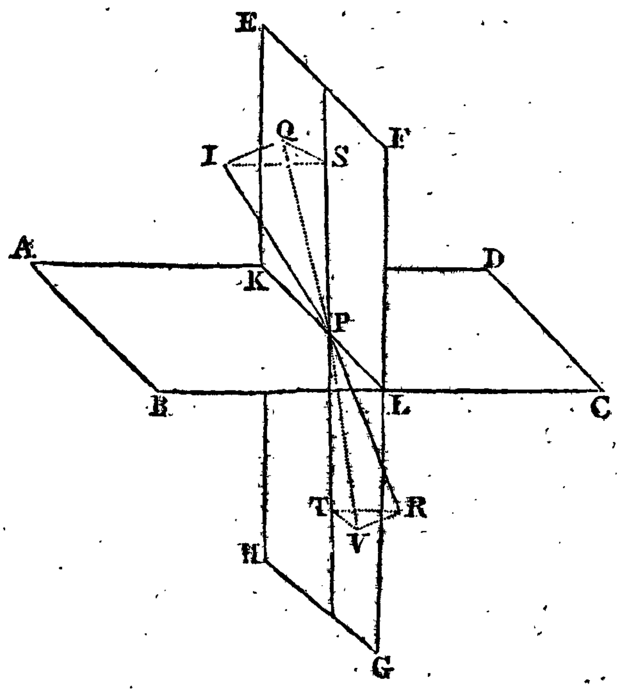


Caſus in quo radii æque refrangibiles faciunt imaginem orbicularem. 4. Quòd autem datur quædam Priſmatis poſitio, in quâ Imago Solis, ex opinione de refractionibus receptâ, appareret orbicularis, ſic oſtendo. Juxta foramen, in feneſtrâ cubiculi factum, Priſma collocetur foras; vel, quod eodem recidit, ſit EG (*vid. Tab. fig.* I.) corpus aliquod opacum, citra Priſma locatum, in quo ſit F foramen indefinitè parvum & orbiculare; per quod radii refracti, in parietem directè oppoſitum, ad imaginem PYTZ ibi depingendam, trajiciantur: & ponatur ABC eſſe planum ſecans A*ac*C, B*bc*C plana refringentia perpendiculariter, atque etiam tranſiens per foramen F, ut & per centrum Solis DIHV, quem biſecet ſecundum diametrum ejus DH, à cujus extremitatibus radii DK & HN, in eodem plano jacentes, adveniant; qui poſtquam refringuntur (DK in K*n* & *n*T, atque HN in N*k* & *k*P) utrinque pergant per centrum foraminis F; & præterea ſit talis inclinatio priſmatis ad iſtos radios, ut anguli AKD & B*k*F fiant æquales. Deinde ſit IV alia Solis diameter, prædicto plano ABC perpendicularis; à cujus

jus extremitatibus alii duo radii, VL & IM, adveniant; alter IM cis planum ABC, qui refringatur in M*l* & *l*Y; alter verò VL ultra planum iſtud, qui refringatur in L*m* & *m*Z: & prædicti quatuor radii ſeſe omnes decuſſent in medio foraminis F. Denique ponatur, quòd imago lucida PYTZ foramen directè reſpiciat, ita ſcilicet ut FP & FT, item FY & FZ, æquales fiant. Dico jam, quòd in iſtâ poſitione priſmatis, anguli PFT ac YFZ æquales eſſent, ſuppoſitò radios omnes æquè refringi, qui eundem habent angulum incidentiæ; & proinde quòd imago iſta ſenſui ſaltem deberet eſſe orbicularis; utpote cujus diametri PT & YZ ſeſe decuſſant perperdiculariter, & æquales iſtos angulos ſubtendunt. Refrangibilitas.

5. Angulos autem iſtos PFT & YFZ æquales eſſe, ſic demonſtro. Concipe radium aliquem à P per *k* & N retrocedere, dum alius radius pergit à D per K & *n*; itaque, cùm anguli AKD & B*k*F ſupponantur æquales, erunt etiam anguli per primas refractiones facti, AK*n* & B*k*N, æquales; unde triangula CK*n* & C*k*N erunt ſimilia, & eorum anguli externi *k*NA, K*n*B æquales; & proinde anguli per ſecundas refractiones facti ANH & B*n*F ſunt æquales. Quare, cùm anguli AKD & B*k*F, item ANH & B*n*F ſint æquales, eorum differentiæ erunt etiam æquales; hoc eſt, angulus *n*F*k* ſive PFT æqualis angulo, quem radii DK & HN comprehendunt, ſive diametro ſolari. Quare, cùm demonſtratum fuerit, quòd angulus YFZ æquatur eidem diametro, liquebit propoſitum. Iſtud autem ut fiat, Theorema quoddam, more Lemmatis, præſternendum eſt. Demonſtratio caſus iſtius. Pars I.

6. Sint duo plana ABCD & EFGH (*fig. p.* 258) ſibimet perpendicularia, quorum communis interſectio ſit KL; & ſit IP radius quilibet, qui, in planum ABCD incidens ad punctum P, ab eo refringitur in PR; dico, quòd ſinus anguli, quem radius incidens, IP, efficit cum plano perpendiculari FH, ſit ad ſinum anguli, quem radius refractus, PR, efficit cum eodem plano, ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, & proinde in ratione datâ. Sumptis enim radiis IP & PR æqualibus, & demiſſis IQ & RV ad planum FH perpendicularibus; & præterea ad punctum incidentiæ P erectâ SPT perpendiculari ad planum refringens BD (quæ ideo cum altero plano FH coincidet) & ad iſtam demiſſis IS & RT iterum perpendicularibus Lemma ad ſecundam partem demonſtrationis.



erit IPQ angulus, quem radius incidens IP efficit cum plano perpendiculari FH, & RPV angulus, quem radius refractus PR efficit cum eodem plano. Item IPS angulus incidentiæ, & RPT angulus refractionis. Quare, ſi IP vel PR ſupponatur radius circuli, erunt IQ, RV, & IS, RT dictorum angulorum ſinus. Sed IQ & RV ſunt paralleli (6. 10. Elem.) propterea quòd eidem plano FH ſunt perpendiculares. Item IS & RT ſunt paralleli (28. 1. Elem.) quia jacentes in eodem plano, ISPTR, eidem rectæ, ST, perpendiculariter inſiſtunt. Hoc eſt, rectæ IQ, IS, quæ angulum QIS comprehendunt, ſunt parallelæ rectis RV, RT, conprehendentibus angulum VRT. Quare iſti anguli, QIS & VRT, ſunt æquales (10. 11. Elem.) Ductis autem QS & VT, fient anguli IQS & RVT recti (Def. 3. 11. Elem.) quia rectæ IQ & RV plano FH perpendiculariter inſiſtunt. Ergo triangula IQS & RVT ſunt ſimilia (4. 6. Elem.) & IQ.RV : : IS.RT; hoc eſt, ſinus angulorum, quos radius incidens & refractus efficiunt cum plano aliquo FH ad refringens planum BD perpendiculari, ſunt ut ſinus incidentiæ & refractionis, & proinde in ratione datâ. Quippe ſinuum iſtorum rationem eſſe datam Carteſius edocuit, & alii deinde fuerunt experti.

Quinetiam Theorematis jam demonſtrati veritas manebit ſalva, licet planum FH plano refringenti BD alibi perpendiculariter inſiſtat, quàm ad punctum refringens P. Exinde enim neque anguli cum radiis & plano FH effecti, neque ideo ſinus iſtorum angulorum immutabuntur.

Pars ſecunda Demonſtrationis. 7. Hiſce ita præmonſtratis, ad propoſitum jam revertar; demonſtraturus ſcilicet angulum YFZ (*vid. Tab. fig.* 1.) diametro Solis, ac proinde angulo PFT æquari. Ex ſuprà poſitis liquet, quòd planum

planum KDHN*k*F*n* biſecat angulum radiis IM & VL utrinque jacentibus contentum. Itaque, cùm iſte angulus æquetur diametro ſolari; angulus, quem radiorum alter, puta IM, cum dicto plano faciet, æquabitur ſemidiametro ſolari, cujus eſto ſinus A; & B ſinus anguli, quem radius iſte refractus M*l* facit cum eodem plano. Jam, cùm planum iſtud ſupponatur perpendiculare ad Priſmatis refringens planum A*c*, erit ex præcedenti Lemmate, ſinus A ad ſinum B ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis è Medio rariori in Medium denſius. Vel è contra ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis è Medio denſiori in rarius, ita erit B ad A. Quare, cùm dictum planum DHF etiam perpendiculare ſit ad alterum Priſmatis planum BC, quod radios è medio denſiori in rarius refringit; & inſuper, cùm B ſupponatur anguli ſinus, quem radius incidens M*l* facit cum plano iſto perpendiculari DHF, erit (per Lemma præcedens) A ſinus anguli, quem radius refractus *l*F facit cum eodem plano DHF; ſed A ponitur ſinus ſemediametri ſolaris, ergo ille angulus, quem radius *l*F facit cum plano DHF æquetur ſemidiametro ſolari, & ejus duplus *l*F*m* ſive YFZ toti diametro; &, cùm ſuprà fuerit oſtenſum, quòd angulus PFT ſit eidem diametro æqualis, iſti duo anguli YFZ & PFT erunt æquales. Q. E. D.

Jam, ſi planum YFZ eſſet perpendiculare plano imaginis PYTZ, æquè ac planum PFT, iſtæ quatuor lineæ FP, FT, FY & FZ, quæ angulos æquales comprehendunt, eſſent omnes inter ſe æquales; & proin ſubtenſæ PT & YZ etiam æquarentur. Sed qui rem ſeriò perpendit, inveniet radios collaterales VL*m*FZ & IM*l*FY duobus reliquis, DK*n*FT & HN*k*FP, paulo minus refringi; & idcirco planum YFZ paulo magis declinabit à radio FP quàm ab FT, ſecans lineam PT infra medium ejus punctum X; & ſic divaricans à perpendiculari FX (quam concipe ductam) erit aliquantulum obliquum ad planum imaginis PYTZ; & eâ de cauſâ lineæ FY & FZ erunt paulo majores quàm FP & FT, & ſubtenſa YZ paulo major quàm ſubtenſa PT. Sed hujus rei demonſtrationem, utpote nimis longam & propoſito meo non omnino neceſſariam, prætermitto. Etenim non multum refert, utrum planum YFZ ſit rectum ad planum imaginis PYTZ vel nonnihil obliquum, hoc eſt, utrum YZ ſit æqualis vel major quàm PT; ſufficit, quòd nequit eſſe minor. Imo

 cùm

cùm propter iſoſcelea triangula PFT & YFZ, ſit FP.FY :: PT.YZ, atque FP & FY ſint quàm proximè æquales, tantilla erit inter PT & YZ differentia, ut quoad ſenſum pro æqualibus haberi poſſint.

In iſto tamen caſu longitudo imaginis pluſquam quadruplex eſt latitudinis. Unde varia refrangibilitas evincitur.

8. Oſtenſus itaque caſus eſt, in quo longitudo ſolaris imaginis, per priſma trajectæ, conſpiceretur æqualis ejuſdem latitudini, & proinde in quo imago iſta quaſi orbicularis appareret, modò vera eſſet opinio vulgaris. Quinimo, licet poſitio priſmatis alia ſit, atque deſcripſi, modò radii utrinque refractionem non valde inæqualem patiantur, figura tamen imaginis eapropter vix immutabitur: nec multum intereſt, an corpus opacum EG, foramine F ad radios tranſmittendos terebratum, citra priſma collocetur vel ultra; neque figura foraminis multum curanda eſt, modò ſit exigua. Etenim tam parvæ variationes haud plus mutabunt imaginem, quàm decimâ forte vel quintâ parte diametri ſuæ; ſicut cogitanti patebit. Atque ita, ut paucis tandem comprehendam omnia, liquet, quòd imago Solis refracta ut plurimum deberet eſſe ſenſui quaſi orbicularis; ſi modò ejuſdem incidentiæ in idem Medium refractio ſemper foret eadem. Sed prius repugnat Experientiæ, longitudine ſcilicet ejus latitudinem pluſquam quatuor vicibus, ut dictum fuit, excedente. Ergo poſterius repugnat Veritati, & ejuſdem Incidentiæ Refractio eſt varia.

Ejuſdem rei demonſtratio brevior.

9. Ex eodem experimento potui propoſitum ſic breviùs indicâſſe; nempe, cùm ita diſpoſuiſſem Priſma, ut refractio radiorum tum ingredientium tum egredientium foret quaſi æqualis, angulos PFT & YFZ (fig. 1. Tab.) dimenſus ſum; & inveni quidem angulum YFZ ſemiſſi gradûs, ſive diametro Solis, æqualem. At angulus PFT eandem diametrum quater & ampliùs ſuperavit, cui tamen æqualis eſſe debuiſſet ex parte priori præcedentis demonſtrationis; & inde planiſſimè liquet propoſitum. Verùm in eorum gratiam, quæ mox ſequentur, oporteret demonſtrâſſe, quod illi radii, quorum refrangibilitas non eſt diſpar, efformabunt imaginem ferè orbicularem; & eâ de re mihi viſum fuit demonſtrationem iſtam etiamſi longiuſculam, in illuſtrationem hujus Experimenti, hic adduxiſſe.

Quo pacto priſma facile ſtatui poteſt in I

10. Verùm, cùm in experiendis prædictis eam eſſe poſitionem priſmatis ſuppoſuerim, ut Radii ad utramque faciem priſmatis æ- [illegible] ɔco, dicam, quâ ratione iſtud

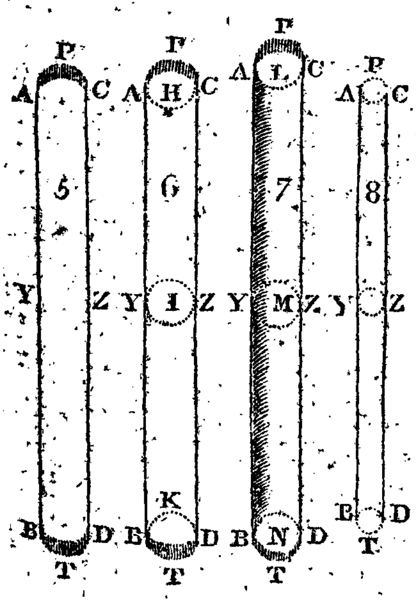
citò

citò fiat & facilè. Si priſma teneatur in luce ſolari, & motu lento circa axem ſuum convertatur, videbis colores, quos efficit, de loco in locum continuo motu tranſlatos eſſe, ita quidem ut aliquando progredi, deinde verò regredi videantur. Obſervabis itaque medium inter iſtos contrarios motus, quando colores modò progreſſi, & ſtatim regreſſuri, videntur quieſcere; quod ubi vides, ſiſte priſma, idque in iſto ſitu fige. Dico factum. Scilicet in eo ſitu ſumma refractionum utrobique factarum, ſive radii Emergentis ad Incidentem inclinatio, evadit omnium minima *. Quod cùm accidit, refractiones utrobique ſunt æquales; uti poſthac demonſtrabitur.

perienda prædicta requiſito.

11. Cæterum Experimenti hujus varias circumſtantias, non minus jucundas experienti, quàm propoſiti noſtri indicativas, proſequi jam animus eſt. Et primum notandum venit, quòd Imaginis iſtius figura, ſecundum longitudinem ſuam lineis rectis terminata fuit, & ſecundum latitudinem duobus (ut ex viſu potui judicare) ſemicirculis. In figura 5ta. ſit PT imago ſolis priſmate refracta; hanc obſervabam ad latera duabus lineis, AB & CD, quoad ſenſum rectis & ſibi parallelis, terminari; ad extremitates autem, duobus ſemicirculis APC & BTD; cujus quidem eventûs cauſa ex præmonſtratis ſic determinatur.

Imaginis præfatæ figura deſcribitur, quæ partim rectis, partim ſemicirculis comprehenſa eſt.



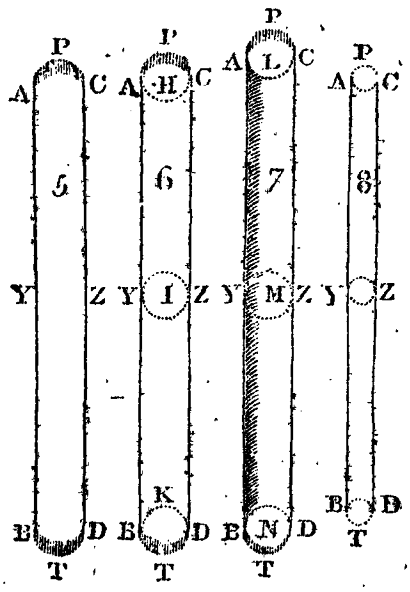
12. Semicirculi illi terminantes in circulos compleantur, ut vides in figurâ ſextâ, & alius inſcribatur circulus, YZ, iſtis intermedius. Jam concipe radios quoſdam à Sole provenientes, qui apti ſunt, ut æqualiter incidentes etiam æqualiter refringantur. Illi per Priſma trajecti, ex ſuprà demonſtratis, imaginem quoad ſenſum (ſi ſola poſſet videri) circularem depingent, puta BD. Deinde concipe alios ejuſdem Solis radios, ſibi etiam conformes, qui apti ſunt ut prioribus paulo magis refringantur; illi itaque aliam imaginem depingent circularem, puta YZ. Et alios etiam radios adhuc magis

Quomodo talis evadit per circulares imagines (quas unumquodque genus radiorum æquabiliter refrangibilium facit) in longum diſpoſitas.

* Lege *maxima*. Vid. Sect. III. Prop. XXV.

Radiorum diverſa

gis refrangibiles concipe, qui tertiam circularem imaginem AC efficient. Denique alios innumeros cogita, prædictis plus & minus refrangibiles; & illi alias etiam innumeras circulares imagines, prioribus tum intermedias tum extremas, efformabunt, illuminantes oblongum ſpatium PYTZ, rectis lineis, AB & CD, duobuſque ſemicirculis contentum. Verùm, cùm imagines illæ ſint omnes ejuſdem pene magnitudinis, & inter lineas AB & CD in directum diſpoſitæ, iſtæ lineæ AB & CD pro rectis ſibi parallelis haberi poſſunt, & ad ſenſum tales videbuntur; & ſic totum ſpatium PYTZ, radiis ex eâdem incidentiâ variè refractis illuminatum, partim parallelis rectis & partim ſemicirculis oppoſitis terminabitur; ſicut Experientiâ compertum eſt.



Exinde deducitur Experimentum, quo termini recti fiant diſtinctiſſimi.

13. Hanc autem conjecturam ut penitus probarem, cogitabam de imagine Solis per foramen aliquod ſine ullâ refractione ad diſtantiam magnam trajectâ; ſcilicet quòd male definitur, termino exiſtente inter lucem & tenebras minimè diſtincto: at ſi radii iſti per lentem convexam tranſeant, cujus focus ad imaginem eſt, imago terminabitur diſtinctiſſimè. Simili modo de radiis æquè refrangibilibus intellexi, quòd, ſi per Priſma trajicerentur ad diſtantiam magnam, depingerent imaginem circularem malè definitam; cujus tamen terminus, mediante lente convexâ, diſtinctiſſimus evaderet. Itaque, cum vidiſſem terminos imaginis refractæ PYTZ non admodum diſtinctos; de imaginibus BD, YZ, AC & reliquis circularibus, oblongam iſtam formantibus, conjiciebam, quòd multo diſtinctius terminarentur per lentem convexam trajectæ quàm aliter; & experienti res patuit. Nam rectas AB & CD, in quas imagines omnes iſtæ circulares utrinque terminantur, vidi admodum diſtinctas, quas antea confuſas videram.

Quare termini circulares ſemper apparent confuſi.

14. Sed, quod notatu valdè dignum videtur, termini circulares, APC & BTD, imaginis illius ſemper apparuere maximè confuſi, luce paulatim deficiente donec tandem in tenebras deſiit.

Scilicet

Scilicet intermedii circuli, ut YZ, miſcentur aliis circulis utrinque cadentibus; quibuſcum ex aliquâ ſui parte coincidunt. At extremi quidem circuli, AC & BD, ex unâ tantùm parte cum aliis concurrunt; & eorum concurſus continuò fit rarior, & exinde lux uſque remiſſior, dum ad extremitates P ac T deventum eſt. Sed & alia prodit iſtius rei cauſa; ſcilicet quòd radiorum maxima copia apta ſit, ut mediocrem refractionem patiatur, & ſic in medium imaginis incidat; & quòd eorum numerus continuò minor exiſtat, quibus competit gradus refrangibilitatis alterutrinque magis extremus. *Refrangibilitas.*

15. Cæterum ad iſthæc experienda lentes adhiberi vellem, quarum foci ſunt longinqui, ſex fortè vel duodecim pedibus à lentibus diſtantes, modò tales præſto ſint: ſaltem non ſint minùs diſtantes quàm duobus. Atque etiam latera priſmatis debent eſſe accuratè plana; ſin latera ejus ſint aliquatenus convexa, tum præſtat adhibere lentem, cujus focus ad pedes tantùm duos vel tres à ſe remotus eſt. Quibus paratis, lentem Priſmati ex utràvis parte colloca vicinam; ita ſcilicet ut radios, per ſe trajectos, directè reſpiciat. Deinde radii in papyrum aliquam excipiantur, quam ultro citroque tranſfer, donec imaginem coloratam utrinque rectis parallelis diſtinctiſſimè terminatam videas. *Admonitio de figurâ & ſitu Lentium & Priſmatum.*

16. Sed obſervandum eſt, quòd, cùm Priſma collocatur ultra foramen F (ut in Tab. fig. 1.) vel ipſi quàm proximè citra, & lens magis diſtat ab iſto foramine, quàm focus lentis, quem radii in eam parallelos incidentes efficerent, diſtat à lente; duplicem invenies caſum, in quo imago in papyrum projecta evadet diſtincta: alter, quando radii omnes homogenei, qui in lentem paralleli incidunt, ita refringuntur, ut ad papyrum iſtam in eodem puncto concurrant; quod fit, quando vides imaginem coloratam oblongam, & parallelis rectis diſtinctè terminatam: alter caſus eſt, quando radii omnes homogenei ab uno puncto foraminis F divergentes, poſtquam à lente refringuntur, ad unum iterum punctum dictæ papyri convergunt. Id autem accidit, cùm imaginem albam, orbicularem, & undique benè definitam vides. De quo fuſè dicetur alibi. Sufficeat hoc monitum hîc dediſſe, ne quis propriis oculis hæc experturus, per ambiguitatem effectûs incautè decipiatur, & exinde prædicta in dubium revocet. *Deque imagine quâdam orbiculari.*

17. Juvat

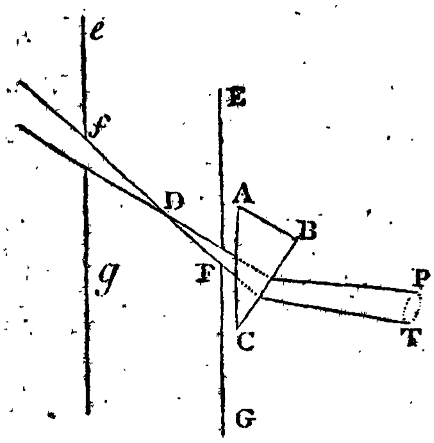
Ac de umbris nebularum ſolem intercedentium.

17. Juvat annotare præterea, quòd nebulæ aliquæ tenuiores interceperunt diſcum Solis, eum non penitus obſcurantes, & umbras in hanc imaginem PT projecerunt non ſui ſimiles, ſed in longum protenſas, & imaginis terminis rectilineis parallelas. Id quod ratiociniis modò allatis accuratè convenit. Nam concipe nebulam aliquam in diſco Solis ad inſtar maculæ conſpicuam eſſe; & ea, ſi radii maximè refrangibiles circuloque AC (fig. 7.) circumſcripti ſpectentur, umbram projiciat in locum L, ita ut circulus AC cum umbrâ L diſcum Solis, nebulâ deficientem, referat. Quo poſito, ſi radii minimè refrangibiles circuloque BD circumſcripti ſpectentur, umbra nebulæ ab iis projicietur in locum N, cujus talis erit ſitus in circulo BD, qualis eſt ipſius L in circulo AC; quippe hic etiam diſcum ſolis, nebulâ deficientem, refert. Atque idem porro diſcurſus de circulo quolibet intermedio cum umbrellâ ejus M intelligatur; adeo ut propter indefinitam multitudinem circulorum, ſpatium integrum ABDC occupantium, nebula ſuas umbras per totam longitudinem LN diſpergat, eamque reddat obſcuram; & ſic, cùm plures nebulæ, vel nubium ſinus, Soli interveniant, imago ejus plurimis umbris in longum diffuſis & parallelis obſcurabitur.

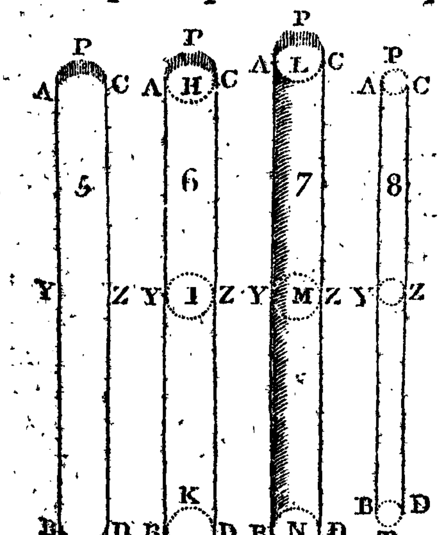
EXPER. II.

Ab imaginis figurâ aliud etiam experimentum deducitur, quo fiat multum oblongior.

18. Ut dictas proprietates Lucis, quâ potui diligentiâ, perſcrutarer, ſequentem præterea modum excogitavi, quo illas examini ſubjicerem. Nempe (in fig. 6.) cum magnitudo circulorum AC, YZ, BD dependeat à magnitudine ſolari, ſi diameter Solis fieret aliquanto minor, quàm nunc reverâ exiſtit, tum illi etiam circuli fierent minores, diſtantiâ centrorum H, I, K, non omnino mutatâ, ut videre eſt in fig. 8. Et ſic latitudo imaginis, ad ejuſdem longitudinem comparata, multo minor evaderet quàm antea, utrâque ſcilicet per eandem quantitatem diminutâ. Hæc probaturus effeci, ut radii Solis per duo parva foramina, ab invicem longè diſtantia, tranſirent, antequam inciderent Priſmati; quo pacto radii ab extremis partibus Solis venientes excludebantur, & res perinde ſucceſſit, quaſi diameter Solis reverâ eſſet diminuta. Illuſtrationis gratiâ, ſit *efg* feneſtra, parvo foramine *f* penetrata, per quod radii ſolares cubiculum, aliàs obſcuratum, ingrediantur;



diantur; deinde ſit EFG corpus aliquod opacum perforatum ad F, & in medio cubiculo ita locatum, ut radii iterum permeent foramen iſtud, antequam Priſma ABC, ponè locatum, attingant. Jam foraminum iſtorum diametro exiſtente $\frac{1}{8}$ digiti, & eorundem diſtantiâ, *f*F, 12 pedibus (ita ſcilicet ut maxima radiorum, utrumque foramen permeantium, inclinatio foret angulus ferè minutorum 6, hoc eſt, quaſi quinta pars diametri ſolaris) atque etiam imagine PT projectâ in papyrum, decem pedes à Priſmate diſtantem, prout anguſtia cubiculi tulit: inveni longitudinem imaginis eſſe pluſquam quatuor digitorum cum ſemiſſe, & latitudinem trientis digiti; hoc eſt longitudinem pluſquam quatuordecim vicibus majorem latitudine, ſicut ex prædictis oportet eveniſſe. Etenim cùm iſti tantùm radii mittuntur intro, qui minus quàm quintâ parte ſolaris diametri ad ſe invicem inclinantur, diametri AC, YZ & BD diminutæ diametro foraminis F, debent eſſe quintuplo minores quàm ſecundum priora contingeret; ut



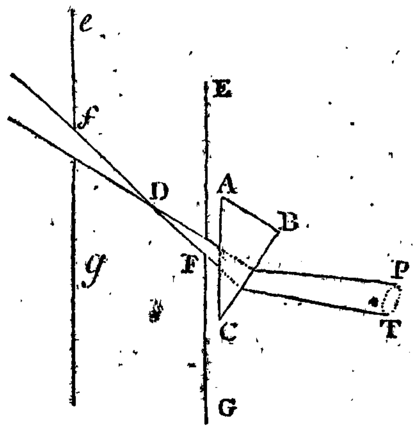
videre eſt in fig. 6 & 7. quaſi à Sole eſſent effectæ, cujus diameter ſit quinquies minor diametro Solis noſtri. Verùm, ſi corpus opacum *fg* tolleretur, ut radii per unum ſolummodo foramen F ad Priſma tranſirent, ſicut in prioribus factum eſt, latitudo imaginis evaderet $1\frac{1}{6}$ digitorum, & longitudo pluſquam 5 dig. angulo nempe Priſmatis exiſtente 60 grad. vel paulo majori. Itaque diameter circulorum, AC, YZ & BD, qui eo, quo dictum eſt modo, imaginem conſtituunt, eſſet $1\frac{1}{6}$ dig. à quâ ſubducatur diameter foraminis, nempe $\frac{1}{8}$ dig. & manebit $1\frac{1}{24}$ dig. cujus quintæ parti rurſus adjungatur eadem foraminis diameter ſive $\frac{1}{8}$ dig. & prodibit $\frac{1}{3}$ dig. diameter circulorum AC, YZ, & BD in fig. 8. quæ minor eſt quàm diameter circulorum iſtorum in fig. 6. quantitate

Radiorum diverſa

$\frac{1}{6}$ dig. Quamobrem figura 8 quaquaverſum eſt minor quàm ſexta, quantitate $\frac{1}{6}$ dig. Atque ideo longitudo ejus fit pluſquam 4 dig. latitudo autem digiti triens. Id quod cum experientiâ modò recenſitâ quadrat. Ad eundem modum, ſi foramina *f* & F adhuc minora forent, vel ſi diſtantia *f*F foret major, imago PT oblongior evaderet. Quod idem quoque quadantenus contingeret, ex imagine PT à Priſmate longiùs diſſitâ. Cæterùm notandum eſt, quòd foramina *f* & F ad radios directè reſpicientia ſupponam; licet non multum refert, an ſitus eorum ſit parum obliquus, ut in appoſitâ figurâ nonâ factum eſt.

Experimentum iſtud promovetur.

19. Porro ſi in hoc experimento convexam lentem ut priùs adhibueris, cujus focus ad imaginem cadit, foramine F (ſi placet) dilatato, vel opaco corpore EG prorſus ablato, ut radii per foramen longinquum *f* ſolummodo tranſeant, &, ſi foramen iſtud *f* effeceris anguſtius quàm antea, cæteris ut priùs ſtantibus; imaginem valdè oblongam, &, pro longitudine, lucidiorem videbis quàm in caſu priori. Exempli gratiâ, ſi diameter foraminis ſit pars digiti vigeſima, & ſi pedibus ab inde duodecim priſma cum lente diſpoſueris, videbis longitudinem imaginis pluſquam octoginta vel centum vicibus latitudine majorem. Sed in his experiendis oportet cubiculum quaquaverſus benè obturatum eſſe; ne lux alibi quàm per foramen *f* ingreſſa perturbet imaginem, & juxta circulares ejus extremitates obſcuram reddat; et præterea, ſi ſuperficies Priſmatis ſint accuratè planæ, præſtat adhibere lentem, quæ focum ad diſtantiam magnam projicit; puta ad 12 vel 20 pedes, modò loci amplitudo ſinat, quo pacto de proportionibus imaginis melius judicium proferas. Quòd ſi latera Priſmatis ſint aliquantulùm convexa, ut iis nonnunquam contingit, quæ vulgò venduntur, licebit iſtud abſque ullâ lente ſolum adhibere; & ejus convexitas radios, vice lentis, ad magnam diſtantiam congregabit. Quinimo, ſi cum Priſmate quolibet lentem parvam adhibeas, cujus focus non ſit duobus tribuſve pedibus longinquior, imaginem conſpicies ſatis longam quidem,



ſed

ſed cujus latitudo haud ſenſibilis exiſtit. Id quod propoſito noſtro non minùs inſervit, quàm ſi poſſes de proportione longitudinis ad latitudinem ejus accuratè judicare. In iſtis etiam experiendis notetur præterea, quòd lens non debet ita longè poſt Priſma locari, quin poſſet ad omnes radios ſimul tranſmittendos extendi, ne imaginem ſucceſſivè per partes tantùm obſervare ſis coactus: et notetur denique, quòd ſi foramen F citra Priſma locaveris, & lentem deinceps citra foramen iſtud, ad diſtantiam majorem ab eo quàm focus radiorum, à foramine *f* longinquiori manantium, abeſt à lente; duplex erit caſus, in quo imago in papyrum projecta conſpicietur diſtincta: prout radii venientes à ſingulis punctis foraminis F, aut à ſingulis punctis foraminis *f*, in totidem itidem punctis papyri colliguntur. In uno caſu imago erit alba & orbicularis, ut prius (§ 16) commonui, in alterâ autem oblonga & colorata, ſicut præſens experimentum exigit. Refrangibilitas.

20. Jam liquet ex præfatis, quòd imaginis PT latitudo ſemper evadit eo minor, quo foramen longinquum *f* factum eſt anguſtius; ut nihil dubitandum ſit, quin dicta latitudo prorſus evaneſceret, ſi vice foraminis iſtius tranſlucidi unum duntaxat punctum ibi lucidiſſimum exiſteret: atque iſtud ſic futurum eſſe confirmatur ex obſervatione non diſſimili, quam habui quondam de ſtellâ Veneris. Cubiculo nempe quaquaverſus obturato, excepto foramine paulo pluſquam duos digitos lato, ut tenebroſiſſimum efficeretur: in iſto foramine vitrum objectivum Perſpicilli ſeptempedalis collocavi; latitudine ejus, ad ſufficientem radiorum copiam tranſmittendam, duos digitos & amplius apertâ. Deinde ad diſtantiam ſeptem pedum papyro tranſverſè poſitâ, in eam vidi ſideris imaginem ad inſtar puncti lucidi projectam; & interpoſito Priſmate ad diſtantiam pedis unius duorumve ab iſtâ papyro, per quod radii trajecti aliò refringerentur: pro puncto illo lucido ad diſtantiam inde pluſquam pedalem, vidi lineolam, licet non valdè lucidam, facilè tamen conſpicuam, & cujus longitudo ſemiſſem digiti ſuperavit, latitudo autem fuit quoad ſenſum nulla, ſaltem haud major quàm ut ſentiretur. Atque idem credo de ſtellis primæ magnitudinis, uti de Sirio liceat obſervare; præſertim ſi lens adhibeatur quatuor vel ſex digitos lata, ut plures radios tranſmittat. Magis adhuc promovetur per imaginem ſtellæ Veneris;

& applicatur deſcriptioni refractionis ad fig. 1. traditæ.

21. Hoc experimentum, quàm benè convenit cum explicatione noſtrâ, quam de Refractione radiorum, ad eundem angulum incidentium variâ, ſub initio dedi, operæ pretium videatur adnotare. In figurâ pag. 255, ſuppoſui complures radios per eandem rectam in ſuperficiem aliquam refringentem ſucceſſivè delatos eſſe, ibidemque alios aliis paulo magis gradatim refringi. Quod ſi fieri concipiatur, abundè ſequeretur, quòd radii ſic refracti, ſi corpore deinceps opaco quovis, ut papyro, interciperentur, lineolam ibi lucidam depingerent. Jam licet radii à ſtellâ aliquâ venientes non omnes in eâdem rectâ pergant, tamen, quod tantundem eſt, pro parallelis haberi poſſunt; & quòd à lente convexâ effecti ſunt convergentes, antequam attingant Priſma, hoc adeo non deſtruit analogiam, ut eam maximè confirmet. Etenim pro ſingulis in eâdem rectâ pergentibus, debes tantùm concipere tot radiorum penicillos, qui omnes habeant eundem axem, & idem punctum concurſûs; & quòd iſtorum penicillorum alii magis aliis à Priſmate refringuntur, ita ut eorum puncta concurſûs, ſive foci, qui prius coincidêre, jam ſinguli cadant ſeorſim, lineam rectam conficientes. Ac proinde, quòd axes penicillorum, qui radiis puta ſucceſſivis, eouſque coincidebant, donec attigere Priſma, ibi per variam refractionem ſint effecti divergentes; ut ad focos penicillorum, in lineâ rectâ jacentes, pergant.

Circumſtantia variata eidem deſcriptioni rurſus applicatur.

22. Si Priſma ſtellæ Veneris vicinius quàm lentem collocaveris, ut radii per illud trajiciantur primò, & à lente deinde convergentes fiant, eandem lineolam ut priùs videbis, licet minùs conſpicuam & inventu difficilliorem. Jam in hoc ſpecimine, cùm radii omnes adveniant paralleli, ſi æqualiter refringerentur tranſeuntes priſma, manerent poſtea paralleli, uſque dum lenti inciderent, & in eâ proinde ſic refringerentur, ut omnes deinceps ad idem punctum pergerent, & ſic punctum lucidum conſpiceretur. Quare, cum vice puncti iſtius apparet linea, concludendum eſt, quòd omnes radii non æqualiter refringuntur.

Quod in adductis experimentis refractiones non caſu ſiunt inæquales, neque aliâ cauſâ

23. Si jam objiciat aliquis, quòd in refractionibus quidem detur irregularitas, ſed eam eſſe contingentem, & non ex præviâ radiorum diſpoſitione, vel ullis certis legibus ortam; reſpondeo, quòd imago Solis præfata, ſi radiis nullâ certâ lege refractis fieret oblonga, non poſſet in lineas rectas ſecundum longitudinem ſuam

diſtinctè

diſtinctè terminari, ſicut ad figuram quintam oſtenſum eſt. Quin-etiam non omnino deberet eſſe oblonga, ſed parte ejus mediâ & magis ſplendidâ in morem orbis effingi; ſenſibilique termino diſtingui ab erraticâ luce debiliori quaquaverſum diſperſâ: perinde ut Sol apparet, cùm nubibus penè obſcuratur; vel ut ejus imago cernitur, cùm trajicitur per laminam vitream parallelis planis terminatam, & halitu vel fumo levitur obductam, ut lux inter refringendum paululum conturbetur. Adhæc, ſi duo Priſmata ſimilia ABC & *abc* (vid. Tab. fig. 2.) juxtà ponantur, ſecundum longitudines ſuas parallela, cum lateribus planis AC & *ac*, ut & BC & *bc* parallelis; & ſi Sol tranſluceat utrumque in locum Z, ubi corpus opacum luci directè opponitur, radiis tamen ejus per orbiculare foramen F priùs trajectis: lux incidens in dictum Z apparebit diſtinctè orbicularis, non ſecus quàm ſi directè tenderet ab F, priſmatibus non omnino interpoſitis. Fatendum eſt itaque, quòd utriuſque Priſmatis conjunctim refractiones ſunt regulares, & proinde etiam refractiones alterutrius. Scilicet radii illi ſimiliter incidentes, non omnes æquè refringuntur in primo priſmate ABC, ut neque in ſecundo *abc*; tamen cùm ea refractionis inæqualitas non contingens ſit, ſed oriatur ex præviâ radiorum diſpoſitione; ideo licet varii radii variè refringuntur, tamen ejuſdem radii eâdem erit refractionis quantitas in utroque Priſmate, & quantùm incurvatur à priori ABC, tantum recurvabitur à poſteriori *abc*; unde radius quilibet, utcunque ſit refrangibilis, poſtquam ex utroque Priſmate emerſerit, ſibimet ipſi, cùm nondum iis inciderat, fiet parallelus. Atque ideo, cùm omnes ad eaſdem plagas tendant, ad quas liberè tenderent, ſi Priſmatibus non interciperentur; neceſſe eſt, ut eandem orbicularem imaginem ad Z exhibeant, quàm illuc liberè tendentes exhiberent. Quòd ſi imago oblonga, per refractionem unici Priſmatis (ut dictum eſt) effecta, figuram ſuam à radiis nullâ certâ lege divaricantibus, ſed forte fortunâ huc illuc vagè refractis, acquireret; cùm refractiones binis Priſmatibus geminentur, errores etiam radiorum duplo plures evaderent, ut & duplo majores; & exinde imago ad Z fieret multo oblongior; quæ tamen, experientiâ teſte, in orbem contrahitur.

quàm inæquali refrangibilitate.

24. Nonnullis forte in ſuſpicionem veniet, quòd terminatio Lucis, ſive quieſcentis Medii confinium, diverſitatem refractionis efficiat;

Radiorum diverſa refrangibilitas.

efficiat; ſed huic dubitationi in promptu eſt remedium, efficiendo nempe ut lux à poſticâ parte priſmatis (ſicut ad fig. 1. Tab.) ſolummodo terminetur, ne fiat umbræ confinis priuſquam fuerit refracta. Et propterea, ne ſuſpicio ſit de variâ craſſitie vitri, poteſt refractio ejus ad varias craſſities tentari, promovendo Priſma tranſverſè juxta lucis ingreſſum parallelo motu; ita ut lux primò ad aciem ejus trajiciatur; deinde ad partes craſſiores; & in quovis caſu perſimilis erit colorum apparitio. Neque multùm intereſt, ſi foramen, per quod lux ingreditur, ſit latius vel anguſtius; nam exinde nihil aliud eveniet quàm lucis, colores exhibentis, augmentatio vel diminutio, ac tanta dilatatio vel contractio imaginis, quanta eſt foraminis.

25. Experimento duorum parallelorum Priſmatum jam antè deſcripto conſtat etiam, quòd hæc imaginis in longitudinem diſtractio non oritur ex ejuſdem cujuſque radii diffuſione vel diſtractione in complures divergentes radios; ſiquidem illi per iteratam diffuſionem vel diſtractionem, in tranſitu per ſecundum Priſma tunc reſolvi deberent in longè plures & magis divergentes radios. Quin & iiſdem omnibus objectionibus adverſatur experimentum, ubi poſterius Priſma non ſtatuitur parallelum anteriori ſed perpendiculariter tranſverſum. Nam in iſto caſu, ſi anterius Priſma diſtraheret imaginem in longitudinem, ob aliam quamcunque cauſam quàm diverſam refrangibilitatem diverſorum radiorúm, tunc poſterius Priſma, per tranſverſam refractionem, diſtrahere deberet illam oblongatam imaginem in latitudinem, & ſic quadrilateram efficeret. Sed experimentum tentanti res ſecus evenit, imagine ſcilicet non ſecundum latitudinem dilatatâ, ſed ſolum obliquatâ per majorem refractionem extremitatis violaceæ quàm rubræ. Quemadmodum videre eſt ad fig. 3. Tab. ubi imago PT, per ſecundi Priſmatis refractionem, transfertur ad *pt*. Ex dictis, opinor, ſatis ſuperque conſtat id, quod initio propoſui demonſtrandum: quoniam autem jucunditatem intellectui & aſſenſum plerunque firmiorem harmonia rerum plurium affert, quam unici licet maximè ſcientifici argumenti teſtimonium; non erit abs re, ſi in aliud experimentorum genus, præcedentibus affinium, experturos breviter introducam.

EXPERIMENTA VARIA.

26. In fig. 4. Tab. ſit F foramen valdè exiguum, per quod lumen Solis trajiciatur; deinde ad diſtantiam pro lubitu magnam ſtatuatur Priſma ABC, per quod radii tranſeant refracti, prout in prioribus explicui; tum oculo ponè admoto, circularis foraminis F videbis imaginem PT oblongam; cujus longitudo, ad latitudinem collata, tanto major erit, quanto foramen F fiet anguſtius; & exinde pateat, quòd radiorum alii, tendentes ad oculum per H, quaſi manâſſent à P, ſunt magis refracti, quàm alii tendentes per I, quaſi à T veniſſent; & radiis ſic in oculum non ſecus ingreſſis, quàm ſi profluxiſſent ab oblongo ſpatio PT, neceſſe eſt, ut ſpatium iſtud longum appareat luminoſum. Perſtringuntur alia experimenta præcedentibus affinia.

Sed cavendum eſt, ne foraminis F tanta ſit apertura, ut nimiæ lucis introitu lædatur oculus; imo ne tanta ſit, quin ut poſſis nudo oculo particulam Solis per foramen iſtud, quaſi punctum lucidum, diſtinctè & abſque ullâ circumradiatione tranſpicere. Verùm, ſi lumen Solis cenſeatur nimium huic experiendo, lumen à nubibus tranſmiſſum ſufficiat; modò talis ſit oculi tui diſpoſitio, ut foramen ſine radiis circumcirca ſuperfluis diſtinctum cernas, antequam interponas priſma: aliàs imaginem ejus non cernes diſtinctam, neque debitâ longitudine deductam.

Adhæc, liceat tandem obſervare, ſi filum albens interpoſito Priſmate aſpicias; etenim filum multo latius apparebit, cùm in ſitu ad longitudinem priſmatis parallelo, quàm cùm in tranſverſo ſtatuitur.

Cæterùm, ut in uno comprehendam omnia, ſi ſtellam fixam primæ magnitudinis mediante Priſmate intuearis, ejus etiam imago conſpicietur longa. At, cùm radii ſtellarum pro parallelis habeantur; ſi omnes æquè refringerentur, manerent etiam paralleli, poſtquam egrediuntur è Priſmate; & oculum ſic ingreſſi efficerent imaginem omnino ſimilem ſtellæ, vel puncto lucido, nullatenus oblongam; perinde ut ſit, cum ſtella parallelos radios in oculum directè mittit. Videbis itaque, quòd radii paralleli, ſuperficiebus planis refracti, fiunt inclinati; unde neceſſe eſt, ut inæqualem refractionem patiantur. In tranſitu autem notetur, quòd Teleſcopio, ſi placeat, primùm adhibito, tum ut copia lucis

Radiorum diverſa

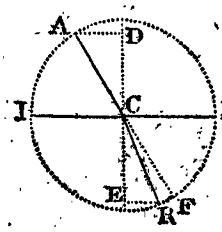
ad oculum tranſmittatur, tum ut ſcintillatio, quâ Fixæ ſolent quaſi coronâ cingi, minuatur, & Priſmate deinceps interpoſito, videbis albicantem lineam diſtinctiorem quàm prius, cum latitudine vix aut ne vix quidem conſpicuâ. His paucis de Radiorum diverſâ Refrangibilitate narratis, quorum ſenſus plenior in ſequentibus, ubi de Coloribus agitur, eluceſcet; reſtat, ut refractionum Quantitates & Menſuræ jam determinentur.

SECTIO SECUNDA.

De Menſurâ Refractionum.

De menſurâ refractionis dati generis radiorum, è quâvis incidentiâ datâ.

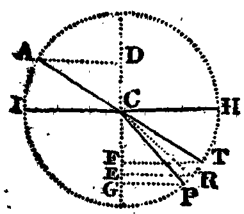
27. Refractiones, ope angulorum, quos incidentes & refracti radii cum perpendiculo refringentis plani conſtituunt, quaſi datam rationem habentium, à Veteribus determinatæ fuerant. Quemadmodum ſi IH ſit planum refringens, cui linea DCE ad aliquod ejus punctum C perpendiculariter inſiſtit, & in illud C radius quilibet AC incidat, & refringatur ad R: poſito refractum radium CR in plano ACI jacere, quod refringenti plano perpendiculare eſt; ſuppoſuere Veteres, quòd angulus incidentiæ ACD, angulus refractionis RCE, & angulus refractus RCF ſemper ſint in datâ quâdam ratione; vel potius hypotheſin credidêre ſatis accuratam eſſe, ubi radii à perpendiculo non multum divaricant. Sic in Vitro ſtatuerunt angulum refractionis quaſi triplum eſſe anguli refracti. At illa refractionum æſtimatio minus exacta deprehenditur, quàm ut pro fundamento Dioptricês debet ſtatui; & Carteſius aliam Regulam primus ([a]) excogitavit, quâ iſtud exactius determinarentur; ponendo dictorum angulorum ſinus eſſe in ratione datâ. In fig. ſup. ſi centro C & diſtantiâ quâlibet AC circulus deſcribatur, ſecans radios præfatos in A & R, & ab iſtis punctis ad plani perpendiculum DCE demittantur normales AD & RE, ipſarum AD & RE proportio erit eadem perpetuò. Cujus rei veritatem auctor non ineleganter demonſtrâſſet, modo de cauſis Phyſicis, quas aſſumpſit, nullum dubitandi locum reliquiſſet. Ut & quoniam inſtrumentis, in iſtum finem



([a]) Veram refractionum legem omnium primus invenit Snellius; qui horum angulorum ſecantibus

finem accuratè inſtructis, examinârunt aliqui, & veritati (quoad ſenſum) exactè convenientem adinvenerunt, non dubitamus pro fundamento ſtatuere; hoc ſolum adhibito moderamine, quòd, cùm is de quibuſlibet radiis indifferenter affirmârit, quaſi omnium perſimilis fuiſſet refractio, nos tantùm affirmamus de ſingulis eorum generibus ſeorſim ſpectatis; ponendo quòd radiorum æquè refrangibilium ſinus refractionis ſunt ut ſinus incidentiæ. De Menſurâ Refractionum.

Concipiamus aliquot genera radiorum ſecundum lineam AC eſſe allapſa ad punctum C, ibique refracta per ſuperficiem IH; puta mediocriter refrangibiles radios in CR, minimè refrangibiles in CT, & maximè refrangibiles in CP, ac innumeros alios, gradibus intermediis plus minus refrangibiles, per totum ſpatium TCP diffuſos eſſe. Jam ſi ducatur DCG perpendicularis ad planum refringens IH, & centro C diſtantiâ quâvis AC circulus (ut priùs) deſcribatur, ſecans radios dictos in A, P, R, T, atque ex iſtis punctis demittantur perpendiculares, AD, PG, RE, TF, pro ſinubus angulorum ACD, PCG, RCE, TCF; pono, quòd, utcunque radii incidant, tamen ſemper erit AD ad PG in eâdem ratione; quâ ſemel cognitâ, Regulam habes pro refractione radiorum maximè refrangibilium in eandem ſuperficiem, ad angulum quemvis incidentium, menſurandâ: et ſic ſemper erit AD ad TF in eâdem ratione; quâ cognitâ, Regulam habes quâcum refractio minimè refrangibilium in quâvis incidentiâ determinabitur. Atque idem de ratione ipſius AD ad RE, & ad ſinum cujuſvis intermedii generis concipiatur.



28. Porro autem, cùm ſinus PG, RE, TF cæterique datam habeant rationem ad ſinum AD, datam quoque rationem inter ſeſe habebunt; atque adeo, ſi ex unicâ obſervatione proportionem ſinuum PG, RE, TF & reliquorum ad radios ex eâdem incidentiâ refractos pertinentium cognoveris; Regulam exinde habebis, quâcum ex ſinu refractionis cujuſvis generis radiorum & in iſtam ſuperficiem utcunque incidentium dato, cæterorum omnium, ex eâdem incidentiâ prolabentium, ſinus elicias, licet quænam ſit eorum incidentia non innotuerit. Quinimo, ſi omnium AD, TF, De conferendis refractionibus radiorum diverſi generis.

tibus datam rationem intercedere primus intellexit. Inde verò facile efficiendum erat ſinuum etiam rationem dari. Vide Princip. Lib. I. Prop. XCVI. Schol.

DE MENSURA

RE, PG, &c. proportiones inter ſe ſemel cognoſcantur, habito reſpectu ad eadem Media refringentia, Regulam habes pro cæteris omnibus exquirendis ex unico quovis unquam dato. Itaque, quo rationes iſtorum ſinuum inveſtigentur, convenit, ut in aliquo radiorum genere proportio ſinûs incidentiæ ad ſinum refractionis primùm exquiratur; deinde, ut proportiones ſinuum refractionis pro radiis diverſorum generum, ad eundem angulum incidentium, determinentur.

Ad ſinus incidentiæ & refractionis conferendos adhibetur mediocre genus radiorum.

29. Ad ſinus incidentiæ cum ſinubus refractionis conferendos, commodum erit, ut medium genus eligatur; puta genus illud radiorum, qui Viriditatem, vel potius colorem viridi & cæruleo intermedium, exhibent. Credo enim illos, qui refractiones antehac menſuravêre (ſive id factum ſit, ut jam dicta hypotheſis Carteſii probaretur, ſive aliis de cauſis) credo illos, inquam, menſuram inſtituiſſe ad medietatem refractæ Lucis; hoc eſt, ſi ſpatium à coloribus occupatum ſpectemus, ad confinium Viridis & Cærulei: aut ſi ſpectemus quantitatem lucis, ad medietatem Viridis; & præterea punctum iſtud pro principali foco lentium habendum eſſe videtur, in quod intermedium genus radiorum convergit. Atque etiam, ſi quando de radiis indiſtinctè diſſerendum eſt, ut hactenus apud Opticæ peritos conſueverit, genus mediocre, commodius quàm extremorum aliquod, pro omnibus haberi poteſt.

Modus explorandi ſinuum iſtorum rationes.

30. Porro, cùm forte deſideretur accuratius examen dictæ Regulæ Carteſianæ, quàm antehac inſtituebatur, dum varia radiorum refringibilitas experientes latuit, primò dicam, quo pacto id non incommodè fiat. Quoniam Fluidi pellucidi ſuperficies refringentes facilè poſſint inclinari ad quemvis datum angulum, quod Solido non eſt conceſſum, Fluida in hunc finem fuerunt adhibita; ſed inſtrumento magis laborioſo, quàm opus erat, & erroribus fortè magis obnoxio, quàm ſi omni apparatu privaretur, demptâ trabe cui vaſculum aquæ plenum affigitur.

Sit itaque HK *in fig.* 5. *Tab.* vectis ligneus duas treſve ulnas longus aut ampliùs; ſatis craſſus ne ob longitudinem & pondus minimè inflecti queat; quadrilaterus, rectangulus & rectus, cum lateribus oppoſitis exactè parallelis. Tum lamellæ duæ, HI & KL, ſuper unum ejus latus, ad angulos rectos, erigantur; KL proximè ad unam extremitatem, & HI quaſi quatuor digitos ab alterâ diſtans, quarum longitudo

gitudo ſit trium digitorum quatuorve, latitudo autem duorum vel trium. Deinde ſumatur vaſculum aliquod cylindricum, vel priſmiforme, CF, duos treſve digitos latum, longum verò quatuor vel quinque. Ejus baſis ſuper lamellam HI, cemento aliquo duro & tenaci, figatur; ac in eo ſitu firmetur ope trabis HK ultra lamellam dictam HI productæ. Tum trajiciatur ejus fundum in medietate, & lamella ſimul, parvo foramine F, puta decimâ parte digiti lato; & juxta foramen iſtud in alterâ lamellâ notetur punctum R, quod æquè diſtat à trabe ac dicti foraminis centrum; ita ſcilicet ut linea FR, per centrum foraminis ad R ducta, ſit parallela longitudini trabis. Denique ſumatur lamella vitrea, plana, polita & uniformiter craſſa, eaque applicetur ad planitiem lamellæ HI, vaſculo CF obverſam, ſuper foramen F; & cemento figatur ita, ut vaſculum iſtud aquæ (quâ repleatur) non ſit pervium; & cum normâ aliquâ fiat periculum, an illa vitrea lamella perpendiculariter inſiſtat trabi. Quod ſi non contingat, corrigatur ſitus, donec ſit exactè perpendicularis. In cujus rei gratiam convenit, ut dicta lamella vitrea ſit tres vel quatuor digitos longa & lata, quo de ſitu ejus meliùs judicare liceat. Inſtrumento hoc ſic fabricato, & aquâ vaſi CF pluſquam ad medietatem ejus infuſâ, illud in radiis ſolaribus ita ſtatuatur, ut in ſuperiori ſuperficie aqueâ refracti perpendiculariter emergant ad foramen F, rectâque progrediantur verſus laminam KL, Rubedine ad T, Purpurâ ad P, & Viridi, vel confinio Cærulei & Viridis, ad K incidentibus. Convenit autem, ut dicta lamina KL dealbetur, aut albente papyro veſtiatur, quo de Coloribus judicium certius feras. Intereà verò cum quadrante aliquo amplo & exactè fabricato, *ekr*, quæratur inclinatio trabis, HK, ad horizontem; & habebis angulum refractionis *ekr*, & ejus ſinum *er*. Tum Solis altitudo ſtatim inquiratur, ejuſque complementum ad 90 grad. A*kD* erit angulus incidentiæ, & AD ſinus. Quibus ſinubus ad invicem collatis, & experimento ad diverſas Solis altitudines repetito, conſtabit, an ſinuum ratio ſemper ſit eadem. Quòd ſi velis, ut experimenta varia ſimul fiant, aut ad minorem incidentiam, quàm ſit complementum maximæ altitudinis ſolaris, vice radiorum à Sole directè manantium poſſis adhibere reflexos.

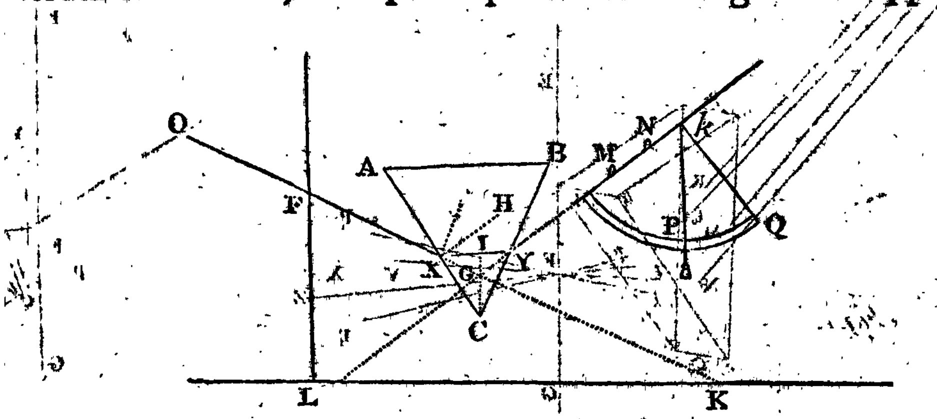
REFRACTIONUM.

31. Cum eandem ſinuum incidentiæ & refractionis rationem alicui radiorum generi, utcunque in eandem quamvis ſuperficiem incidenti,

Modus explorandi vim refractivam

Solidi cujuſvis Aere circundati.

incidenti, perpetuò competere ſat exploratum fuerit, proponatur exquirere rationem illam ad ſuperficiem data quælibet Media diſterminantem, idque unico experimento. Si Aer ſit unum ex datis Mediis, & Liquor quilibet alterum; inſtrumentum noviſſimè deſcriptum non incommodè poteſt adhiberi. Sin Mediorum alterum ſit ſolidum, res expeditè perficitur ad diagramma appoſitum.



In ejus explicationem præmittantur duo ſequentia Lemmata.

LEMMA I.

Sit ABC Priſma, ex materiâ quâvis pellucidâ confectum, cujus axis ſit Horizonti parallelus & perpendicularis ad radios Solis; & præterea ſit ejus poſitio talis, ut dictos radios ox æquè refringat, ingredientes ad X & egredientes ad Y. Iſtud autem, quo pacto debet fieri, oſtenſum fuit ad § 10. Jam dico, quòd angulus refractionis, ad alterutram refringentem ſuperficiem ut AC factæ, ſit æqualis dimidio verticalis anguli priſmatici ACB: ſcilicet ad punctum incidentiæ X erigatur perpendicularis HX, erit HXY angulus refractionis ad ſuperficiem AC. Porrò demittatur CI perpendicularis in radium XY; & iſta biſecabit angulum YCX, propterea quòd triangulum YCX (ob æqualitatem refractionis in X & Y) ſit iſoſceles. Dico itaque, quod anguli HXY & ICX æquantur: nam ang. AXY = ang. XIC + ICX (per 32. 1. Elem.) ſed anguli AXH & XIC ſunt recti. Ergo reſidui HXY & ICX æquantur. Q. E. D.

LEMMA II.

Adhæc, ſi radius incidens OX & emergens YN indefinitè producantur, occurrentes in G; & præterea, ſi recta quævis KL, Horizonti parallela, radiis iſtis interjiciatur, conſtituens triangulum GKL; &,

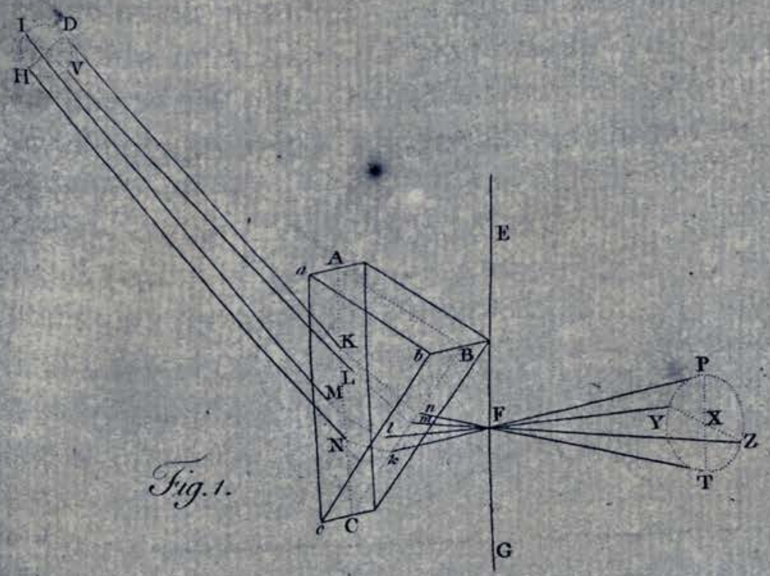


Fig. 1.

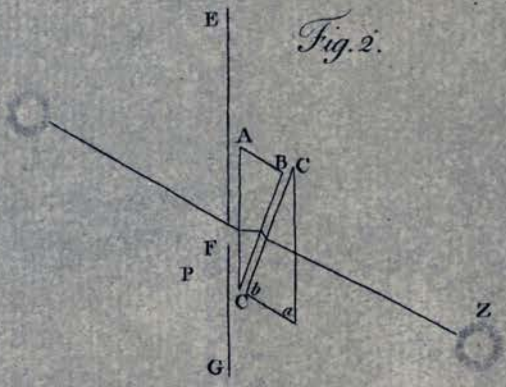


Fig. 2.

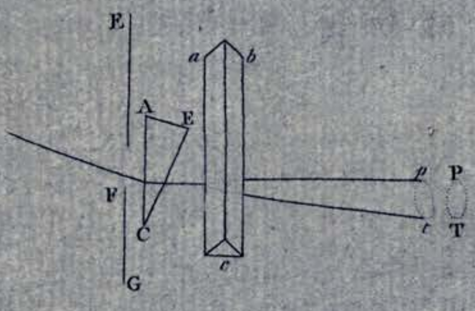


Fig. 3.

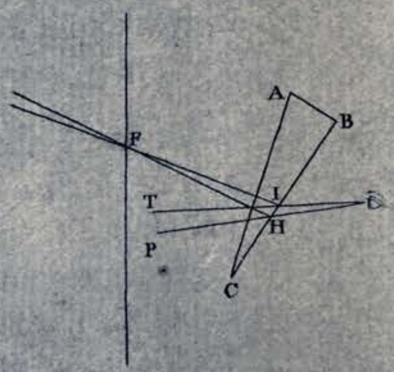


Fig. 4.

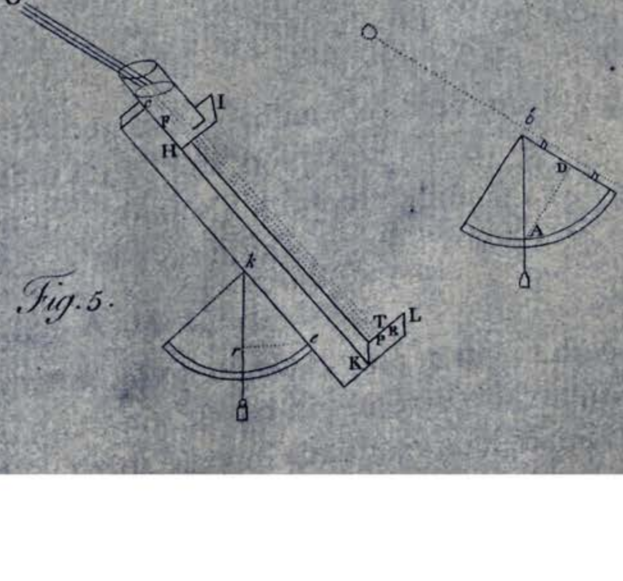


Fig. 5.

&, cùm refractus radius YN tendit ſurſum, ſi ſumma angulorum LKX & KLY ſumatur; aut eorum differentia, cùm iſte YN tendit deorſum: dico, quòd illius ſummæ vel differentiæ dimidium, unà cum angulo refractionis HXY, æquabitur angulo incidentiæ HXG. Nam dicta ſumma vel differentia æquatur angulo NGK (per 31. 1. Elem.) hoc eſt angulis GXY+GYX; &, cùm triangulum GYX ſit iſoſceles, dictæ ſummæ vel differentiæ dimidium æquabitur angulo refracto, GXY; qui cum angulo refractionis, YXH, conſtituit angulum incidentiæ. Q. E. D. De Menſurâ Refractionum.

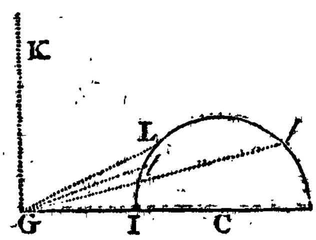
His præmiſſis, Problema propoſitum ſic perficitur. Primò menſuretur angulus verticalis Priſmatis ACB, & ejus dimidium erit angulus refractionis. Dein priſmate in poſitione præfatâ diſpoſito, per quod radii trajiciantur ingreſſi foramen F; ope quadrantis MNPQ ampli & accurati (puta cujus pinnarum M & N diſtantia ſit pedis unius ad minimum) exploretur angulus YLK vel PkQ, quem refracti radii, YMN, cum Horizonte conſtituunt; faciendo, ut mediocriter refrangibiles per pinnas M & N, ad diſtantiam decem aut viginti pedum à Priſmate trajiciantur, & ſimul obſervetur Solis altitudo, XKL: qui duo anguli addantur, ſi refracti radii YMN ſurſum tendant, ſicut in ſchemate deſcribitur, alias minor ſubſtrahatur à majori; & ſummæ vel differentiæ dimidium unà cum angulo refractionis, priùs invento, erit angulus incidentiæ, ut pateat per Lemma ſecundum. Denique ex angulis Incidentiæ & Refractionis ſic datis, dantur eorum ſinus. Q. E. F.

32. Sic in Priſmate quodam vitreo dimenſus ſum angulum ejus maximum, ACB, & inveni 63 grad. 12 min. cujus dimidium, HXY, eſt 31. gr. 36 min. ejuſque ſinus 5240, poſito ſinu 90 gr. 10000. Deinde, cùm altitudo Solis, OKL, obſervabatur eſſe 14 gr. 4 min. alter angulus, MLK, à radio YN ad medium Viriditatis tendente conflatus, erat 30 gr. 52 min. quorum ſumma eſt 44°. 56′. ejuſque dimidium, YXK, 22°. 28′. quod unà cum angulo refractionis, HXY, facit 54°. 4′. angulum incidentiæ, cujus ſinus eſt 8097. Denique conferendo ſinus jam inventos, ut eorum proportio in minimis terminis haberetur, inveni eſſe ut 11 ad 17 ferè. Quare pro Regulâ generali ſtatuendum eſt, quòd radiorum Viriditatem exhibentium ſinus incidentiæ ex Aere in Vitrum quodvis, æquè refractivum ac illud Priſma, ſit ad ſinum refractionis ut 17 ad 11. Exemplum in refractione cujuſdam generis vitri.

Haud

De Menſurâ Refractionum. Haud ſecus dimetiendo refractionem radiorum, colorem inter Viridem & Cæruleum exhibentium, inveſtigatur 45°. 8′. pro duplo anguli refracti; cujus dimidium, 22°. 34′, unà cum angulo refractionis, 31°. 36′, dat angulum incidentiæ 54°. 10′; ejuſque ſinus, 8107, eſt ad ſinum refractionis, 5240, ut 82 ad 53 proximè.

Modi præfati commoditas. 33. Hujus autem modi commoditas in menſurandis refractionibus ex eo conjicietur, quòd Inſtrumento nullo hîc opus eſt, dempto Quadrante & Priſmate cujus refractio deſideratur; quòd Refractionem, dum geminetur, factam ad X & Y, exinde certiùs metiri poſſis; & quòd facillimum ſit Priſma in deſiderato ſitu diſponere, ut ſuprà oſtenditur § 10: imo quòd parvus error à ſitu deſiderato fere nihil ſit; dum quoad ſenſum haud inde mutabitur angulus refractus MGK, ut experienti patebit. Quippe angulus iſte hîc minimus eſt; & quantitatum, per motum generatarum, cùm maximæ exiſtant vel minimæ, hoc eſt in momento regreſſûs, motus ut plurimum ſunt infinitè parvi.



Sic verbi gratiâ, ſi centro C deſcribatur circulus lLl, & extra eum ſumatur punctum quoddam G, ducaturque GIC, & erigatur normalis GK: deinde, ſi concipiatur, quòd punctum l moveatur uniformiter in illius circuli circumferentiâ, per quod punctum recta quædam Gl, circa centrum G rotata, perpetuò tranſeat: manifeſtum eſt, quòd quo major ſit angulus CGl, ſive quo minor angulus KGl, eo minor erit motus angularis ipſius Gl; & cùm angulus CGl ſit maximus, ſive angulus KGl minimus, hoc eſt in momento regreſſûs (recta Gl tunc circulum in L tangente) motus ejus erit infinitè parvus, & quoad ſenſum nullus; parvuſque error à puncto contactûs, L, nullam ſenſibilem variationem in angulis iſtis KGL & CGL, producet. Et ad eundem ferè modum, parva convolutio Priſmatis haud omnino mutabit angulum MGK, cùm iſte ſit minimus, ſive complementum ejus maximum. Quòd ſi Priſma diſponeretur in quovis alio ſitu, quàm hîc deſcribitur (putà cùm radii perpendiculariter ingreſſi ad egreſſum duntaxat refringuntur) minimus error ab iſto deſiderato ſitu multum mutaret angulum refractum, & ſic experientia foret incertudini & erroribus multo magis obnoxia.

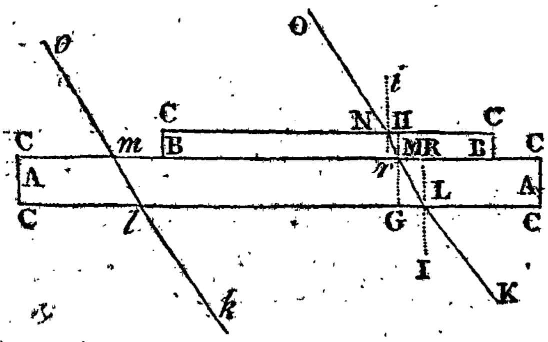
34. In

34. In majorem hujus rei copiam, quia dantur aliqui caſus, ubi refractiones per modos jam deſcriptos haud poſſint menſurari (ut cùm refractio fit ex Vitro in Cryſtallum, ex Aquâ in Vitrum, vel ex uno liquore in alium) & nequa omnino ſit refringens ſuperficies, cujus refractio nequit inveſtigari; Problema ſequens lubet proponere. Regula de inveſtigandâ refractione Mediorum ſibi ipſis contiguorum, quorum, Aeri contiguorum, refractiones cognoſcantur.

PROBLEMA.

Datis refractionibus, quas duo Media alicui tertio contigua conficiunt; illorum, ſibi ipſis contiguorum, refractiones invenire.

Sunto duo Media propoſita A & B, quorum ſuperficiei diſterminantis refractio quæritur; & ſit C Medium tertium, cujus ſuperficiei, ipſis A & B contiguæ, refractiones dantur. Sitque ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex Medio C in Medium A ſicut I ad R; & ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex eodem Medio C in alterum Medium B ſicut *ſ* ad *r*. Dico, quòd ſit I × *r* : R × *ſ* :: ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex Medio B in Medium A.



Verbi gratiâ, ſi proponatur inveſtigatio refractionis ex Aquâ in Vitrum, datâ refractione ex Aere in utrumque; ſitque ſinus incidentiæ ex Aere in Vitrum ad ſinum refractionis ut 17 ad 11, & ſinus incidentiæ ex Aere in Aquam ad ſinum refractionis ut 4 ad 3. Quare ſinus iſtos multiplicando reciprocè, erit ut 17 × 3 ad 11 × 4, ſive ut 51 ad 44, ita ſinus incidentiæ ex Aquâ in Vitrum ad ſinum refractionis. Et ſic cognitâ refractione ex Aere in quævis alia Media propoſita, poſſis adipiſci eorum refractionem inter ſe; & è contra.

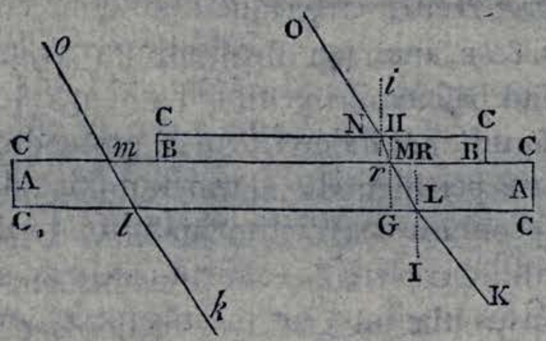
35. Cæterum demonſtratio hujus non eſt omittenda, in quem finem præſternatur Lemma ſequens.

Si Media duo propoſita A & B concipiantur eſſe planis parallelis terminata, contigua, & dicto Medio tertio (puta Aere) circumdata; & radius quilibet ON, obliquè incidens ad N, refringatur primò ad M, ac deinde ad L, & emergens pergat ad K: dico radium incidentem Regulæ ejus demonſtratio.

De Menſura

ON ſibi emergenti LK parallelum eſſe: cujus quidem aſſertionis veritas experientiâ patet. Etenim ponatur Medium A eſſe Vitrum, & Medium B eſſe Aquam; Mediumque tertium circundans eſſe Aera: et laminæ vitreæ A ſuperficies, rMR, tenuiter illinatur aquâ B, & ſtatuatur parallela ad horizontem; ut aqua conſiſtat uniformiter craſſa. Quo facto videbis, quòd radii, per utrumque medium, A & B, trajecti, tendent ad eaſdem plagas, verſus quas tenderent à Sole directi.

Præmiſſo hoc, erigantur iNr, HMG, & RLI, perpendiculares ad refringentia puncta N, M & L; eſt ergo j ad r ut ſinus anguli ONi ad ſinum anguli MNr, ſive NMH; & multiplicando rationem antecedentem per I, fiet I×j ad I×r ut ſinus ipſius ONi ad ſinum ipſius NMH. Porro eſt I ad R, ut ſinus anguli KLI, ſive ONi, ad ſinum anguli MLR, ſive LMG. Et, multiplicando rationem antecedentem per j, fiet I×j ad R×j, ut ſinus anguli ONi ad ſinum ipſius LMG. Jam permutando terminos utriuſque proportionis, fiet I×j : ſin. ONi : : I×r : ſin. NMH; & I×j : ſin. ONi : : R×j : ſin. LMG. Quare ex æqualitate rationis eſt I×r. R×j : : ſin. NMH. ſin. LMG (b). Q. E. D.



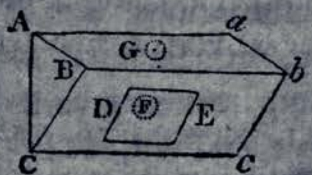
Modus dimetiendi refractiones Solidorum ad Fluida accommodantur.

36. Ex hiſce ſic oſtenſis, Problema non inutile proficiſcitur, quo refractiones Fluidorum eodem modo metiri poſſis, ac de Solidis oſtenſum eſt § 31. non adhibito inſtrumento HLK quod in fig. 5. Tab. deſcribitur. Scilicet ex laminis vitreis, in morem cunei connexis, vaſculum priſmiforme conficiatur; cujus acies, ſive angulus verticalis, ſit grad. 80 circiter, vel 90. Iſtius autem anguli quantitatem exactiſſimâ menſurâ cognitam habebis, ejuſque dimidii ſinum pro ſinu refractionis ſemper ſtatues. Quo peracto, cùm liquoris alicujus vis refractiva deſideratur, vaſculum cum illo liquore impleatur, & in tali ſitu diſponatur, ut acies ejus à concurſu refringentium planorum conſtituta, ſit parallela ad horizontem, & perpendicularis ad radios ſolares; atque ut illi radii, per præfata

(b) Vel brevius, cùm ſit I×r : I×j = ſin. NMH : ſin. ONI. Et I×j : R×j = ſin. ONI : ſin. LMG erit

præfata refringentia plana trajecti, refractiones ad ingreſſum & egreſſum æquales patiantur. Et ope Quadrantis, ut oſtenſum erat ad fig. 16. exploretur angulus incidentiæ; cujus ſinus ad præfatum ſinum refractionis erit ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex Aere in Liquorem propoſitum.

REFRACTIONUM.



37. Inſtantiæ gratiâ, quo Aquæ refractionem cognoſcerem, curavi, ut Priſma ligneum conficeretur, quale eſt ABc; cujus ille angulus ACB, quem pro verticali deſignabam, foret rectus, cæterique duo ſemirecti; & effeci, ut refringentia plana Ac & Bc per meditullium trajicerentur foramine F, parallelo ad baſem Ab, per quod foramen lux itura eſſet; & ut tertium planum, Ab, foderetur in G, uſque dum aditus ad foramen F tranſverſè pertingeret. Dein ſumptis duabus ex Vitro lamellis, quas ſpeculum confractum mihi ſubminiſtravit, unam, DE, ſuper meditullium plani Bc cæmento fixi; & alteram ſuper meditullium alterius plani Ac, ut meatus F utrinque clauderetur. Tum aquam pluvialem per orificium G in excavatum ſpatium infudi, & cum operculo, ex ſubere conciſo, clauſi. Atque adeo aqua, duabus vitreis lamellis ad angulum rectum inclinatis interjecta, vices ſubibat aquei priſmatis habentis angulum rectum. Eas autem laminas rectum angulum exactè comprehendere ex applicatione normæ cognovi, cujus ideo dimidium grad. 45 pro angulo refractionis habendum eſt. (Lem. I. § 31.) Hoc Priſma dein ita ſtatuebam ad ingreſſum lucis in obſcurum cubiculum, ut eadem foret utrinque refractionis quantitas; & ex altitudine Solis, & refractorum radiorum, Viriditatem exhibentium, inclinatione ad Horizontem, inveni angulum refractum eſſe 51°. 16′; cujus dimidium, 25°. 38′, unà cum angulo refractionis, 45°, dabit angulum incidentiæ 70°. 38′. Horum verò angulorum, 70°. 38′ & 45°, ſinus ſunt 9434 et 7071 reſpectu ſinûs 90 grad. ſeu 10000; quorum quidem numerorum ratio eſt paulo minor quàm Carteſiana, 250 ad 187, & paulo major quàm 4 ad 3; nempe 4,002 ad 3; quæ tamen à ratione $\frac{4}{3}$ tam parvâ differentiâ recedit, ut error fuit * inſenſibilis, ſi poſuerim eſſe ut 4 ad 3; idque maximè

Refractio aquæ, prout ipſe dimenſus ſum, in ſpecimen ejus rei adducitur.

erit ex æquo $1 \times r : R \times j =$ ſin. NMH : ſin. LMG. Q. E. D.

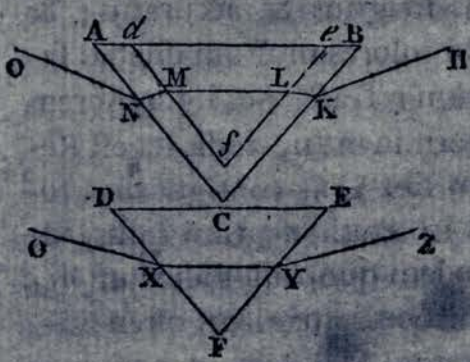
* Lege *fuerit*.

De Menſura

mè cùm Aquæ refractio non perpetim eadem maneat, ſed à caloris viciſſitudine nonnihil patiatur, varioſque denſitatis gradus induat. Quod idem & Aeri circumdanti contingit, qui à vaporibus etiam non ſolùm variè incraſſatur, ſed & arctiùs (auctâ Atmoſphæræ gravitate) vel laxiùs comprimitur. Adde, quòd aquarum, ex diverſis Terrarum regionibus ſcaturentium, aut vi Solis in vapores & pluviam deinde converſarum, diverſæ ſint denſitates, & internæ diſpoſitiones ad refringendum, ortæ ex variis mineralium tincturis, quas è locis ſubterraneis extrahunt, & exhalationibus variè craſſis & copioſis, quæ ſimul cum vaporibus in altum attolluntur.

Præfatorum demonſtratio.

38. Problematis hujus de refractionis Fluidorum menſurâ ſic ſoluti, veritas conſtabit ex oſtenſo, quòd refractionis in hoc Priſmate, ex Aqua & Vitris compoſito, eadem ſit quantitas, quæ foret, ſi vitrum tolleretur, & aqua ſola maneret Aere circundata.



Sit itaque ABC Priſma confectum ex laminis vitreis ACfd & BCfe (ut dictum eſt) & aquâ dfe repletum. Et concipiatur, quòd DEF ſit aqueum Priſma, immediatè circundatum Aere, & omnino ſimile aquæ def circumcluſæ vitro, ſimiliterque poſitum; & incidant radii paralleli, ON, OX, in utrumque; quorum alter ON, refractus in N, M, L & K, tendit ad H; alter verò OX, refractus in X & Y, tendit ad Z. Dico jam, quòd emergentes KH & YZ erunt paralleli, atque adeo, quòd in utroque Priſmate tota refractionum quantitas erit eadem. Etenim in fig. pag. 280. ſi radius *om* ipſi ON parallelus incidat in vitream laminam A, emergatque in *lk*; notum eſt, quòd radius *lk* erit parallelus ipſi *om*, hoc eſt, ipſis ON & LK: & cùm *lk* & LK ſint paralleli, erunt etiam *ml* & ML paralleli. Unde liquet propoſitum: Quòd quantitas refractionis ex Aere in Medium quodvis propoſitum ſit eadem, ſive radii immediatè ingrediantur iſtud Medium ex Aere (ut ſit ad *oml*) ſive prius permeent aliud Medium interpoſitum & parallelis planis terminatum (uti ſit ad ONML) & è contra. Atque idem intel-

 lige,

lige, cùm vice aeris aliud quodpiam adhibetur Medium. Quare cùm paralleli radii, OX & ON, incidant in priſmata, DFE & ACB, ſimilia & ſimiliter poſita, refractionis quantitas ex Aere in Aquam erit eadem, ſive radii immediatè intrent, ut videre eſt ad DEF, ſive prius permeent lamellam vitream A*dfc*; hoc eſt, radius XY ſemel refractus erit parallelus ML bis refracto: & ob eandem rationem, cùm XY & ML ſint paralleli, radii emergentes YZ & KH erunt etiam paralleli. Quare, cùm radii incidentes & emergentes ſint paralleli, refractio tota priſmatis utriuſque erit eadem. Atque adeo cùm aqueum priſma Aeri contiguum, propter aquæ fluiditatem, fabricari nequeat, ejus vice liceat adhibere vitreum priſma cum aquâ repletum. Q. E. D. REFRACTIONUM.

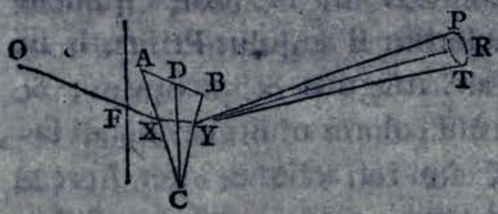
Et ſic modus generalis, quo refractiones ex Aere in quælibet Media propoſita determinentur, oſtenſus eſt, facillimus quidem & erroribus minimè obnoxius: præſertim ſi angulus Priſmatis ſit magnus & exactè cognitus; quadrans magnus & accuratus; & obſervatio facta longè poſt Priſma, ubi colores multum dilatati faciliùs diſtinguuntur. Et præterea, cùm refractiones inter Aerem & Media propoſita ſic experientiis determinantur, indicata eſt Regula (§ 34.) quâ Mediorum eorundem ſibi ipſis contiguorum refractiones eliciantur. Quòd ſatis eſt in gratiam primi caſûs, de refractionibus dimetiendis, cùm in eodem quopiam radiorum genere proportio ſinûs incidentiæ & refractionis quæritur, oſtendiſſe.

39. Proſequendus eſt jam alter caſus, ubi Heterogeneorum Radiorum refractiones conferendæ ſunt. Quòd autem ſinus refractionis cujuſque radiorum generis ſit ad ſinum incidentiæ in datâ quâdam ratione, experiri poſſis dimetiendo refractiones ſingulorum inſigniorum generum, juxta varias obliquitates in Medium aliquod refringens ſeorſim incidentium, veluti in aquam (ad fig. TAB. 5.) in vaſe ſtagnantem, vel in Priſmata vitrea, quorum diverſæ ſint quantitates angulorum verticalium. Nam per unum Priſma proportiones ſinuum ad ſingula radiorum genera inveſtigare poſſis, prout oſtenditur ad § 31. deinde per alia Priſmata (vel ejuſdem Priſmatis alios ſeu minores ſeu majores angulos) exquirere, an eædem proportiones in aliis obliquitatibus obveniant. Atque ita (obſervationibus accuratiſſimè factis) ſimul conſtabit, re-

Radiorum diverſi generis refractiones conferuntur, & maximæ refrangibilitatis differentia inveſtigatur.

De Mensura

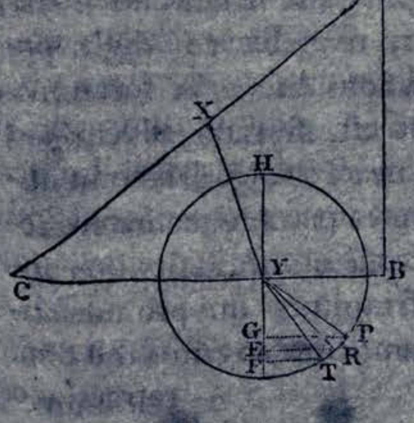
fractiones cujuſque generis radiorum ſecundum certas rationes ſinuum peragi, & iſtorum ſinuum rationes innoteſcent. Impræſentia verò, cùm eandem eſſe cujuſque radii refractionem cognoverim, ſive Heterogeneis radiis (ut in lumine ſolis nondum refracto) commiſtus incidat, ſive ab Heterogeneis priùs ſeparetur: oſtendam quomodo per refractionem immediati luminis ſolaris hæ proportiones obtineri poſſint; imprimis determinando proportiones ſinuum refractionis inter ſe reſpectu ejuſdem incidentiæ, ac deinde cum communi ſinu incidentiæ conferendo. Et quoniam de intermediis radiorum generibus facile eſſet judicium ferre, ſi modò refractiones extremorum eſſent cognitæ, ſatisfecero, ſi radios maximè omnium refrangibiles cum minimè refrangibilibus comparavero.



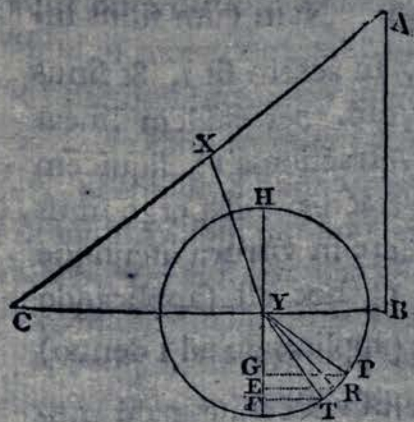
Itaque ſit ABC Priſma vitreum ita poſitum, ut radii tum ingredientes, tum egredientes eandem quantitatem refractionis, ut prius, patiantur. Dies autem ſeligatur ſplendidus, & cubiculum eſtò valdè obſcurum, ut Colores uſque ad ultima, quæ occupent, ſpatia diſtinctè ſatis videri poſſint. Tunc ad diſtantiam viginti pedum aut amplius à Priſmate, radii excipiantur in papyrum aliquam directè obverſam, & ſpatii à coloribus illuminati (ut PT) longitudo & latitudo menſuretur. Sic Priſmate adhibito, cujus angulus verticalis ACB fuit 63°. 12′, & latitudine foraminis radios intromittentis exiſtente quartâ parte digiti; ad diſtantiam XP vel XT 22 pedum, inveni maximam longitudinem imaginis, PT, eſſe $13\frac{1}{4}$ dig. circiter, & latitudinem $2\frac{5}{8}$ dig. Jam ſi latitudo hujus imaginis ab ejus longitudine ſubtrahatur, manebit $10\frac{5}{8}$ digiti pro longitudine, quam habere debuiſſet, ſi Solis diſcus (& foraminis F diameter) fuiſſet infinitè parvus; hoc eſt, ſi radii adveniſſent omnes in eâdem rectâ OF. Iſta itaque linea $10\frac{5}{8}$ dig. ſubtendit angulum, quem radii duo ſimiliter incidentes per inæqualitatem refractionis conſtituunt, quorum alter maximè omnium ſimiliter incidentium, & alter minimè omnium refringitur; qui proinde angulus ex calculo reperitur 2°. 18′. Verùm, cùm angulus iſte binâ

refractione

refractione ad X & Y conficiatur, & præterea, cùm utraque ſup- REFRAC-
ponatur æqualis; calculus ad hoc negotium ſatis accuratus ex uni- TIONUM.
câ tantum refractione poterit inſtitui: puta, quæ conficitur ad latus BC. Etenim, ſi verticalis angulus ACB plano DC biſecetur, & alterum Priſmatis dimidium, DCB vel DCA, concipiatur tolli; refractio ad alterum dimidium facta, radiis obliquè incidentibus in AC & perpendiculariter emergentibus è latere DC, vel perpendiculariter incidentibus in latus DC ſecundum unicam lineam quandam XY, & obliquè emergentibus è latere BC: refractio, inquam, ſic ad alterum dimidium facta, foret ſemiſſis refractionis ad integrum Priſma, ſi modo unicum quodpiam radiorum mediocriter refrangibilium genus ſpectetur. Quinetiam, ſi cætera omnia radiorum genera ſimul ſpectentur, aſſertio illa, licet non ampliùs ſit abſolutè vera, tamen veritati tam proximè accedet, ut quoad ſenſum & calculum mechanicum pro verâ habeatur. Quamobrem, cùm refractionis utriuſque ad X & Y peractæ computatio geometrica ægriùs inſtitui poſſit; iſtud, more ad praxin magis accommodato, utut mechanico, perficere non verebor: confiſus id mihi vitio verti non debere, ſi dum computationes rebus Phyſicis adhibeo, minutias, quæ operam moleſtè & ſine fructu producerent, miſſas faciam. Refractionem itaque ex unicâ tantum parte Priſmatis perpendam; & quoniam omnes radii, demptis mediocriter refrangibilibus, à dimidio ACD bis deberent refringi, & ſemel tantùm ab altero dimidio DCB, perpendiculariter ingreſſi latus planum DC ſecundum lineam XY: itaque in dimidio DCB fiat calculus, hoc eſt, ad latus planum BC; ſuppoſito quòd omnibus radiis ſecundum eandem lineam XY allapſis, angulus, quem maximè refrangibiles cum minimè refrangibilibus, poſtquam refringerentur à latere BC, conſtituerent, foret dimidium anguli PYT; h. e. 1°. 9′. Jam, cùm angulus incidentiæ radii XY ex præmonſtratis ſit 31°. 36′, & angulus refractionis mediocris 54°. 10′; transferentur hæc omnia in ſchema appoſitum; ponendo quòd CB ſit ſuperficies diſterminans Medium vitreum



DE MENSURA



vitreum verſus A, & Aereum verſus F, & quòd angulus incidentiæ XYH ſit 31°. 36′; eritque angulus refractionis, RYF, 54°. 10′; & angulus PYT, 1°. 9′; differentia nempe refractionis inter maximè refrangibiles YP & minime refrangibiles YT. Qui angulus à radio YR mediocriter refracto, & confinium Cærulei & Viridis occupante, biſecatur. Ac proin angulus, PYR vel RYT, erit 34½ min. dimidium totius PYT. Adeoque angulus PYE 54 grad. 44½ min. & angulus TYE 53 grad. 35½ min. & eorum ſinus, PG ac FT, erunt 81656 & 80481; quorum proportione ad ſimpliciores numeros redactâ, erit PG ad TF ut 69½ ad 68½ circiter. Ad hunc modum experimenta & calculum cùm ſæpius inſtituerim, horum ſinuum proportiones inter terminos 67 ad 66, & 72 ad 71 ſemper obvenerunt; ſed ut plurimum incidi in proportiones 69 ad 68, 69½ ad 68½, & 70 ad 69; quarum tantilla eſt differentia, ut parvi intereſt quænam adhibeatur.

Illarum refractionum ſinus ad communem ſinum incidentiæ conferuntur.

40. Ratione ſinuum refractionis pro extremis radiorum, ſimiliter incidentium, generibus ſic inventâ, eorum computatio ad ſinum incidentiæ ſimul innoteſcit; quippe qui paulo antè inventus eſt 52400: & conferendo hunc, 52400, ad ſinus 81656 & 80481, eorum ratio in minoribus numeris reperietur, 44½ ad 69½, & 68½; aut 44¼ ad 69 & 68 ferè. Refractionibus nempe ex Vitro in Aere peractis.

Radiorum, ad oppoſitas partes ejuſdem refringentis ſuperficiei incidentium, ſinus ſunt reciprocè proportionales.

41. Quòd ſi radii è contra ex Aere in Vitrum ſimiliter incidant, proportiones ſinuum nullo negotio ex jam inventis eruuntur, utpote quæ ſunt reciprocæ. Sit I communis ſinus incidentiæ è Vitro in Aerem, P ſinus refractionis maximè refrangibilium radiorum, R mediocriter refrangibilium, & T minime refrangibilium. Dico, quòd ex horum reciprocè proportionibus, ſi $\frac{1}{I}$ ponatur eſſe ſinus incidentiæ ex aere in vitrum, erit $\frac{1}{P}$ ſinus refractionis maximè refrangibilium radiorum, $\frac{1}{R}$ ſinus refractionis mediocriter refrangibilium,

frangibilium, ac $\frac{1}{T}$ minimè refrangibilium. Nam cùm ſinus incidentiæ radii maximè refrangibilis è vitro in aerem ſit I, & ſinus refractionis P, radii ejus ex Aere in Vitrum, per eaſdem lineas retroacti, ſinus incidentiæ erit P, & ſinus refractionis I; ſiquidem jam radius eſt incidens, qui prius fuerit refractus. Eſt ergo ſinus incidentiæ radii maximè refrangibilis, ex aere in vitrum utcunque incidentis, ad ſinum refractionis ut P ad I; hoc eſt (applicando terminos rationis ad P) ut I ad $\frac{I}{P}$; hoc eſt (applicando ad I denuo) ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{P}$: et ſimili argumento conſtabit ejuſmodi ſinus radii mediocriter refrangibilis eſſe ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{R}$; & ſinus minimè refrangibilis ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{T}$. Liquet ergo, quòd poſito $\frac{1}{I}$ communi ſinu incidentiæ, erunt $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$, & $\frac{1}{T}$ ſingulorum generum reſpectivè ſinus.

Refractionum.

42. Rem numeris illuſtro. Cùm $44\frac{1}{4}$ ad 69 & 68 ſit ratio ſinûs communis incidentiæ ad ſinus maximè diſcrepantium refractionum è Vitro in Aerem: ſinus incidentiæ communis ad ſinus refractionum ex Aere in Vitrum, erit ut $\frac{1}{44\frac{1}{4}}$ ad $\frac{1}{69}$ & $\frac{1}{68}$; ſive $\frac{69 \times 68}{44\frac{1}{4}}$ (=106 ferè) ad 68 & 69. Hoc eſt, pro radiis maximè refrangibilibus, ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ut 106 ad 68, & pro minimè refrangibilibus ut 106 ad 69.

Illuſtratur refractio Vitri.

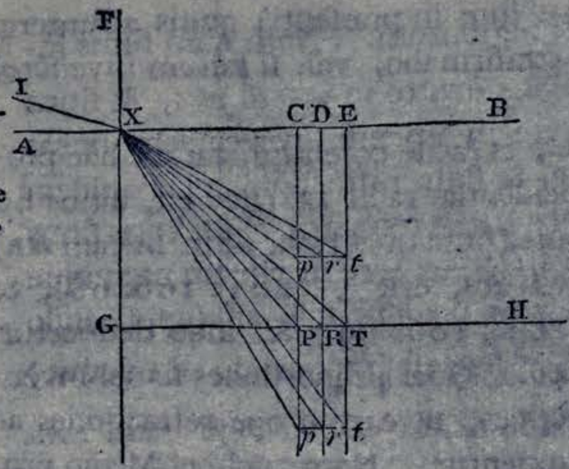
43. Hiſce ſic determinatis, rationes ſinuum pro radiis intermediis facilè determinantur ex cognitis colorum diſtantiis, quas in imagine coloratâ obſervant. Sic radii, qui ad Cæruleum paulo magis quàm ad Flavum vergunt, cùm in mediam imaginem cadant, intermediam rationem ſinuum $44\frac{1}{4}$ ad $68\frac{1}{2}$, vel 106 ad $61\frac{1}{2}$, circiter habebunt; & ſic de aliis.

E refractionibus extremorum generum facile eſt de intermediis conjecturam facere.

44. Ad eundem modum, quo refractiones ad Vitrum determinatæ ſunt, id ipſum poſſet fieri ad alia Media; ſed è re erit, ut Regulam jam oſtendam, quâ refractionum iſtarum menſuræ, ex ſinubus earum, ſic ad Vitrum determinatis, poſſunt determinari ad quodlibet aliud Medium propoſitum, idque licet iſtud ſit alii Medio quàm Aeri contiguum. Sit AB ſuperficies terminans Aerem ex parte F, & Vitrum ex parte G, ad cujus aliquod punctum, X, ducatur linea FXG ei perpendiculariter inſiſtens; & præterea concipiatur rectam IX ad angulum IXA infinitè parvum duci, ſecundum

Theoremate oſtenditur, quomodo è refractionibus radiorum heterogenéorum ad Vitrum, vel quodvis Medium, inter ſe determinatis, poſſunt etiam ad alia quælibet

Media Aeri contigua refractiones, ſine novis experimentorum moleſtiis, inter ſe determinari.



cundum quam omnes omnium formarum radii ſupponantur incidere, & in X refringi; puta maximè refrangibiles verſus P, mediocriter refrangibiles verſus R, & minimè refrangibiles verſus T, alioſque intermedios verſus intermedias plagas. Porro ducatur linea quævis GH parallela ad lineam incidentiæ IX, hoc eſt, perpendicularis ad FG; ea verò ſecet radios in punctis P, R & T, à quibus demittantur PC, RD, ac TE perpendiculares ad refringentem ſuperficiem AB. His ad Vitrum ſic determinatis ac deſcriptis, ſi aliud quodvis Medium in locum Vitri jam concipiatur ſubſtitui, cæteris ſtantibus, & radii alicujus, mediocriter refrangibilis ſecundum lineam IX incidentis ad X, refractus X*r* ducatur ſecans rectam DR in *r* (Quod fieri ſuppono, ſiquidem modum, quo mediocriter refrangibilium refractiones ad Media quælibet inveſtigari poſſunt, antehac expoſui) Dein per punctum *r* ducatur recta *pt* ſecans lineas CP & ET in *p* & *t* perpendiculariter, junganturque *p*X & *t*X: dico, quòd radii maximè refrangibiles ſecundum dictam lineam IX incidentes refringentur in lineam X*p*, & minimè refrangibiles in lineam X*t*; radiique cujuſvis ſpeciei, quos Vitrum refringebat, ad quodlibet punctum PT, illi ad correſpondens punctum rectæ *pt* per alterum dictum Medium refringentur, quod pro Vitro ſupponitur ſubſtitui; iſtis punctis linearum PT & *pt* habitis pro correſpondentibus, per quæ recta quævis parallela ipſi DR tranſit. Patet itaque modus, quo refractiones quorumvis radiorum ex Aere in quodlibet Medium propoſitum, obliquitate maximâ incidentium, determinari potuerunt, cognitâ unici tantum radiorum generis in iſtud medium refractione; & proportionibus ſinuum ex obliquiſſimâ iſtâ refractione determinatis, eorundem radiorum refractiones dabuntur ad quamlibet aliam datam incidentiam.

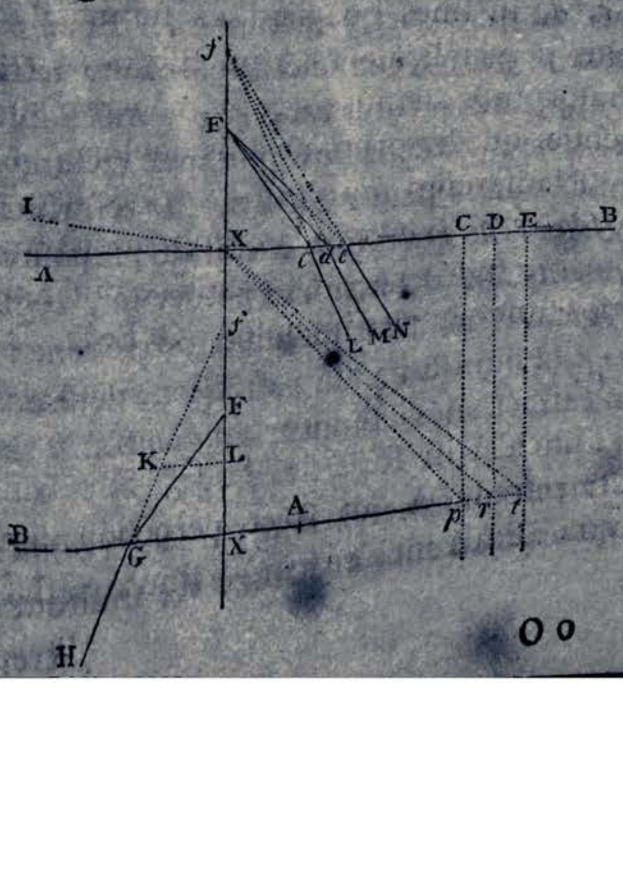
De Theorematis illius certitudine.

45. Hujus quidem Theorematis certitudinem ab experimentis nondum habeo depromptam, ſed cùm à veritate vix multum diſcrepare

crepare videatur, nihil veritus ſum in præſentiâ gratis aſſumere. Poſthac forte vel experientiâ confirmabo, vel, ſi falſum invenero, corrigam.

46. Calculum quod attinet, is facilè poteſt inſtitui ex hâc proportionalitate, quòd ſinus incidentiæ radii IX (hoc eſt, ſinus 90 grad.) ſit ad ſinum refractionis (puta quæ facta ſit in lineam XR) ſicut XR ad RG. Sic ad vitrum, erit XR. RG : : 106. $68\frac{1}{2}$, & XP. PG : : 106. 68, & XT. TG : : 106. 69 ; & inde deducetur, quòd GP. GR. GT : : 39. $39\frac{1}{2}$. 40. Quæ proportiones ſemel inventæ poſſunt in eum finem aſſervari, ut earum ope refractiones ad alia Media quàm Vitra determinentur. Nam quolibet Medio propoſito, ſumatur XE=40, DE=$\frac{1}{2}$, & CD=$\frac{1}{2}$, atque perpendicula CP, DR, ET erigantur. Tunc ex datâ ſinuum refractionis radiorum mediocriter refrangibilium proportione, hoc eſt, ex datâ proportione ipſius X*r* ad XD, dabitur punctum *r*, & longitudo D*r*; cui æquales ſunt C*p* & E*t* : punctiſque *p* ac *t* ſic datis, dantur rationes ipſarum X*p* & XC, hoc eſt, ſinuum incidentiæ & refractionis pro radiis minimè refrangibilibus. Sic pro ſuperficie Aquam & Aerem diſterminante, ſinus iſti ſunt ut 68 ad 90 pro minimè refrangibilibus, & ut 68 ad 91 pro maximè refrangibilibus proximè. De proportione quarundam linearum, quæ computo per hoc Theorema inſtituendo inſerviat.

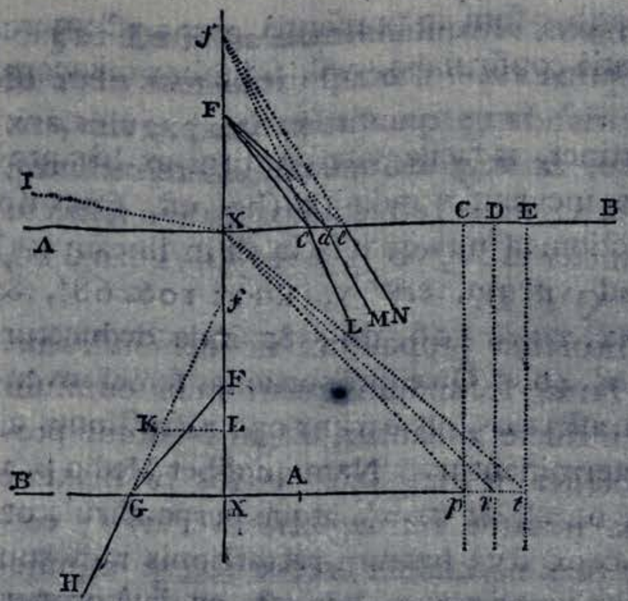
47. Proportionibus linearum XC, XD, & XE ſic inventis, menſura refractionum ex Aere in Medium quodvis propoſitum, & ad quamlibet incidentiam factarum, per aliud inſuper Theorema non inelegans determinari poteſt. Aliud ad idem peragendum Theorema.



In lineâ FX, ad refringens planum AB perpendiculari, ſumatur punctum aliquod F, quod lucidum fingatur ; ac ducatur quælibet F*d* ſecans AB in *d*, eaque concipiatur eſſe mediocriter refrangibilis radius, cujus refractus ex Aere in Medium propoſitum eſto *d*M ; qui retroductus ſecet FX in *f*. Porro fiat F*d*. F*e*::XD. XE (: : $39\frac{1}{2}$. 40)

 &

De Menſura.



& Fd. Fc : : XD. XC (: : $39\frac{1}{2}$. 39) centroque F & intervallis Fe & Fc deſcribantur circuli ſecantes AB in e & c; junganturque Fe, Fc, fe, fc, & producantur fe & fc indefinite verſus N & L. Dico jam, ſi radius minimè refrangibilis incidat ſecundum lineam Fe, quòd iſte refringetur in lineam eN; & ſi maximè refrangibilis incidat ſecundum Fc, quod iſte refringetur ſecundum cL; & ſic radii quorumlibet intermediorum generum, manantes à puncto F, & in puncta ſibi correſpondentia inter c & e incidentes, ita refringentur à Medio propoſito, quaſi manâſſent omnes à puncto f; iſtis punctis inter C & E atque c & e habitis pro correſpondentibus, quorum diſtantiæ ab X & F reſpectivè, ſunt in eâdem ratione cum DX & dF. Cujus Theorematis demonſtrationi præſternantur duo Lemmata ſequentia.

LEMMA I.

Ad ejus Theorematis demonſtrationem.

48. Duobus punctis, c, d, in lineâ quâpiam AB ſumptis, & aliis duobus, f & F, in ejus perpendiculo FX, junctiſque fd, Fd, fc & Fc, differentia quadratorum à duobus fd & Fd, concurrentibus ad d, æquabitur differentiæ quadratorum ab aliis duobus fc & Fc, concurrentibus ad c. Nam, cùm $fdq = f\text{X}q + \text{X}dq$, & $\text{F}dq = \text{FX}q + \text{X}dq$, erit differentia $fdq - \text{F}dq = f\text{X}q - \text{FX}q$. Et, ob eandem rationem, erit differentia $fcq - \text{F}cq = f\text{X}q - \text{FX}q$. Quare dictæ differentiæ, ſic æquales eidem tertio, ſunt æquales inter ſe. Q. E. D.

LEMMA II.

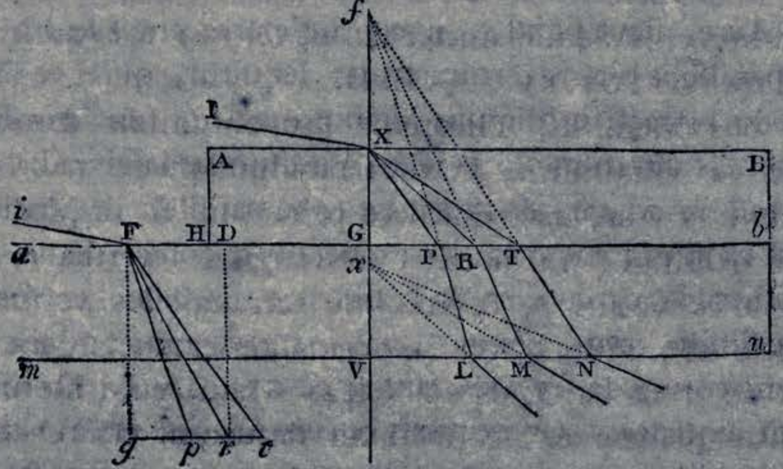
49. Si radius aliquis FG incidat in ſuperficiem AB, & refringatur verſus H, lineâ GH retroductâ, ut ſecet perpendiculum FX in f; dico, quòd fG. FG : : ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis.

tionis. Et è contra, ſi *f*G. FG : : ſin. incidentiæ ad ſinum refrac- REFRACTIONUM.
tionis, erit *f*GH refractus ipſius FG. Etenim ſumatur *f*K = FG, & demittatur KL perpendicularis ad FX; quo facto, cùm angulus GFX æquetur angulo incidentiæ, & angulus G*f*X angulo refractionis, erit GX ſinus incidentiæ, & KL ſinus refractionis, habito reſpectu ad circulum cujus ſemidiameter ſit FG, vel *f*K; ſed *f*G. *f*K : : GX. KL, hoc eſt *f*G. FG : : GX. KL. Q. E. D.

50. His præmiſſis, Theorema propoſitum ſic demonſtratur. Demonſtratio Theorematis.
Ducatur IX obliquiſſima linea, ſecundum quam radii omnium formarum ex Aere ad X incidere ponantur, & in Medium propoſitum refringi; mediocriter refrangibiles verſus *r*, maximè refrangibiles verſus *p*, & minimè refrangibiles verſus *t*; eoſque lineæ ad puncta D, C & E normaliter erectæ ſecent in punctis *r*, *p* ac *t*, ut explicabatur § 44. Jam, cùm iſtorum radiorum ſinus incidentiæ & refractionis ſtatuantur eſſe ut X*r* ad XD, X*p* ad XC, & X*t* ad XE reſpectivè, ſi præterea demonſtratum fuerit, quòd *fd* ad F*d*, *fc* ad F*c*, & *fe* ad F*e* reſpectivè ſint in eâdem ratione (hoc eſt, quod *fd*. F*d* : : X*r*. XD : : ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis radiorum mediocriter refrangibilium, & *fc*. F*c* : : X*p*. XC : : ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis radiorum maxime refrangibilium) conſtabit propoſitum ex Lemmate ſecundo. Et mediocriter refrangibiles quòd attinet, cùm *fd* ſupponatur refractus ipſius F*d*, erit (per Lemma ſecundum) *fd* ad F*d* ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, hoc eſt, ut X*r* ad XD. Sed eadem proportionalitas in cæteris radiorum generibus jam demonſtranda proponitur, puta quòd ſit *fc*. F*c* : : X*p*. XC. Scilicet eſt F*c*. F*d* : : XC. XD, ut & F*d*. *fd* : : XD. X*r*, per hypotheſin. Quare permutando & connectendo rationes æquales, eſt F*c*. XC : : F*d*. XD : : *fd*. X*r*; & quadrando, F*cq*. X*cq* : : F*dq*. XD*q* : : *fdq*. X*rq*; diminuendoque per terminos æqualis rationis, F*cq*. X*cq* : : *fdq* − F*dq* (ſive per Lem. I. *fcq* − F*cq*) : X*rq* − XD*q*, ſive C*pq*; & augendo per terminos æqualis rationis, F*cq* : X*cq* : : *fcq*. C*pq* + X*cq* (X*pq*); denique terminorum radices extrahendo, permutandoque, eſt *fc*. F*c* : : X*p*. XC. Quare *fc*, ſive *c*L, eſt refractus ipſius F*c* per Lemma ſecundum. Q. E. D. Et eodem argumento patebit, quòd *e*N ſit refractus radii F*e*. Deque aliis radiis, pro variis refrangibilitatis gradibus intermedia ſpatia variè occupantibus, idem intelligendum eſt.

Heterogeneorum refractiones, à ſuperficiebus aeri neutrâ ex parte contiguis, Theoremate etiam determinantur.

51. De refractionibus ſuperficierum Aeri contiguarum menſurandis hæc ſatis. Quòd ſi deſideretur id ipſum ad alias ſuperficies, aëri ex parte neutrâ contiguas, fieri; ſunto AB*b*H & *abnm*, duo quælibet Media, ſecundum planam ſuperficiem H*b* contigua, &



Aere circundata; ſitque AB planum ipſi H*b* parallelum, & in eo ſumatur punctum X, ad quod ducatur XV perpendicularis, & IX obliquiſſima linea ſecundum quam (ut jam antè) radii omnium formarum incidant, & pro gradu refrangibilitatis refringantur ad P, R, & T, aliaque intermedia loca. Horum radiorum, in propoſitam ſuperficiem *ab* ſic incidentium, refractiones jam quærantur; & cùm refractiones mediocriter refrangibilium ad quaſlibet ſuperficies fuerint antehac expoſitæ, radii XR ſit refractus RM, & is retroducatur, donec ſecet perpendiculum XV in *f*, & inſuper ducantur *f*P, *f*T, & producantur ad L & N. Dico, quòd PL erit refractus ipſius XP, ac TN ipſius XT, atque omnes aliarum formarum radii incidentes inter P ac T ita refringentur, ut poſtea divergant à puncto *f*. Concipiatur enim, quòd Medium *abnm* longius verſus *am* producitur quàm Medium AB*b*H, ita ut ejus plani *a*H*b* pars inter H & *a* ſit Aeri contigua; & ad aliquod in eo punctum F ducatur perpendicularis F*g*, nec non obliquiſſima linea *i*F, ſecundum quam radii omnium formarum incidant, & pro gradu refrangibilitatis refringantur ad *p*, *r*, *t*, locaque intermedia; perinde ut effectum erat ad alterius Medii ſuperficiem AB. Præterea ſumatur FD = GR; & ducatur D*r* ipſi F*g* parallela, ut ſecet radium

radium FR in *r*; unde *rg* demittatur ad F*g* normalis, alioſque radios F*p* & F*t* ſecans in *p* ac *t*. Jam, cùm ſit *gr* = GR, erit etiam *gp* = GP, & *gt* = GT ex oſtenſis § 44; & inſuper ex oſtenſis § 35. cùm radiorum ſecundum IX & *i*F, lineas parallelas, incidentium eadem ſit refractio in Medium *abnm*, ſive immediatè ingrediantur ex Aere, ſicut fit ad F, ſive priùs permeent aliud Medium ut AB*b*H parallelis planis terminatum: ſequitur, quòd radii, alterutro modo refracti in dictum Medium *abnm*, ſunt paralleli radiis homogeneis altero modo in idem Medium refractis; hoc eſt, quòd F*p* ad PL, F*r* ad RM, & F*t* ad TN ſunt paralleli. Quapropter, ſi refracti radii PL, RM ac TN retroducantur, donec ſinguli occurrunt perpendiculo GX, cum eo & baſibus GP, GR ac GT conſtituent triangula ſimilia triangulis *gp*F, *gr*F, & *gt*F, imo & ipſis æqualia; ſiquidem eorum baſes *gp* & GP, *gr* & GR, *gt* & GT ſibimet reſpectivè ſint æquales. Quare, cùm horum triangulorum vertices conveniant ad idem punctum F, illorum etiam vertices ad idem aliquod punctum *f* convenient; hoc eſt, radii PL, RM ac TN, ipſorum XP, XR & XT refracti, divergent omnes ab eodem puncto *f*. Q. E. D.

52. Oſtenſo hoc, ſequentia obveniunt notanda. Theorema illud notis quibuſdam promovetur.

I. Quòd proportiones ſinuum incidentiæ & refractionis, ad ſuperficiem H*b* factæ, ex his facilè determinantur. Nam pro radiis maximè refrangibilibus ſinus iſti ſunt ut *f*P ad XP, & pro minimè refrangibilibus ut *f*T ad XT, &c.

II. Hinc ſi proportiones ſinuum refractionis ex Aere in duo quælibet Media propoſita, paribus incidentiis, dentur; proportiones ſinuum refractionis ex altero Mediorum in alterum facile dabuntur, dividendo nempe ſinus poſterioris Medii per correſpondentes ſinus anterioris. Sic cùm refractio fit ex Aere in Vitrum, dicti ſinus ſunt ut 68, $68\frac{1}{2}$, 69; & cùm fit ex Aere in Aquam, ſunt ut 90, $90\frac{1}{2}$, 91. Ergo cùm fit ex Aquâ in Vitrum erunt ut $\frac{68}{90}$, $\frac{68\frac{1}{2}}{90\frac{1}{2}}$, $\frac{69}{91}$, hoc eſt ut 281, $281\frac{1}{2}$, 282 ferè.

III. Si tertium aliquod Medium, Aere denſius, poſtponatur Medio *abnm*, contingens illud in ſuperficie *mn*, quæ concipiatur plana ipſiſque AB & *ab* parallela, & ſi radii divergentes à puncto *f*, ſicut modò oſtenſum erat, in illud incidant ad puncta L, M & N; poſtquam

poſtquam in iiſdem refringuntur, divergent rurſus ab alio quodam puncto *x*, quod ſitum eſt in perpendiculo XG. Et ſic præterea in infinitum, quotcunque licet Media parallelis planis ab invicem diſcreta, ſeſe ordine ſequantur. Quòd ſi Aer immediatè ſuccedat Medio *abnm*, punctum iſtud *x*, à quo emergentes radii tendunt, ſitum erit ad V in ipſâ refringente ſuperficie; propterea quòd emergent paralleli ad ſummè obliquam lineam IX, ſecundum quam primùm incidebant ex Aere; ſi modò emergere dicantur, qui nunquam divaricabant à refringenti ſuperficie.

IV. Si radii ab aliquo puncto F, in Aere ſito, divergentes, tendant ad puncta *c*, *d*, *e*, eo more quem ad § 47. explicui, & per varia deinde plana refringentia ipſiſque AB parallela tranſeant; ſemper divergent omnes ab eodem aliquo puncto, quod ſitum eſt in perpendiculo planorum per punctum F tranſeunte, non ſecus quàm ſi incidiſſent in planum AB, advenientes in obliquiſſimâ lineâ IX; & longitudines radiorum, punctis refringentibus dictoque perpendiculo interceptorum, ſunt ut ſinus incidentiæ & refractionis ad ſingula plana, quæ reſpiciunt. Quarum aſſertionum demonſtrationes, cùm facile eruantur è prædictis, prætermitto, ne nimius in hâc re videar.

SECTIO TERTIA.

De Planorum Refractionibus.

POSITIS Refractionum legibus radiorum per diverſa Media trajectorum, affectiones aliæ jam tradendæ ſunt; & primò refractiones Planorum in gratiam doctrinæ de Coloribus, pòſt explicandæ, deſcribam; deinde Sphæricarum & aliarum Superficierum proprietates enarrabo; tum ut Colorum exinde ortorum phænomina detegantur, tum ut Inſtrumentorum, Opticis uſibus inſervientium, conſtructio rectiùs innoteſcat. Imprimis autem Plani Solitarii refractiones, deinde Planorum Refractiones iteratas conſiderabo.

De Plani Solitarii refractionibus.

Quod ad radios ejuſdem cujuſcunque generis attinet, paſſiones in Lectionibus Dris. Barrow (his fundamentis, quòd radii Lucis in ſimilari Medio directi ſunt; quòd eorum refractio fit in ſuper-

* Barrow Lect. Opt. L. III. Art. 3. † Ibid. Lect. III. Art. 4 & 6.

ficie

ficie ad Medii refringentis ſuperficiem perpendiculari; & quòd ſinus incidentiæ perpetuò ſunt proportionales ſinubus refractionum in aliud Medium ſimilare factarum) traduntur; & idcirco ſufficiet aliquas, ſub formâ Lemmaticarum Propoſitionum, ſine demonſtrationibus hîc recenſuiſſe.

PROP. I.

* *Radii cujuſvis refracti Incidens incidentis viciſſim ſit Refractus.*

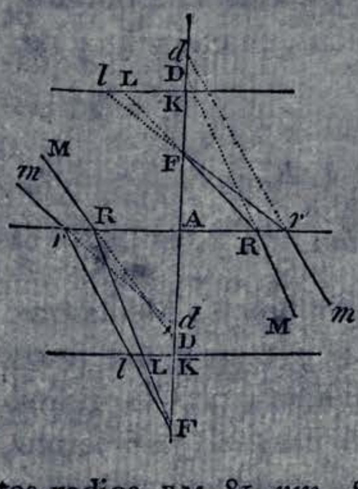
PROP. II.

† *Angulo incidentiæ æquali æqualis, & majori major convenit, tum angulus refractionis, tum refractus, & contrà.*

PROP. III.

‡ *Incidentium radiorum Refractos exhibere.*

Inſtantiam in radiis ad Medium denſius è rariori divergentibus accipe.



Sit F punctum radios FR, Fr aliosque innumeros verſus refringentem ſuperficiem, AR, ejaculans; ſitque FA radius perpendicularis, quem produc ad K, ut ſit AF ad AK, ſicut ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ; & ad K erige perpendiculum KL. Quo facto, radios quoſlibet incidentes FR, Fr retrorſum produc, donec præfatæ KL occurrant in L & *l*: & in angulo FAR inſcribe RD=RL, & *rd*=*rl*. Quibus verſus M & *m* productis, habebis refractos radios RM & *rm*, & eâdem ratione refractos quamplurimos confeſtim duces.

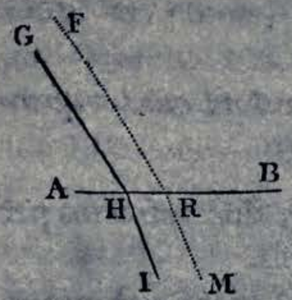
PROP. IV.

Radium datæ rectæ parallelum deſignare, cujus Refractus per datum punctum tranſibit.

Sit AB ſuperficies refringens, M punctum datum, & GH recta

‡ Ibid. L. IV. Art. 5.

De Planorum



cui radius incidens debet eſſe parallelus. Et imprimis radii ſecundum GH incidentis duc refractum HI per Prop. III. eique parallelum age MR; & FR, datæ GH parallelè ductus, erit radius incidens.

P R O P. V.

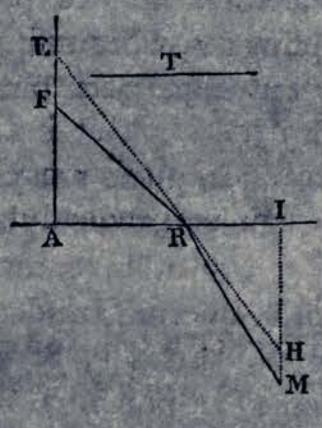
Radium è dato puncto prodeuntem deſignare, cujus refractus evadet rectæ poſitione datæ parallelus.

Abſolvitur ad modum quartæ Propoſitionis, denominatione radiorum ſecundum Prop. I. permutatâ.

P R O P. VI.

Radium è dato puncto, F, *progredientem deſignare, cujus refractus per aliud punctum datum,* M, *tranſibit.*

Per F & M ducantur refringenti perpendiculares; &, radio in Medium denſius incidente, fiat AE ad AF, ut ſinus incidentiæ ad radicem differentiæ quadratorum à ſinubus incidentiæ & refractionis. Item T ad MI, ut ſinus refractionis ad eandem radicem. Anguloque AIM, per E tranſiens, ipſamque T adæquans inſcribatur recta RH, & connectantur FR, RM; nam ipſæ FR, RM erunt radii quæſiti.



Cùm radius incidit in Medium rarius, appellatione (ſecundum Prop. I.) commutatâ, abſolvitur ut antè.

Cæterùm quo pacto data recta angulo recto interſerenda ſit, quæ per punctum datum tranſibit, in Lect. V. Dris. * *Barrow* per Hyperbolæ & Circuli interſectionem oſtenditur.

P R O P. VII.

† *Radiorum ad planam ſuperficiem divergentium, parallelorum, vel convergentium Refracti, itidem divergent, paralleli erunt, vel convergent, & è contrà.*

* Idem elegantiùs perfecit Barrovius Lect. Geom. VI. Art. 2.

P R O P.

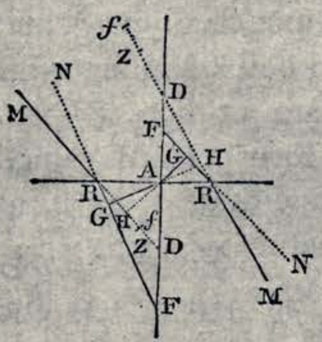
PROP. VIII.

Refractionibus.

Punctum, à quo refracti illi radii divergunt, vel ad quod convergunt, invenire.

Caſ. 1. Cum radiorum definita ſit inclinatio, duc refractos per Prop. III, IV, V vel VI. & interſectionem habebis.

Caſ. 2. At cùm inclinatio exiſtit quâvis datâ indefinitè minor, eodem recidit Problema, ac ſi punctum in radio obliquo refracto quæres; quod radiorum alterutrinque jacentium interſectiones diſterminat & intercedit, quodque pro radiationis centro, ſeu loco imaginis, reſpectu oculi per cujus pupillæ centrum radius ille tranſigitur, haberi debet. Ejus autem inventio ejuſmodi eſt.

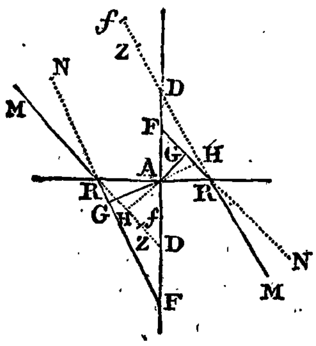


Sit DRM refractus cujuſvis incidentis FRN, ſitque F centrum radiationis incidentium, (ſive divergentium ſive convergentium) radiorum; & FA, refringenti normaliter inſiſtens, ſecet RM in D. Jam ab A demitte ad hos radios perpendicula, AG & AH; fac eſſe RF. Rf : : FG. DH; & ipſius RM, aliorumque refractorum, proximè RM utrinque jacentium, centrum radiationis erit f ‡.

Scholium. Cæterùm punctum hoc f radiorum in plano FAR jacentium concurſus ſolummodò exiſtit; nam aliorum, extra planum FAR jacentium, refracti nec in puncto f, nec ullibi omnino radium Rf ſecabunt; ſi eos ſolummodò excipias, quorum incidentes jacent in ſuperficie conicâ, cujus axis eſt AF, vertex F, & ſemiangulus AFR; utpote qui omnes præfatum Rf in puncto D ſecabunt, quod in axe FA ſit poſitum. Et hujus itaque Rf centra radiationis præcipuè ſunt duo; alterum f, à refractis jacentium in plano FAR effectum; & alterum à refractis jacentium in conicis ſuperficiebus axe FA, anguliſque AFR, ADR deſcriptis. Ad reliquos autem radios quod attinet, aliter circa FR quaquaverſum poſitos, eorum refracti maximè appropinquant radio Rf, alicubi inter D & f; adeo ut reſpectu Oculi, per cujus pupillæ centrum radius RM tranſit, locus Imaginis per totum ſpatium fD diffundi de-

† Barrow Lect. Opt. L. IV. Art. 2. &c. ‡ Vid. Barrow Lect. Opt. L. V. Art. 15. &c.

De Planorum beat: vel potius, cùm ſpatium *f*D ſit unici tantum puncti F imago, debemus unicum aliquod in eo punctum, quod omnis lucis ab eo verſus oculum pergentis meditullium occupet, inter puncta D & *f* in mediâ circiter diſtantiâ interjacens, pro ſenſibili imagine ſtatuere. Puncti verò illius accurata determinatio, cùm omnium radiorum ab F verſus oculi pupillam refractorum habenda ſit æſtimatio, Problema ſolutu difficillimum præbebit; niſi hypotheſi alicui ſaltem veriſimili, ſi non accuratè veræ, innitatur aſſertio. Quemadmodum, cùm radii æquè multi à termino D aliiſque vicinis punctis, ac à termino *f* aliiſque punctis ſimiliter ſibi vicinis, verſus Oculum videantur profluere; locus Imaginis ita debet in medio iſtorum terminorum ſtatui, ut angulus, quem radii duo à D & *f*, ad idem quodpiam pupillæ punctum convergentes, includant, à radio ab illo viſionis loco ad idem pupillæ punctum pergente, quàm proximè ſemper biſecetur. Quâ hypotheſi admiſſâ, nihil



aliud agendum eſt, quàm ut fiat M*f*+MD. MD : : *f*D. ZD, & erit Z locus viſionis puncti F quæſitus, poſito nempe quòd M ſit locus oculi. Nam cùm ponatur M*f*+MD. MD : : *f*D. DZ, erit diviſim M*f*. MD : : *f*Z. DZ, & proinde ductis tribus lineis à *f*, D, & Z ad M, vel potius ad punctum quodpiam huic M indefinitè vicinum; angulus, quem externæ duæ continent, ab interjacente lineâ (per 3. 6. Elem.) quàm proximè ſemper biſecabitur.

54. His paucis circa radios homogeneos in gratiam ſequentium obiter notatis, ut eorum penitior cognitio habeatur, Lectiones, quas Vir Reverendus Dr. Barrow de iiſdem fuſius compoſuit, conſulendas eſſe hortor; deque heterogeneis ſive diſſimiliter refrangibilibus radiis pergo actutum diſſerere.

PROP. IX.

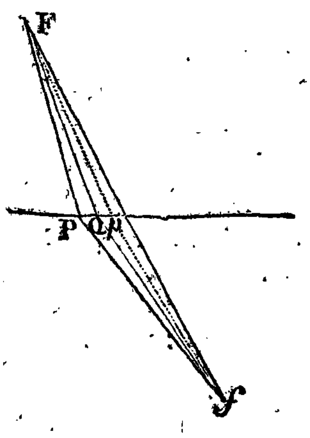
E radiis diverſi generis, à puncto lucido fluentibus, ſoli poſſunt ad aliud commune punctum refringi, qui jacent in plano per utrumque punctum tranſeunte, et ad planum refringens perpendiculari.

Utpote cùm radii cujuſque refractio ſemper fiat in plano ad Medii

Medii refringentis ſuperficiem perpendiculari, & ejuſmodi duo plana per utrumque punctum tranſire nequeant.

PROP. X.

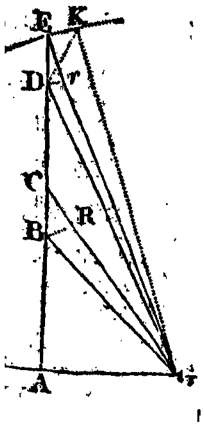
Si radiis diverſorum generum à dato puncto fluentibus, quorum refracti ad aliud punctum datum convergunt, illi magis à lineâ rectâ, punctis concurſuum ſive radiationum centris, interjacente divaricant, qui ſunt magis refrangibiles.



Sint FP*f*, FQ*f* radii diſſimiles, hinc & inde convenientes in F & *f*; & manifeſtum eſt, quòd non penitus coincident, quia ſic par eſſet refractio contra hypotheſin. Neque radius magis refrangibilis poteſt eſſe rectæ F*f* propior. Sic enim propter obliquitatem ex parte Medii denſioris majorem, major eſſet ejus refractio per Prop. II. & hypotheſin, hoc eſt, angulus F*pf* eſſet minor angulo FQ*f* contra 21. I. Elem. Reſtat itaque, ut ſit magis refrangibilis FP*f*, qui à rectâ F*f* magis divaricat.

LEMMA I.

Quatuor lineis, GB, GC, GD, GE, *à dato puncto*, G, *ad datam lineam* EB, *ita ductis, ut ſit* GB. GC :: GD. GE; *angulus* BGC, *quem minima*, GB, *cum alterutrâ intermediarum*, GC, *conſtituit, major eſt quàm angulus* DGE, *ab alterâ intermediâ*, GD, *& maximâ*, GE, *conſtitutus*.



Nam centro G, radio GE, deſcribatur circulus EK, & radius GK ducatur, conſtituens angulum DGK æqualem angulo BGC, & puncta K, D jungantur; eruntque triangula GDK, GCB ſimilia, propter æquales angulos ad G, & latera circa illos proportionalia. (6. 6. Elem. & Hypoth.) Nempe GB. GC :: GD. (GE) GK. Quare angulus KDG = ang. CBG. Sed ang. EDG (16. I. Elem.) > ang. CBG. Ergo linea

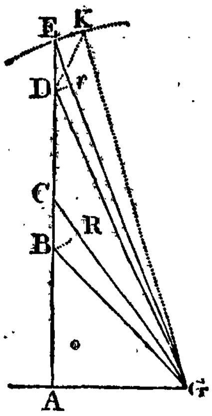
De Planorum

KD>ED (7. 3. Elem.) & ang. KGD> ang. DGE (25. 1. Elem.) hoc eſt, ang. CGB> ang. EGD. Q. E. D.

LEMMA II.

Poſitis iſtis angulis infinitè parvis, ac GA *perpendiculari ad lineam* EB *demiſſâ, erit ang.* EGD. *ang.* CGB : : BA. DA.

A punctis enim B & D ad lineas GC, GE demittantur normalia BR ac D*r*; & erunt anguli præfati ad ſe invicem ut eſt $\frac{Dr}{DG}$ ad $\frac{BR}{BG}$, ponendo nempe lineas iſtas, BR ac D*r*, æquipollentes eſſe arcubus infinitè parvis, quibus anguli iſti ſubtenduntur. Eſt autem BG.CG : : DG.EG ex hypotheſi; & diviſim, BG. CR : : DG. E*r*. Item propter ſimilia triangula BAG, CRB, eſt BA. AG : : CR. BR; & pari ratione EA vel DA. AG : : E*r*. D*r*, ſive AG. DA : : D*r*. E*r*. Quamobrem addendo rationes æquales, eſt BA. AG + AG. DA (: : BA. DA) : : CR. BR + D*r*. E*r* (& permutatis terminis poſteriorum rationum) : : CR. E*r* + D*r*. BR (& æquipollente ratione pro CR. E*r* ſubſtitutâ) : : BG. DG + D*r*. BR (terminiſque ad invicem applicatis) : : $\frac{Dr}{DG}$. $\frac{BR}{BG}$. Eſt itaque BA. DA : : $\frac{Dr}{DG}$. $\frac{BR}{BG}$, h. e. ut ang. EGD ad ang. CGB. Q. E. D.

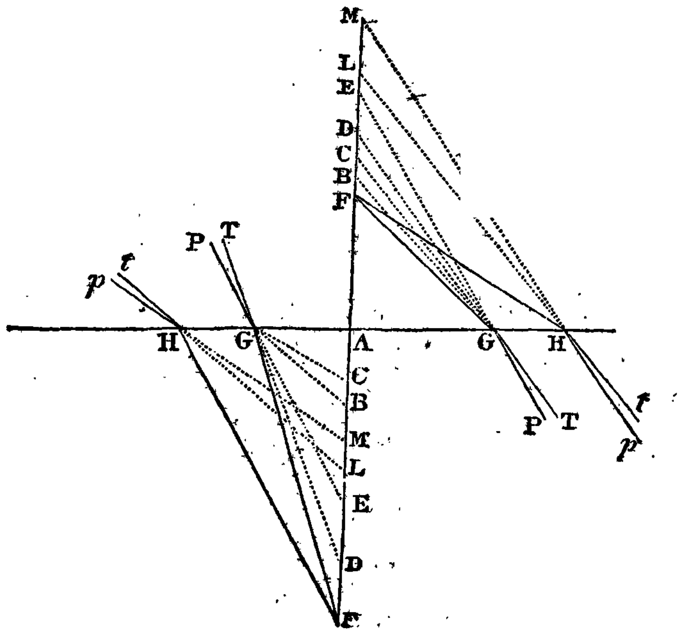


PROP. XI.

Heterogeneis radiis ſecundum eandem lineam incidentibus, quo obliquior eſt eorum incidentia, cæteris paribus, eo major erit differentia refractionis.

Sit FG linea ſecundum quam duo radii incidunt; quorum unus, maximè refrangibilis, pergat verſus P; & minimè refrangibilis verſus T: eritque angulus PGT differentia refractionis. Item eſto FH linea obliquior quàm FG; & ſecundum hanc alii duo ejuſmodi radii incidant; quorum maximè refrangibilis verſus *p*, & minimè refrangibilis verſus *t* refringitur: & ſimiliter erit angulus *p*H*t* eorum differentia refractionis. Dico jam, quòd ſit angulus *p*H*t* > PGT. Demittatur enim FA ad refringens planum linea normalis, quæ refractos radios retroactos ſecet in D & E, L & M; & ad hanc à puncto G ducatur duæ lineæ, GB, GC, ipſis HL, HM parallelæ.

ſelæ. Jam, cùm tres lineæ GF, GD, GE (ex naturâ refractionis antè deſcriptâ § 27, 28 & ſeq.) ſint in ratione datâ; & alteræ tres HF, HL, HM in eâdem ratione, proportionales erunt HL. HM : : REFRACTIONIBUS.



GD. GE. Sed eſt HL. HM : : GB. GC, propter triangula ſimilia LMH & BCG. Quare GB. GC : : GD. GE, adeoque ang. BGC > ang. DGE per Lemma I. hoc eſt; ang. LHM > ang. DGE; ſive ang. pHt > ang. PGT. Q. E. D.

55. Cæterùm, ut de mutuis angulorum PGT & pHt proportionibus habeatur plenior determinatio, dico præterea, quòd ſunt inter ſe quàm proximè ùt lineæ AB & AD; ſegmenta nempe baſium triangulorum æquialtorum, quorum alterum, EGD, conſtituitur à radiis GP ac GT, cum perpendiculo AF concurrentibus; & alterum, CGB, fit ſimile triangulo MHL, à radiis Hp & Ht ſimiliter conſtituto. Nam anguli EGD & CGB, ſi eſſent infinitè parvi, forent inter ſe ut AB & AD per Lem. II. At iſti ex hypotheſi ſunt æquales angulis PGT & pHt. Quare etiam illi PGT & pHt, modò eſſent infinite parvi, forent itidem ut AB ad AD; & pari ratione conſtat, quòd ſunt quàm proximè ut AC ad AE. Scilicet eorùm ratio has duas rationes ſemper intercedit, & ideo veritatem adhuc propiùs aſſequemur adhibendo rationem intermediam. Nempe quòd eſt PGT ad pHt ut AB+AC ad AD+AE, vel ut $\sqrt{AB \times AC}$ ad $\sqrt{AD \times AE}$ proximè.

PROP.

De Planorum

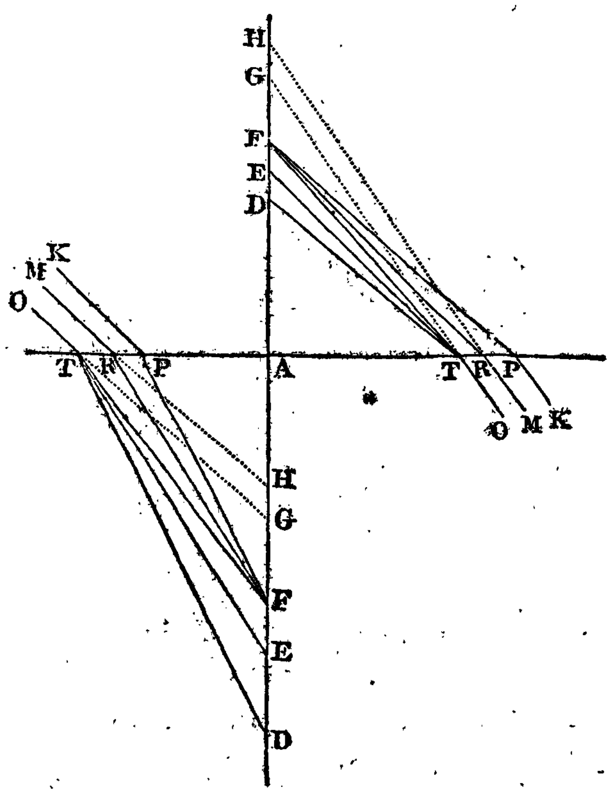
PROP. XII.

Radios diverſorum generum, à dato puncto profluos, deſignare, quorum refracti per aliud punctum datum tranſibunt.

Cùm punctorum alterutrum infinitè diſtet, ut radii ex eâ parte exiſtent paralleli; res per Prop. IV & V. abſolvitur, & per Prop. VI. cùm utrumque infinitè diſtat.

Scholium.

56. E re erit, ut oſtendam, quomodo ex datâ alicujus radii poſitione cæteri omnes expeditiùs determinentur.



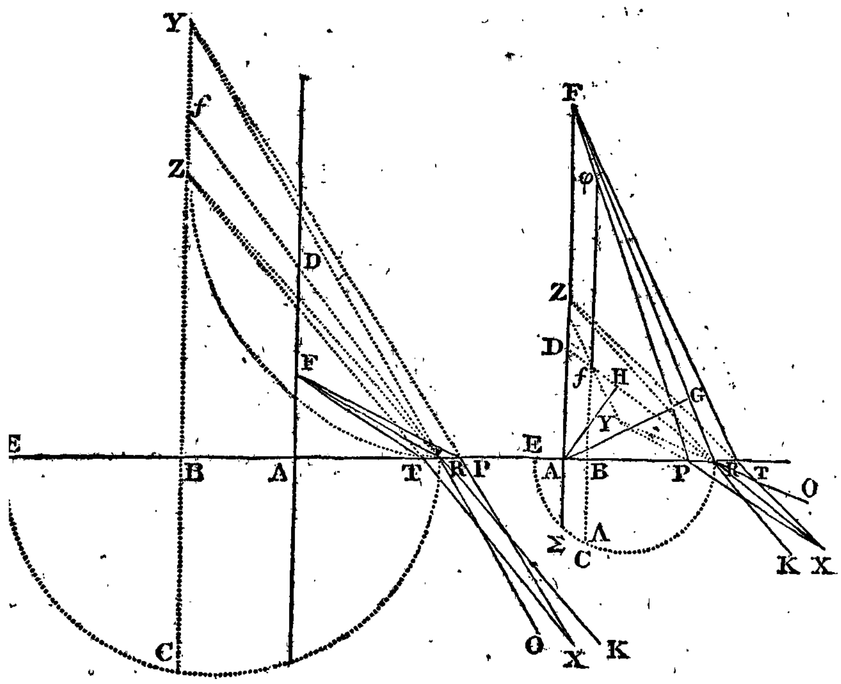
Caſ. I. Sint FT, FR, FP radii ab F prodeuntes; quorum refracti, TO, RM, PK, paralleli ſunt futuri. Et radii FT eſto ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſicut I ad T; quemadmodum & radiorum FR & FP ſinus iſti, ſicut I ad R & P. Jam ut horum quovis, FT, poſitione dato, cæteri confeſtim deſignentur, demitte FA refringenti normalem; & in angulo FAT inſcribe TE, TD, hâc lege, ut ſit T. R. P :: TF. TE. TD; & ipſis TE, TD age parallelas, FR, FP. Dico factum. Scilicet refractis TO, RM cum perpendiculo DA occurrentibus in G & H, erit I. T :: TG. TF; & præterea, cùm ſit T. R :: TF. TE (hyp.) erit ex æquo I. R :: TG. TE. Sed eſt I. R :: RH. RF. Ergo TG. TE :: RH. RF; atque adeo, cùm TE & RF parallelæ ſunt (ex hyp.) erunt etiam TG & RH parallelæ. Q. E. O. Deque radii PK parallelismo conſimile eſt ratiocinium.

Caſ.

Caſ. 2. Si parallelis incidentibus refracti ad datum punctum convergant, propoſitum nihil ſecus exequaris, ut è Prop. I. patet. REFRACTIONIBUS.

Caſ. 3. Denique ſi divergant incidentes, & refracti convergant, Problema ſolidum eſt; ſed ad planum quodammodo reducitur fingendo differentiam refrangibilitatis infinitè parvam eſſe: quæ cùm ſemper ſit admodum exigua, ſolutionem ex iſtâ hypotheſi haud gravatim exhibebo.

Pone FRX radium eſſe poſitione datum, & radios FPX, FTX (quorum datæ ſunt ſinuum incidentiæ & refractionis rationes)

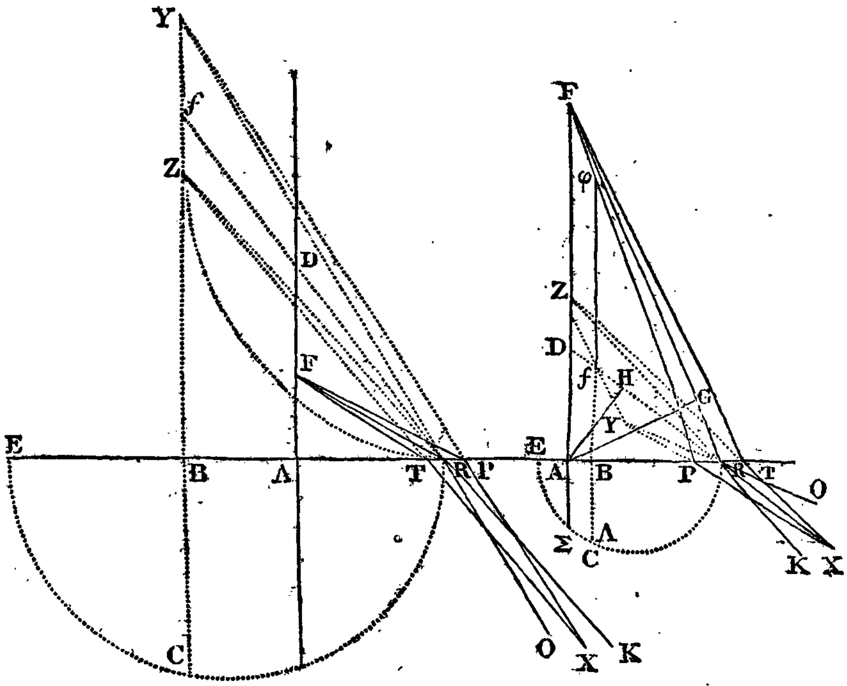


punctis F & X interſerendos eſſe. Jam alios etiam radios, æquè refrangibiles ac radios FP, FT, finge ſecundum lineam FR incidere, & refractos eorum RO, RK (ope Prop. tertiæ) deſcribe; centraque radiationum, Y & Z, per Prop. VIII. quære; ac junge YX ac ZX refringenti occurrentes in P ac T. Dico factum. Nempe FPX, FTX eſſe radios, quos oportuit deſignare. Nam, cùm ex hypotheſi, differentia refrangibilitatis, adeoque diſtantia punctorum T, R & P, ſit indefinitè parva, conſtat homogeneos radios, RO, PX, ſibi mutuò viciniſſimos eſſe, & inde ab eodem radiationis puncto Y divergere. Rectè ita determinavi radium PX per radii RO centrum radiationis tranſiturum eſſe, deque radio TX per eſt ratio.

57. Verùm

De Planorum

57. Verùm enimvero, cùm anguli PXT determinatio eò ſpectet, ut noſcatur, quanta ſit Objectorum, mediante refractione viſorum, propter inæquabiles abſimilium radiorum refractiones confuſio, perque quantum ſpatium colores inde emergentes extenduntur; quemadmodum pateat, concipiendo F eſſe punctum lucidum, quòd, oculo in X conſtituto, per totum angulare ſpatium PXT, quod radiis PX ac TX maximè minimèque omnium refrangibilibus com-



prehenditur, dilatum ac diffuſum appareat: de magnitudine ejus paucula adjiciam. Finge lineam curvam Y*f*Z deſcriptam eſſe, in quâ radiationum centra radiorum omnigenorum jacent, ſecundum lineam FR incidentium, & ita refractorum in puncto R, ut per totum angulum KRO divaricent; & iſta Curva non malè aſſimilabitur Objecto lucido, cujus angulus viſibilis, ſive apparens magnitudo, ad oculum in X ſitum, ſit YXZ, ac diſtantia ab eodem oculo, ad meditullium ejus æſtimata, *f*X. Et hinc conſectatur.

I. Quòd (cùm rei viſibilis apparens magnitudo penè ſit reciprocè ut diſtantia ejus) ſtante puncto F, & puncto X in lineâ RX ubicunque ſumpto, angulus PXT, ſive YXZ pene erit reciprocè ut longitudo *f*X. Et hinc intervallo RX diminuto angulus PXT auge-

tur,

tur, ejuſque quantitas in quâlibet puncti X diſtantiâ dabitur, ſi modò data fuerit unquam in quâpiam diſtantiâ. REFRACTIONIBUS.

II. Quinetiam angulo ORK cognito, cognoſcitur angulus quilibet PXT, ſumendo eum in ratione ad ORK, quam habet R*f* ad X*f*; quippe cùm YRZ (cui ORK æquatur) ſit Objecti Y*f*Z, in diſtantiâ *f*R, apparens magnitudo.

III. Cùm itaque angulus ORK, pro quâlibet obliquitate radiorum juxta RF incidentium, ſuprà in Schol. ad Prop. XI. determinatus habeatur, & punctum *f* haud difficilè inveniatur; faciendo juxta Prop. VIII. ut ſit RF. R*f* : : $\frac{AFq}{RF}$. $\frac{ADq}{RD}$, ſatis conſtat anguli PXT inventio.

IV. At ex abundanti ſubnoto prædictam Curvam Y*f*Z, in quâ radiorum omnis generis, in puncto R refractorum, Radiationum centra locantur, eſſe Ciſſoidem vulgarem, ſive Diocleam, circulo accommodatam, cujus diameter RE ſit ad AR ut FR*q* ad AF*q*. Nam ſuper diametro RE deſcripto circulo iſto RCE, agatur quævis recta *f*BC normalis ad RE, Circuloque in C & Curvâ in *f* terminata. Et propter analoga latera ſimilium triangulorum RAD, RB*f*, erit AD*q*. AR×DR : : B*fq*. BR×*f*R; & applicando poſteriorem rationem ad BR, fiet AD*q*. AR × DR : : $\frac{Bfq}{BR}$. *f*R. Rurſuſque ducendo conſequentes rationum in R*f*, & applicando ad AR, orietur, AD*q*. DR× R*f* : : $\frac{Bfq}{BR}$. $\frac{Rfq}{AR}$. Eſt autem $\frac{AFq}{FR}$. $\frac{ADq}{DR}$: : RF. R*f* ut priùs; & conſequentibus in DR & antecedentibus in FR ductis, oritur AF*q*. AD*q* : : FR*q*. DR×R*f*; & viciſſim AF*q*. FR*q* : : AD*q*. DR×R*f*. Quamobrem rationes eidem tertiæ congruentes connectendo, habebitur $\frac{Bfq}{BR}$. $\frac{Rfq}{AR}$: : AF*q*. FR*q*; ducendoque antecedentes rationum in BR, & conſequentes in AR, prodibit B*fq*. R*fq* : : AF*q*×BR. FR*q*×AR; & inſuper applicando poſteriorem rationem ad AF*q*, fiet B*fq*. R*fq* : : BR. $\frac{FRq \times AR}{AFq}$. Sed cùm poſuerim RE. AR : : FR*q*. AF*q*, erit $\frac{FRq \times AR}{AFq} = $ RE; & proinde B*fq*. R*fq* : : BR. RE; ac diviſim B*fq*. R*fq* − B*fq* (BR*q*) : : BR. BE. Atqui, ex naturâ circuli eſt BC media proportionalis inter BR & BE; adeoque eſt BR. BE : : BR*q*. BC*q*, & proinde B*fq*. BR*q* : : BR*q*. BC*q*, ſive B*f*. BR : : BR. BC: quod indicat Curvam eſſe Ciſſoidem, ſicut oſtendendum propoſui (d).

58. Re-

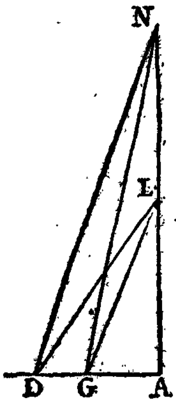
(d) QUOD tamen magis geometricè ad hunc ferè modum oſtendatur. À puncto A in radios, incidentem

DE PLANORUM

58. Refractionibus ad ſuperficiem, data duo Media diſcriminantem, tranſactis, ad explorandum quid, ex auctâ alterius Medii raritate vel denſitate, conſequitur, ſive ad diverſorum Mediorum effectus inter ſe conferendum, jam animum adjicio.

LEMMA III.

Si a duobus punctis, D, G, *in lineâ quâpiam* AD *ſitis, ad alia duo puncta*, L, N, *in ejus perpendiculo ſita, ducantur quatuor rectæ*, DN, DL, GN, GL, *ratio ductarum ad punctum remotius* N *magis accedit ad æqualitatem, quam ratio ductarum ad vicinius punctum* L; *ſive eſt* GN. DN > GL. DL.



Sit enim GN. DN :: GL. R, & erit $GNq. DNq :: GLq. Rq :: GNq - GLq. DNq - Rq$. Quare, cùm ſit DN > GN, ſive $DNq > GNq$, erit $DNq - Rq > GNq - GLq$. Verùm eſt $GNq - GLq = DNq - DLq$ (§ 48.) & ideo $DNq - Rq > DNq - DLq$, hoc eſt $DLq > Rq$, ſive DL > R. Atque adeo, cùm ſupponatur GN. DN : : GL. R, erit GN. DN > GL. DL. Q. E. D.

PROP. XIII.

Poſito Radiorum diverſi generis communi ſinu Incidentiæ, quo magis diverſa eſt Mediorum denſitas, eo major erit inæqualitas rationis ſinuum Refractionis.

Sit F*e* radius è minimè refrangibilibus utcunque in ſuperficiem A*c* incidentibus; ſitque refractus ejus *cl*, qui retroactus ſecet perpendiculum FA in *f*. Dein capiatur A*e*, ut ſit F*e* ad F*c* in datâ quâdam

cidentem refractumque, RF, RD, demiſſis ad perpendiculum AG, AH, erit RF ad R*f* ut FG ad DH, (Prop. VIII. Caſ. 2.) Permutando RF : FG = R*f* : DH. Rectangula igitur RF × FG, R*f* × DH erunt inter ſe ſimilia, & eam inter ſe rationem habebunt quam quadrata à lateribus homologis. Id eſt RF × FG : R*f* × DH = $RF^2 : Rf^2$.

Sed R*f* × DH : RD × DH = Rf^2 : R*f* × RD.

Quare ex æquo RF × FG : RD × DH = RF^2 : R*f* × RD.

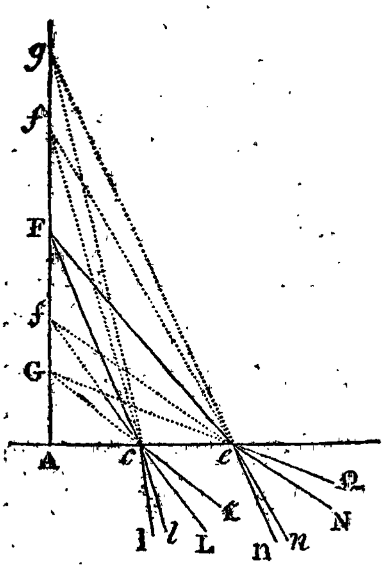
Id eſt, cùm rectangula RF × FG, RD × DH quadratis ex AF, AD ſingulatim ſunt æqualia, $AF^2 : AD^2 = RF^2$: R*f* × RD.

Permutando $AF^2 : FR^2 = AD^2$: R*f* × RD.

Sed $AF^2 : FR^2$ = AR : RE. (Id enim ponitur.)

Quare

quâdam ratione, qualem antea deſcripſimus (§ 46, 47 & 51.) hâc ſcilicet conditione, ut habito Fe pro radio maximè refrangibili, refractus ejus ab eodem puncto f divergat. Facto hoc, ſi pro poſteriori Medio aliud utcunque denſum rarumve ſubſtituatur, ejuſmodi duo radii ſecundum eaſdem rectas Fe, Fc incidentes, ſemper debent ita refringi, ut ab eodem aliquo perpendiculi iſtius puncto ſimiliter divergant (§ 47 & 49.) quemadmodum à g verſus l & n; poſito quòd hoc Medium poſterius ſit denſitatis ab interiori magis diverſæ, quàm alterum poſterius Medium, quod efficiebat divergentes à f. Oſtendendum eſt itaque, quòd major ſit inæqualitas rationis ſinuum refractionis in poſteriori quàm in priori caſu. Scilicet radii Fcl ſinus incidentiæ eſt ad ſinum refractionis ut fc ad Fc (§ 49.) hoc eſt, ut 1 ad $\frac{Fc}{fc}$. Et ſic radii Fen ſinus iſti ſunt ut 1 ad $\frac{Fe}{fe}$. Quare ſinus refractionum eorundem radiorum ſunt inter ſe ut $\frac{Fc}{fc}$ ad $\frac{Fe}{fe}$. Et ſimili diſcurſu conſtabit, quòd radiorum cl, en, refractorum conſimiles refractionum ſinus ſunt ut $\frac{Fc}{gc}$ ad $\frac{Fe}{ge}$. Reſtat itaque probandum, quòd inter $\frac{Fc}{gc}$ & $\frac{Fe}{ge}$ major ſit diſproportio quam inter $\frac{Fc}{fc}$ & $\frac{Fe}{fe}$; hoc eſt (cùm ſit $\frac{Fe}{fe} > \frac{Fc}{gc}$ per Lem. III.) probandum reſtat, quòd ſit $\frac{Fe}{ge}. \frac{Fc}{gc} > \frac{Fe}{fe}. \frac{Fc}{fc}$. Scilicet eſt $ge. fe < gc. fc$, per Lem. III. & ſumendo reciproca rationum, erit $\frac{1}{ge}. \frac{1}{fe} > \frac{1}{gc}. \frac{1}{fc}$; ducendoque priorem rationem in Fe, &



Quare $AR : RE = AD^2 : Rf \times RD$.
Invertendo $RE : AR = Rf \times RD : AD^2$.
Sed, propter rectas AD, fB inter ſe parallelas, erit $AR : RB = AD : fB = AD^2 : fB \times AD$.
Cùm igitur ſit $RE : AR = Rf \times RD : AD^2$.
Et $AR : RB = AD^2 : fB \times AD$.
Ex æquo erit $RE : RB = Rf \times RD : fB \times AD$. Id eſt (propter rectangula $Rf \times RD$, $fB \times AD$ inter ſe ſimilia) $RE : RB = Rf^2 : fB^2$. Dividendo $EB : BR = BR^2 : fB^2$.
Sed propter circulum $EB : BR = CB^2 : BR^2$.
Quare $CB^2 : BR^2 = BR^2 : fB^2$. Et $CB : BR = BR : Bf$. Erit igitur punctum f ad Ciſſoidem à circulo ECB generatam. Q. E. D.

poſteriorem,

De Planorum

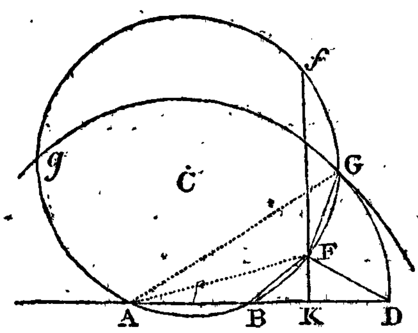
poſteriorem in Fc, orietur $\frac{Fe}{ge} \cdot \frac{Fe}{fe} > \frac{Fc}{gc} \cdot \frac{Fc}{fc}$, & viciſſim $\frac{Fe}{ge} \cdot \frac{Fc}{gc} > \frac{Fe}{fe} \cdot \frac{Fc}{fc}$. Q. E. D.

Scholium.

Demonſtratio perinde ſe habet in literis majuſculis (quibus refractiones deſignavi cùm poſterius Medium ſit anteriori rarius) ſi modò vice ſigni > ubique ſubintelligatur ſignum <, & > vice <. Notabis inſuper, quòd in hâc demonſtratione poſui denſitatem poſterioris tantùm Medii variatam eſſe; ſed eodem recidit, ſi anteriora Media ſucceſſivè varia adhiberi, poſteriori non mutato; ſive, quod tantundem eſt, ſi refractiones è poſteriori Medio in anterius viciſſim peragi concipias. Siquidem radiis in ſuperficiem alterutrinque incidentibus conſimiles ſunt ſinuum rationes. Cæterùm de exactâ horum ſinuum pro quibuſlibet propoſitis Mediis ratione inveſtigandâ diſſerui antè, & Propoſitionem haud attigiſſem, ſi non exigiſſet Prop. XV. mox tradenda.

LEMMA IV.

Centro A, *diſtantiâ quâvis* AD, *deſcribatur circulus* DGg; *deinde centro quolibet* C, *diſtantiâ* AC, *deſcribatur alius circulus ſecans rectam* AD *in* B, *&* *circulum priùs deſcriptum in* G. *Tum arcus* BG *biſecetur in* F, *&* FK *demittatur ad* BD *perpendicularis. His ita conſtitutis, dico, quòd* FK *ſic perpendiculariter demiſſa dictam* BD *biſecabit.*



Junctis enim AF, AG, BF, FG & FD; in triangulis AFG & AFD anguli ad A ſunt æquales, propter æquales arcus, BF, FG, quibus ſubtenduntur; item latera circa iſtos angulos AD & AG ſunt æqualia, quippe radii ejuſdem circuli; & aliud latus AF habent commune. Quare etiam tertia latera, FG & FD, ſunt æqualia. Sed eſt BF æqualis FG, propter æqualitatem arcuum quos ſubtendunt; adeoque FB=FD, & triangulum FKB= triangulo FKD, & inde BK=KD.

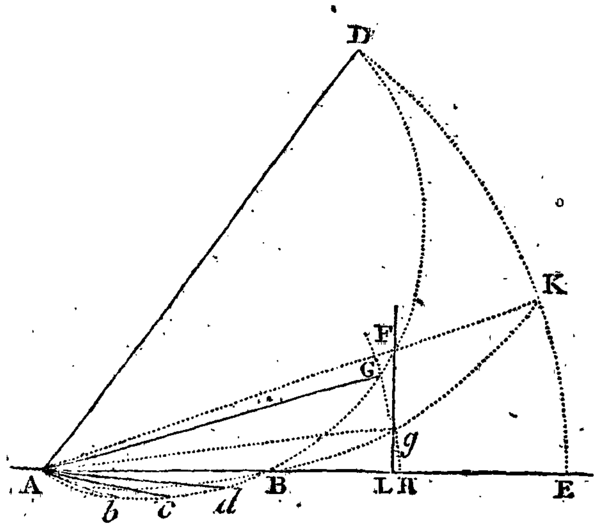
Cor.

Cor. 1. Hinc recta KF, quæ biſecat BD, inſiſtens ei normaliter, biſecabit etiam arcus BG, circulorum omnium per data duo puncta A & B tranſeuntium, & alicubi in G ſecantium datum circulum DG centro A intervallo AD deſcriptum. Imo & biſecabit arcus BG*g* in altero interſectionis puncto *f*. REFRACTIONIBUS.

Cor. 2. Idem eveniet, cùm A & B coincidunt; hoc eſt, cùm circuli AFG tangunt rectam AD in puncto AB. Poteſt etiam B ſumi ad alteras partes ipſius A. In tranſcurſu etiam notetur, quòd anguli BFK, BGD, quos circulus ABF cum rectâ FK & arcu GD efficit, ſint æquales.

LEMMA V.

Lineis quatuor, A*b*, AB, A*c*, AG, *circulo alicui ab eodem circumferentiæ puncto ita inſcriptis, ut ſit* A*b*, AB :.: A*c*. AG, *quarum omnium* A*b ſit minima : dico angulum* BAG *majorem eſſe angulo* *b*A*c*.



Deſcribatur enim alius circulus AB*g*, ſecans priorem in punctis A & B; cujus diameter ſit ad ejus ABG diametrum ſicut AB & A*b*, centris utriuſque ad eaſdem partes ipſius AB jacentibus. Dein centro A, diſtantiâ AG, deſcribe tertium circulum GH, ſecundo occurrentem in *g*; & iſtud *g* ex conſtructione jacebit alicubi inter G & H; atque adeò, ſi A*g* ducatur, erit angulus BAG major angulo BA*g*. Eſt autem angulus BA*g* = angulo *b*A*c*, propterea quòd AB & A*g* ſimiliter inſcriptæ ſunt circulo AB*g*, ac A*b* & A*c* ipſi A*bc*, habentes nempe eaſdem rationes & inter ſe, (A*b*. A*c* : : AB. AG vel A*g*) & ad diametros circulorum, quibus inſcribuntur. Cùm ergo ſit BAG > BA*g* = *b*A*c*, erit BAG > *b*A*c*. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc in eodem quovis radiorum genere, quo major eſt refractio,

De Planorum

refractio, eo major erit angulus refractus. In fig. pag. 295. ubi eſt FR. RD :: Fr. rd, erit angulus Frd > ang. FRD.

Cor. 2. Hinc etiam ſi ſit AG. AB > Ac. Ab, multo magis erit angulus BAG > bAc. Hoc eſt in genere, quo majores ſunt ſubtenſæ, & ſimul, quo major eſt inæqualitas rationis earum, eo major erit differentia angulorum, quos ſubtendunt. Atque idem de ſinubus & eorum angulis, utpote ſubtenſarum & eorum angulorum dimidiis, intellige.

LEMMA VI.

Inſuper ſi arcus cd ipſi bc capiatur æqualis, & AD *inſcribatur circulo* ABD, *quæ ſit ad* Ad *ſicut* AG *ad* AC; *cæteris ſtantibus, dico, quòd arcus* DG *erit arcu* GB *major.*

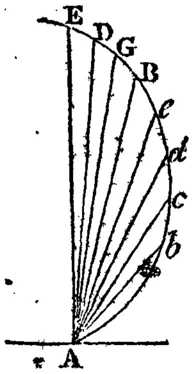
Nam centro A, radio AD deſcribe circulum DKE, circulo ABg occurrentem in K, & rectæ AB in E, & AK ducatur. Jam cùm AK, Ag & AB circulo ABgK ſimiliter inſcribantur, atque Ad, Ac & Ab ipſi Abc, erit arcus gK = arcui Bg; quare demiſſâ gL ad BE perpendiculari, & productâ donec ſecet arcum BD in F, iſta gL per Lem. 4. biſecabit tum rectam BE, tum arcum DB. At quoniam gF ex conſtructione jacet extra circulum gG, punctum F cadet inter G & D. Quare DG > DF, ſive > FB, & multo magis > GB. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc, ſi arcus *bd* non tantùm duabus ſed quotcunque partibus æqualibus conſtet, correſpondentes partes arcûs BD, à termino B ad terminum D, ſeſe gradatim ſuperabunt longitudine. Adeoque ſi arcus *bc* ad arcum *cd* habeat quamcunque rationem commenſurabilem, erit arcus GD. arc. BG > arc. *cd*, arc. *bc*; ſiquidem numeris æqualium partium, menſurantium arcus *bc* & *cd*, correſpondent conſimiles numeri partium inæqualium conſtituentium arcus BG ac GD; quarum illæ in GD ſunt omnes parte maximâ ipſius BG majores. Quinetiam, ſi *bc* ad *cd* habeat quamcunque rationem incommenſurabilem, erit itidem GD. BG > *cd*. *bc*. Nam rationum ſimilitudines, quæ quantitatibus commenſurabilibus conveniunt indefinitè, eo nomine conveniunt etiam incommenſurabilibus ſimiliter affectis, quemadmodum ex Euclideâ definitione ſimilium rationum oſtendi poteſt. Sed faciliùs deprehenditur

henditur imaginando quantitates, quas vocant incommenſurabiles, poſſe numerari per partes indefinitè parvas, & ſic ad naturam commenſurabilium, præſertim quoad rationum habitudines, quodammodo reduci. REFRACTIONIBUS.

Concipias itaque arcum *bc* in æquales & indefinitè multas partes dividi, & ejuſmodi tot ſumi, quæ minus quàm unâ parte (hoc eſt, indefinitè parum) differunt ab arcu *cd*, atque adeo ipſi pro more conſueto cenſeantur æquales; concipe etiam BD in partes æquales, ut antè definivi, correſpondentibus partibus ipſius *bd* dividi; & propter tot inæquales partes, majores quidem in GD & minores in BG, quot ſunt æquales in *cd* & *bc*; erit GD. BG > *cd. bc*.

Cor. 2. Hinc præterea componendo ſequitur, eſſe BD.BG > *bd. bc*, nec non GD. BD > *cd. bd*.



Cor. 3. Conſectatur denique, quod ductis utcunque partibus ſubtenſis A*b*, A*c*, A*d*, A*e*, & aliis quatuor AB, AG, AD, AE, quarum ſingulæ ad priorum ſingulas eandem rationem obſervant (nempe AB. A*b* :: AG. A*c* : : AD. A*d* : : AE. A*e*) ſi AE ſit omnium maxima, & A*b* minima, erit arcus ED. arc. GB > arc. *ed*. arc. *cb*. Nam per Corol. 1. hujus, eſt ED. DG > *ed. dc*, & DG. GB > *dc. cb*, & multo magis ED. GB > *ed. cb*. Haud ſecus patet eſſe arcum EG. arc. DB > arc. *ec*. arc. *db*; ſcilicet ex Corol. 2. hujus eſt EG. DG > *ec. dc*, ac DG. DB > *dc. db*, & multo magis EG. DB > *ec. db*. Denique, quæ de ſubtenſis & earum arcubus dicta ſunt, poſſunt etiam de ſinubus & eorum arcubus aut angulis intelligi.

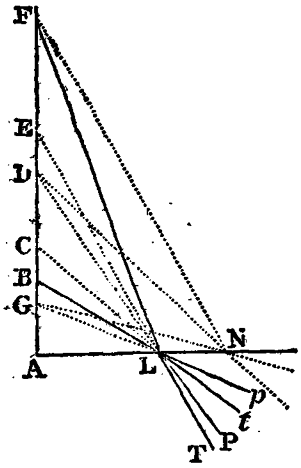
PROP. XIV.

Heterogeneis radiis è denſiori Medio in rarius, ſecundum eandem datam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo rarius ſit Medium, in quod radii refringuntur, eo major erit differentia refractionis.

Sit FL linea, ſecundum quam duo radii incidunt in ſuperficiem AL, quorum maximè refrangibilis refringatur ad P, & minimè refrangibilis ad T. Dico, quòd, ſi Medium rarius foret adhuc

magis

De Planorum



magis rarum, ut refringeret maximè refrangibilem radium ad *p*, & minimè refrangililem ad *t*, tunc angulus *p*L*t* foret major angulo PLT. Demittatur enim FA ad refringentem ſuperficiem normalis, quæ ſecet refractos radios retrorſum ductos in G, C, D & E. Deinde in refringente ſuperficie quæratur tale punctum N, ut ſit FN. DN : : FL. EL; ac DN productus erit refractus radii minimè refrangibilis, incidentis ab F ad N (§ 49.) Jam, cùm talis ſupponatur poſitio FL & FN, ut radii maximè refrangibilis ſecundum FL & minimè refrangibilis ſecundum FN incidentis, refracti, DL ac DN, divergant à puncto D, quod ſitum eſt in perpendiculo FA : eâ de cauſâ, licet raritas Medii, in quod refractio peragitur, foret alia quàm ſupponitur, tamen ejuſmodi radiorum, ſecundum eaſdem lineas FN & FL incidentium, refracti ſemper divergerent ab aliquo puncto, quod in eâdem FA ſit poſitum, quemadmodum in præcedentibus oſtenſum eſt (§ 51). Sic cùm raritas dicti Medii talis eſſe ſupponitur, ut maximè refrangibilis radius, ſecundum FL incidens, refringatur à puncto quopiam G; tunc minimè refrangibilis, ſecundum FN incidens, refringetur ab eodem G. Sed cùm maximè refrangibilis radius ſupponebatur à puncto G refringi, tunc etiam minimè refrangibilis, ſecundum eandem lineam FL incidens, ſupponebatur refringi à puncto C. Quare eſt GN. FN : : CL. FL (§ 27 & 49.) & præterea, cùm antea poſuerim eſſe FN. DN : : FL. EL, ex æquo erit GN. DN : : CL. EL. Sed per Lemma 3. eſt GN. DN > GL. DL; adeoque CL. EL > GL. DL. Quare ſi linea quædam BL ita ducatur, ut ſit CL. EL : : BL. DL, erit BL > GL propter majorem rationem, quam habet ad DL: & inſuper erit CL major BL, eo quòd ſit EL > DL; & proinde punctum B cadet inter G & C, eritque angulus GLC > ang. BLC. Cùm verò ſit CL. EL : : BL. DL, aut viciſſim BL. CL : : DL. EL, erit angulus BLC major angulo DLE (Lem. I.) & multo magis ang. GLC > DLE. Q. E. D.

PROP.

REFRACTIONIBUS.

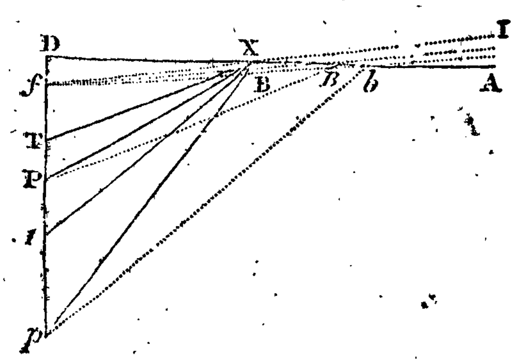
PROP. XV.

Heterogeneis radiis è Medio denſiori in rarius, ſecundum eandem datam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo denſius eſt Medium, è quo radii incidunt, eo major erit differentia refractionis.

Scilicet (propter majores refractiones) eo majores erunt ſinus refractionum reſpectu dati circuli, ad quem referuntur; & ſimul eo major erit inæqualitas rationis iſtorum ſinuum per Prop. XIII. adeoque eo major erit differentia angulorum, quos ſubtendunt per Corol. 2. ad Lem. V. hoc eſt, eo major differentia refractionis. Q. E. D.

PROP. XVI.

Heterogeneis radiis è Medio rariori in denſius, ſecundum eandem datam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo rarius eſt Medium, è quo radii incidunt, eo major erit differentia refractionis.

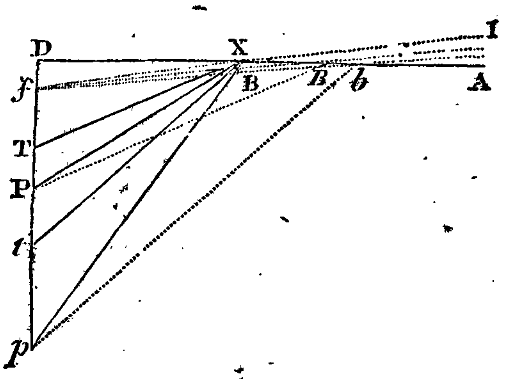


Sit AD ſuperficies, in quam duo radii ſecundum eandem lineam datam, IX, incidunt; quorum alter, maximè refrangibilis, refrangatur ad P; & alter, minimè refrangibilis, ad T. Dico, quòd, ſi Medium, ex quo radii incidunt, foret adhuc rarius, ut dictos radios adhuc magis refringeret, puta maximè refrangibilem verſus *p*, & minime refrangibilem verſus *t*, tum *pxt* major angulus evaderet, quam PXT. Id quod gradatim ſic demonſtratio.

Caſ. 1. Ponamus primò, quòd recta IX, ſecundum quam radii incidunt, ſit ad refringentem ſuperficiem obliquiſſima; ac ducatur quælibet recta, PD, eidem ſuperficiei normaliter inſiſtens in D, & ſecans refractos radios in punctis T, P, *t*, *p*, & IX producatur donec iſtam PD ſecet in *f*; tum in lineâ AD quæratur punctum

De Planorum

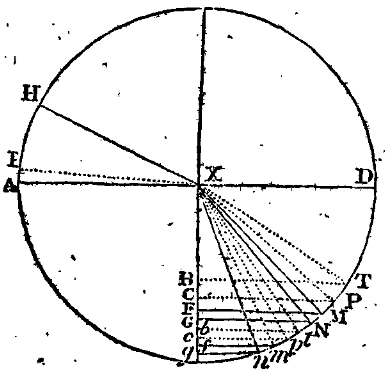
quoddam B hâc lege; ut ductis B*f*, BP, fiat X*f*. XT :: B*f*. BP. Liquet ergo, quòd, ſi minimè refrangibilis radius incidat in B verſus *f* tendens, is debet verſus P refringi; quippe cùm ex hypotheſi ſit BP. B*f* :: XT. X*f*, hoc eſt, ſinus incidentiæ ejus & refractionis, ſicut ſinus incidentiæ & refractionis alterius minimè refrangibilis radii IXT. Quamobrem, ſi ſupponamus hoſce radios retrocedere, alterum nempe è minimè refrangibilibus à T ad X, & alterum à P ad B, & maximè refrangibilem à P ad X, eorum omnium refracti tendunt à puncto *f*; ſiquidem notum eſt Theorema, quòd radii, ſecundum refractum ejus retrò incidentis, incidens viciſſim fit refractus. Jam, cùm radii difformes PB, PX, ab eodem puncto P manantes, refringantur ab eodem *f*, quòd ſitum eſt in perpendiculo PD; proportione inter PX & PB ſemel cognitâ, ſi ab alio quovis ejuſdem perpendiculi puncto ad refringentem ſuperficiem duæ ducantur lineæ eandem rationem habentes, hoc eſt, ſi una deſignans maximè refrangibilem radium ſit ad alteram, quæ deſignat minimè refrangibilem radium, ut PX ad PB: tunc iſtorum refracti (ex antè demonſtratis § 47) divergent ab aliquo etiam puncto, quod ſitum eſt in eodem perpendiculo PD, utcunque Medium ex parte radii IX ſupponatur rarum; dummodo Mediorum alterum, ex parte radii PX, eandem denſitatem retineat. Quemadmodum, ſi maximè refrangibilis radius incidat ſecundum *p*X, & refringatur à *f*, Medio ſcilicet verſus IX jam poſito rariori quàm antè; tum rectâ *pb* ſic ductâ, ut ſit PX. BP :: *p*X. *pb*, radius etiam minimè refrangibilis *pb* refringeretur ab eodem *f*. Unde ſequitur, eſſe *pb* ad *fb* ſicut ſinus incidentiæ radiorum minimè refrangibilium ad ſinum refractionis, § 49. Aſt in ratione iſtorum ſinuum eſt etiam *t*X ad *f*X; eo quòd inflexa IX*t* deſignet radium æqualiter refrangibilem, cujus pars IX producta tranſit per idem *f*. Quare eſt *pb*. *fb* :: *t*X. *f*X. Cùm verò radius IX ſupponatur eſſe ad refringentem ſuperficiem ſummè obliquus, ſive in angulo infinitè parvo inclinatus, adeo ut recta D*f* pro infinitè parvâ, ſeu nullâ, haberi debeat;



ſequitur

ſequitur eſſe DX=X*f*, DB=B*f*, ac D*b*=*bf*: quos valores pro X*f*, B*f* & *bf* ſubſtituendo in ſuprà recenſitas proportiones BP. B*f*:: TX. X*f*, & *pb*. *fb*:: *t*X. *f*X, emergent BP. BD:: XT. XD, & *pb*. D*b*:: *t*X. DX. Ex quibus pateat rectas BP ad XT, & *bp* ad X*t* parallelas eſſe, anguloſque BPX ad PXT, & *bp*X ad *p*X*t* æquales. Sed ex hypotheſi eſt PX. BP:: *p*X. *pb*, & proinde ang. *bp*X > ang. BPX per Corol. 1. Lem. v. hoc eſt, ang. *p*X*t* > ang. PXT. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

Caſ. 2. Incidentibus verò radiis, angulum definitè magnum cum refringente ſuperficie conſtituentibus, Propoſitum ſic patebit.



Sit HX recta, ſecundum quam incidunt; & cùm è Medio minùs raro adveniunt, ſit XM minimè refractus, & XN maximè refractus. Cùm verò adveniunt è magis raro, ſit X*m* minimè refractus & X*n* maximè refractus. Adhibeantur etiam obliquiſſimi incidentes radii IX cum eorum refractis XT, XP, X*t* & X*p*, quales jam deſcripſimus. Ita ſcilicet, ut, cùm tanta ſit anterioris Medii raritas, ut radios HX incurvari verſus M & N faciat, tunc etiam conſimiles radios IX incurvet verſus T & P. Cùm verò tanto major ſit ejus raritas, ut illos cogat verſus *m* & *n*, tunc hoſce ſimul cogat verſus *t* & *p*. Sit inſuper APD circulus centro X & intervallo quolibet AX deſcriptus,* qui ſecet hoſce refractos radios in T, P, M, N, *t*, *p*, *m*, *n*; à quibus ad perpendiculum BX demittantur ſinus refractionum TB, PC, MF, NG, *tb*, *pc*, *mf*, *ng*; & ex lege refractionum patebit eſſe TB. PC:: MF. NG, & *tb*. *pc*:: *mf*. *ng*; & inſuper ex hypotheſi & conſtructione patebit, eſſe TB ſinuum iſtorum maximum & *ng* minimum. Adeoque per Corol. 3. Lem. vi. eſt ang. TXP. ang. MXN > ang. *t*X*p*. ang. *m*X*n*; & permutando eſt ang. TXP. ang. *t*X*p* > ang. MXN. ang. *m*X*n*. Verùm ex oſtenſis in primo caſu, eſt ang. TXP < ang. *t*X*p*. Quare & multo magis erit ang. MXN < ang. *m*X*n*. Q. E. D.

De Planorum

PROP. XVII.

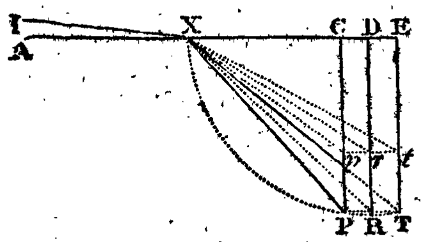
Heterogeneis radiis è Medio rariori in denſius, ſecundum eandem lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo denſius ſit Medium, in quod radii incidunt, eo major erit differentia refractionum ad certum uſque terminum, & poſt eo minor perpetuò.

Nam ſi Medium poſterius denſitate ſuâ valde parùm ſuperat anterius, ita ut refractiones indefinitè parvas efficiat, differentia refractionum erit etiam indefinitè parva; & proinde minor quàm foret, ſi Medium poſterius ſupponeretur denſius, ut refractiones evaderent majores. Quare auctâ Medii poſterioris denſitate, augebitur dicta refractionum differentia. Quòd ſi denſitas ejus in infinitum augeatur, refractiones etiam, quantum poterunt, augebuntur; hoc eſt, uſque dum omnes refracti radii perpendiculariter emergant, angulis refractionum & eorum differentiis tunc prorſus evaneſcentibus. Quare differentia refractionum rurſus diminuta eſt, donec in nihilum evanuit.

Scholium.

Etſi limitis ejus determinatio, ubi differentia refractionis evadit maxima, plus tædii & laboris adminiſtrare poſſit, quàm utilitatis; cùm tamen alicujus forte momenti cenſeatur denſitatem Medii cognoſcere, quod, radiis in ſe refractis, Colores maximè conſpicuos efficiat, non pigebit hunc inſuper deſignare, idque primò cum incidentia ſit obliquiſſima.

Caſ. 1. Eſto IX communis radiorum in ſuperficiem AX, quæcunque Media dirimentem, obliquiſſimè incidentium via; & eorum refracti, ut antè, ſunto X*p* & X*t*; & agatur recta quævis, *pt*, præfatæ ſuperficiei parallela, quæ radiis iſtis occurrat in *p* & *t*; à quibus ad AX demiſſis perpendicularibus, *p*C, *t*E, biſecetur CE in D; & centro D, diſtantiâ DX, circulus deſcribatur, ſecans C*p* in P, & E*t* in T; junganturque XP & XT. Dico, quòd, cùm ea ſit poſterioris Medii denſitas, ut radiorum ſecundum IX incidentium maximè refrangibiles ad P, &



minimè

minimè refrangibiles ad T refringat, tunc angulus PXT quàm maximus evadet. Etenim, utcunque Medium poſterius ponatur denſum, refracti radii ita lineas CP & CT in punctis p ac t ſecabunt, ut recta pt ipſi AX parallela ſit. Quare, ſi ducatur linea Dr, quæ lineas omnes pt biſecet, centrum cujuſcunque Circuli per p ac t tranſeuntis, ſemper jacebit in eâdem Dr. At angulus pXt eſt angulus in ſegmento circuli per puncta p, t & X tranſeuntis; qui ideo erit Maximus, cum ejuſmodi circulus exiſtit Mimimus; propterea quòd ratio ſubtenſæ pt ad circuli dimenſiones tunc evadit maxima. Verùm iſte circulus fit omnium minimus, cùm centrum ejus cadit in D; ſiquidem pro ſemidiametro tunc habet XD minimam refractarum*, quæ ab X ad RD duci poſſunt. Eſt ergo angulus pXt tunc maximus, cùm centrum circuli tranſeuntis per puncta p, t & X cadit in D; adeoque, cum circulus XpT & angulus PXT ejuſmodi ſunt, liquet Propoſitum.

Refractionibus.

Hinc obiter pateat hunc angulum PXT tunc etiam Maximum evadere, cùm talis eſt poſterioris Medii denſitas, ut angulus refractionis mediocriter refrangibilium radiorum obliquiſſimè ſecundum IX incidentium, ſit ſemirectus; & eo minorem perpetim fieri, quo iſte refractionis angulus à ſemirecto (exceſſu vel defectu) magis deviat. Quemadmodum, ſi refractiones ex Aere in Aquam, in Vitrum & in Cryſtallum peractæ conferantur, è calculo patebit, quòd, cùm angulus incidentiæ ſit 90^{gr}, proximè tunc angulus refractionis in aquam erit major ſemirecto, inque vitrum erit minor. Quamobrem Aqua minùs denſa eſt, & Vitrum magis denſum, quàm ut efficiant angulum PXT maximum. Et proinde, cùm Cryſtallum ſit adhuc denſius, efficiet iſtum PXT minorem, quàm Vitrum efficeret. Et ſic Vitrum, etſi minus refringat, in iſthoc tamen caſu heterogeneos radios in ſe refractos magis ab invicem diſſipabit quàm Cryſtallum; eoque pacto Colores in oppoſitam ejus ſuperficiem projicit magis diſtinctos. Sed hæc expertu ſunt difficillima, quòd Vitrum & Cryſtallum denſitate parùm differant, nec poſſint haberi ſatis craſſa; & ſi poſſent, tunc propter maximam craſſitiem haud forent ſatis perſpicua.

Caſ. 2. Quòd ſi linea, ſecundum quam incidunt radii, non ſit maximè obliqua, Problema emergit Solidum. Sed lubet modum oſtendere, quo conditionibus ejus nonnihil mutatis, ad Planum

* Lege rectarum.

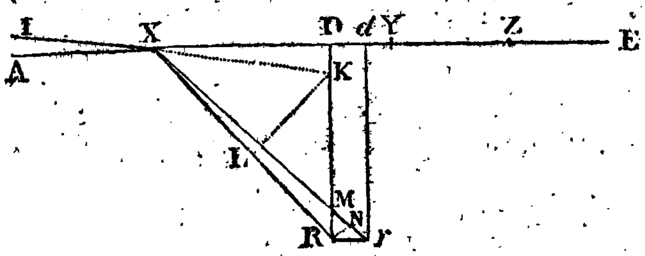
reduci

De Planorum

reduci poterit. Sciendum eſt itaque, quòd, cùm inter extremos ſex maximè difformes radios, innumeri ſint intermedii, qui gradibus continuè ſucceſſivis & infinitè parvis, alii magis aliis refringuntur, differentia radiorum extremorum conflata erit ex conſimilibus intermediorum differentiis, numero & parvitate infinitis. Jam cognitis proprietatibus iſtarum infinitè parvarum differentiarum, poſſumus exinde de omnibus ſimul aggregatis, ſive de differentiis finitè parvis, quales intercedunt extremorum refractionibus, judicium ferre; præſertim cùm iſtæ differentiæ ſint admodum exiguæ. Sic cognito quòd infinitè parvæ differentiæ augentur, diminuuntur, vel ſimul maximæ evadunt aut minimæ, concludendum erit, quòd omnium ſumma perinde augetur, diminuitur, vel maxima fit aut minima. Quòd ſi non ſint omnes ſimul maximæ vel minimæ, tamen ſumma pro maximâ vel minimâ haberi poteſt, cùm id accidit intermediæ parti. Sic omnium colorum latitudo tunc maxima cenſeri poſſit, cùm id accidit Viriditati. Jam licet Problema propoſitum, cùm de differentiis finitè parvis agitur, exiſtat Solidum, ſi tamen inſtituatur de differentiis infinitè parvis ad Planum reduci poteſt. Verùm huic ſolvendo nolo obnixè incumbere, ſed breviter tantùm oſtendam, quo pacto calculus in hoc & ejuſmodi aliis ſit ineundus, ut ad æquationem perveniatur, ex quâ maximus angulorum infinitè parvorum poſſit elici. Et inſuper ex eodem fundamento determinabo proportiones differentiarum refractionis reſpectu diverſorum Mediorum, quas in præcedentibus quatuor Propoſitionibus generaliter tantùm deſcripſi.

59. Primo itaque inveſtiganda eſt Regula vel æquatio, quâ, ex uno utcunque refracto radio dato, refractus alter, cum eo conſtituens angulum infinitè parvum, cognoſci poterit.

Radiis è Medio datâ denſitate in Medium cujuſlibet denſitatis ſecundum obliquiſſimam lineam IX, ut priùs, incidentibus, ſint XR, & Xr Refracti duo; quorum alter XR ſit altero Xr paulo magis refrangibilis, differentiâ tamen infinitè parvâ; & agatur lineola quævis Rr, his in R & r occurrens



currens & refringenti ſuperficiei parallela. Ad quam ſuperficiem normales etiam RD, *rd* demittantur; quas datam finitamque diſtantiam ab X, ab invicem verò infinitè parvam habere fingito. Sed lineolam R*r*, cum radiis per R & *r* tranſeuntibus, plus aut minus ab XD vergere (quemadmodum in præcedentibus) concipito, pro variâ poſterioris Medii aſſumendâ denſitate. Jam ſi recta DR ſecet radios X*r* in M, & IX in K, cùm infinitè parvum triangulum RM*r* ſit ſimile triangulo DMX, à quo triangulum KRX non niſi infinitè parvis differentiis, RXM & DXK, diſcrepat, quæ diſſimilitudinem non inferunt; triangula etiam RM*r* & KRX pro ſimilibus haberi debent. Et proinde demiſſis perpendicularibus KL & RN, erit KX. LR : : R*r*. MN. Adeoque, cùm ſit $LR = \frac{XRq - XKq}{XR}$ (nam eſt XR. KR $(=\sqrt{XRq - XKq})$: : KR. RL) erit etiam $MN = \frac{XRq - XKq}{XR \times XK}$ in R*r*, quæ differentia eſt inter XN, ſive XR & XM. Et inde erit $XM = XR - \frac{XRq - XKq}{XR \times XK}$ in R*r*. Inventa eſt itaque relatio inter XK, XM & XR, cùm angulus IXA ſit infinitè parvus. Quinetiam, utcunque IX obliqua ponatur, illæ XK, XM & XR eandem relationem obſervabunt, ſiquidem reciprocè ſunt ut ſinus Incidentiæ & Refractionis; & proinde inventa eſt etiam inter eas relatio pro quâvis obliquitate incidentis IX. Atque ita cognitis, aut utcunque ad arbitrium aſſumptis, XK & XR, inde XM ſimul cognoſcitur. Quod primò determinandum propoſui.

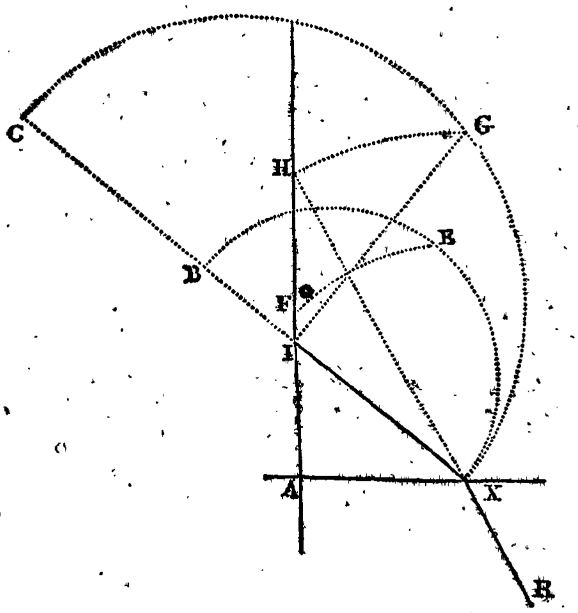
Quamobrem ſit IX linea datum quemvis angulum AXI cum refringente ſuperficie conſtituens; cæteriſque ſtantibus, erit $MN = \frac{XRq - XKq}{XR \times XK}$ in R*r*. Inſuper eſt RD $(=\sqrt{XRq - XDq})$. XD : : MN. NR, atque adeo eſt $NR = \frac{XRq - XKq \text{ in } Rr \times XD}{XR \times XK \times \sqrt{XRq - XDq}}$. Quòd ſi NR dividatur per XR, prodibit ſinus anguli RXN reſpectu circuli, cujus ſemidiameter ſit unitas. Quare, cùm angulus iſte & ſinus ejus ſunt maximi, ad maximum angulum determinandum quærenda erit maxima quantitas $\frac{NR}{XR}$, hoc eſt maximum $\frac{XRq - XKq \text{ in } Rr \times XD}{XRq \times XK\sqrt{XRq - XDq}}$. Sive (factâ per datum $\frac{Rr \times XD}{XK}$ diviſione) quærendum erit Maximum $\frac{XRq - XKq}{XRq \times \sqrt{XRq - XDq}}$: id quod per Methodos de Maximis & Minimis factis.

REFRACTIONIBUS.

De Planorum

tis notas fieri poteſt, & prodibit $XRqq = 3XKq \times XRq - 2XKq \times XDq$; cujus æquationis conſtructio eſt ejuſmodi (e).

A puncto quolibet incidentis radii IX demitte perpendiculum IA, & in eo ſume $AF = AX$; & XI producto ad B, ut ſit $IB = \frac{1}{2} IX$; ſuper BX deſcribe ſemicirculum BEX; cui inſcribe $XE = XF$: dein XB produc ad C, ut ſit $BC = BE$. Super CX deſcribe ſemicirculum CGX; quem in G ſecet perpendiculum IG ſuper diametro ejus ad I erectum. Denique centro X, & intervallo GX, deſcribatur arcus GH, ſecans AI productum in H. Ducatur HX, & producatur verſus R; eritque RX ipſius IX refractus, cùm tanta ſit poſterioris Medii denſitas, ut differentia refractionis RXM fiat omnium Maxima. Quo invento, denſitas poſterioris Medii, talem refractionem efficientis, facilè dabitur. Concipe ergo radios XR & Xr fig. p. 318. eſſe mediocriter refrangibiles, diverſo tamen gradu; & poſterius Medium, ſic inventum, non modo



inter

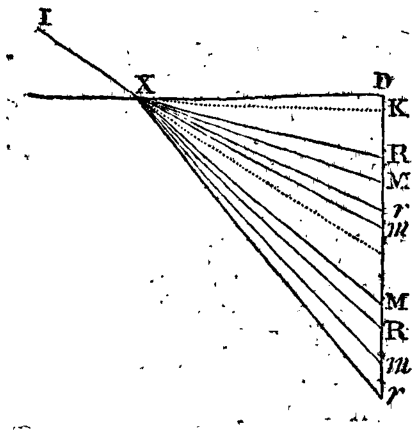
(e) RECTA XD (fig. p. 318.) pro arbitrio ſumenda ſignificetur literâ a. Datâ XD, propter angulum DXK datum, id enim ponitur, dabitur XK; quam litera b ſignificet. Sit z recta quædam, quæ eâ lege fluat, ut duarum, datæ XD & indefinitæ XR, ſit ſemper proportione tertia. Erit igitur $XR^2 = az$. Quare $\frac{XR^2 - XK^2}{XR^2 \times \sqrt{XR^2 - XD^2}} = \frac{az - b^2}{az\sqrt{az - a^2}}$. Cujus fluxio his notis ſignificanda erit, $\frac{\frac{3}{2}b^2 z\dot{z} - ab^2\dot{z} - \frac{1}{2}az^2\dot{z}}{z^2 \times \overline{az - a^2}|^{\frac{3}{2}}}$. Hâc autem fluxione nihilo æquatâ, erit etiam $\frac{3}{2}b^2 z - ab^2 - \frac{1}{2}az^2 = 0$. Quare $\frac{3b^2}{a}z - z^2 = 2b^2$ (ſive $z^2 = \frac{3b^2}{a}z - 2b^2$; quæ pro literis z, a, b, illis $\frac{XR^2}{XD}$, XD, XK reſtitutis, in ipſam æquationem Newtonianam migraverit.) Hujus autem æquationis conſtructio leviſſimo negotio abſolvenda eſt. In XD productâ capiatur XE, ad quam b, vel XK, rationem habeat quam XD ad 3XK. (Nimirum ut ſit $XE = \frac{3b^2}{a}$.) Ad rectam XE magnitudine & poſitione datam applicetur rectangulum, quod duplo quadrato ex XK æquale ſit, & quadrato deficiat. Sit EZ defectûs latitudo. Duarum XZ, XD capiatur XY proportione media. Centro X radio XY ſcribatur circulus; qui cum rectâ DK, à puncto D ad perpendiculum plani refringentis eductâ, in puncto R concurrat. Radius, qui ſecundum IX incidit, in XR refringetur, ſi talis ſit materiæ circum DXR denſitas, quæ angulum RXM maximum efficiat.

Ad hanc

ter iſtos, ſed & inter extremos ſeu maximè difformes radios, maximam circiter quam poteſt refractionis differentiam efficiet.

Refractionibus.

Sin autem hujuſmodi differentiarum proportiones ad variam raritatem vel denſitatem Mediorum deſiderentur, è jam oſtenſis facilè determinabuntur, dummodo ponantur infinitè parvæ. Sic raritate vel denſitate poſterioris Medii tantum variatâ, ut radii ſecundum IX incidentes nunc refringantur ad M & R, nunc ad m & r; ductâque quâlibet DK ipſi DX normali, quæ ſecet eos in K, M, R, m & r; erit angulus infinitè parvus MXR ad conſimilem angulum mxr, ſicut $\frac{XRq-XKq}{XRq \times RD}$, ad $\frac{Xrq-XKq}{Xrq \times rD}$. Quòd ſi raritas vel denſitas prioris Medii varietur, non mutato poſteriori Medio, Analyſta facilè deprehendet, quòd (in fig. p. 318) ſit $MN=\frac{XRq-XKq}{XKq}$ in Rr, & proinde quod ſit ang. MXR. ang. mxr : : $\frac{XRq-XKq}{XR \times RD}$. $\frac{Xrq-XKq}{Xr \times rD}$; non enim perinde eſt, ſive raritas ſive denſitas anterioris Medii, ſive poſterioris Medii varietur, ut è præoſtenſis pateat.



60. Propoſitiones præcedentes ad luminis è longinquo manantis diffuſionem ſpectant. In duabus ſequentibus agitur de refractione luminis è propinquo manantis.

Ad hanc conſtructionem duo ſunt neceſſaria; primum ne duplum quadratum ex XK quadrato ex dimidiâ XE majus ſit; tum etiam ut XY major ſit quàm XD. Quorum utrumque ſemper fieri, ex eo quòd XK major ſit quàm XD, facilè oſtendetur. Cùm enim XK, ſive b, majus ſit quàm XD vel a, omnino $8a^2$ minus erit quàm $9b^2$. Quare et $2a^2$ minus quàm $\frac{9}{4}b^2$. Quare et $2a^2b^2$ minus quàm $\frac{9b^4}{4}$. Et $2b^2$ minus quàm $\frac{9b^4}{4a^2}$. Sed $\frac{9b^4}{4a^2}$ quadratum eſt ex dimidia XE. Quare $2b^2$, ſive duplum quadratum ex XK quadrato ex dimidiâ XE minus erit. Rurſus cùm XE × XD ex conſtructione ſit triplum quadrati ex XK; cùm etiam, propter angulum ad D rectum, quadratum ex XD minus ſit quàm quadratum ex XK, erit XE × XD majus quàm triplum quadratum ex XD. Quare et recta XE major erit quàm ut tripla ſit XD. Omnino igitur XD minor erit quàm dimidia XE. Segmentorum autem XZ, XE cùm majus ſit XZ, certè recta XZ dimidiâ XE major erit. Multo igitur major quàm XD. Rectangulum igitur XZ × XD, ſive quadratum ex XY, majus erit quadrato ex XD. Quare et recta XY rectâ XD major. Q. E. D.

Quòd ſi ſegmentorum XZ, EZ utrumque rectâ CD majus ſit, gemina erit Problematis conſtructio, nempe cùm utrumvis ſegmentum pro Z uſurpare liceat. Unde gemina erit rectæ XR poſitio. Id eſt, duæ erunt denſitates materiæ infra ſuperficiem AD, quæ, radium incidentem IX diverſè refringendo heterogeneos tamen radios ita utræque refringant ut angulum RXM maximum efficiant.

De Planorum

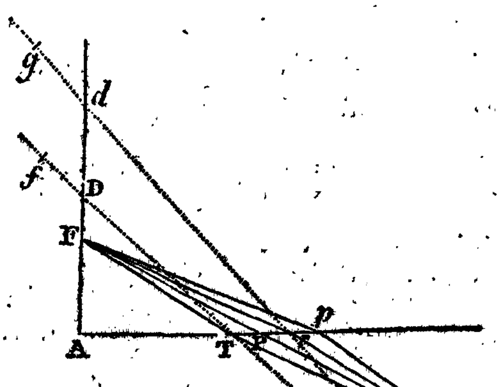
PROP. XVIII.

Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum per ſuperficiem poſitione datam refractis, quo Medium denſius ſit magis denſum, eo major erit eorum ad invicem inclinatio ex parte medii utriuſque ad certum uſque terminum, & poſt erit eo minor.

Scilicet, cùm denſitas ejus haud minor ſit quàm denſitas alterius Medii, ut refractio fiat infinitè parva, tum differentia refractionis erit etiam infinitè parva, & proinde augebitur ex auctâ denſitate. Quòd ſi denſitas ejus in infinitum augeatur, tum omnium radiorum in illud incidentium refracti perpendiculariter emergunt (§ 44); & è contra, ſoli perpendiculares poſſunt ingredi medium rarius è denſiori (§ 47); unde omnes radii à puncto ad punctum refracti tunc pergent in iiſdem lineis, ſive coincident, & ſic differentia refractionis rurſus in nihilum evaneſcet.

PROP. XIX.

Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum, per ſuperficiem poſitione datam, refractis, quo Medium rarius ſit magis rarum, eo major eorum erit ad invicem inclinatio ex parte Medii utriuſque.



Sit AT ſuperficies ita refringens difformes radios FTX, FPX, ut manantes ab eodem puncto F in idem rurſus conveniant ad X. Dico, ſi Medium prius eſſet rarius, ut præfati radii adhuc magis refringerentur, puta FTX ſecundum F*t*X, & FPX ſecundum F*p*X, quòd angulus *p*X*t* foret major angulo PXT, ut & angulus *p*F*t* major angulo PFT.

Ad abbreviandum prioris caſûs demonſtrationem, ponamus radios eſſe quàm minimè difformes; ut, propter infinitè parvam differentiam refractionis, angulos PXT & *p*X*t* conſtituant infinitè

 parvos.

parvos. (Conſule Caſ. 2. Schol. ad Prop. XVII.) Tum ducatur TK refractus radii conformis ipſi FPX, ut infinitè parvus angulus KTX ſit differentia refractionis radiorum ſecundum eandem FT incidentium; & pari modo ducatur *tk*, Refractus radii conformis ipſi F*p*X, ut angulus infinitè parvus *kt*X exiſtat differentia refractionis radiorum ſecundum eandem F*t* incidentium. Liquet ergo, quòd, cùm radius F*t* ſit obliquior quàm FT, atque etiam in Medium denſius incidat, erit *kt*X major angulo KTX. Adhæc producantur KT & *kt*, donec in punctis D ac *d* ſecent lineam FA, quæ ſit plano AT perpendicularis; & ultra producantur ad *f* & *g*, ita ut ſit $\frac{FAq}{FT}$. $\frac{DAq}{DT}$: : TF. T*f*; & $\frac{FAq}{Ft}$. $\frac{dAq}{dt}$: : *t*F. *tg*; & erunt puncta ſit inventa, *f* & *g*, foci radiorum FTX & F*t*X per Prop. VIII. Caſ. 2. Et inde X*f*. T*f* : : ang. KTX. ang. PXT; ut & X*g*. *tg* : : ang. *kt*X. ang. *p*X*t* (Caſ. 3. Schol. Prop. XII.) Iſtæ quidem proportionalitates non ſunt omninò veræ, ubi anguli præfati, per differentiam refractionis effecti, ponuntur eſſe definitæ alicujus magnitudinis; ſed ad veritatem eo magis accedunt, quò anguli iſti ſtatuuntur minores; adeo ut in angulis infinitè parvis pro accuratè veris haberi debeant. Jam, cùm ex hypotheſi ſit A*t* > AT, erit etiam X*t* < XT, ut & *tg* > T*f*, quemadmodum patet ex determinatione punctorum *g* & *f* ſuprà poſitâ. Quamobrem eſt *tg*. T*f* > *t*X. TX, vel permutando *tg*. *t*X > T*f*. TX; & componendo, *tg*. X*g* > T*f*. X*f*; hoc eſt, ſubſtituendo rationes hiſce æquales, ang. *p*X*t*. ang. *kt*X > ang. PXT. ang. KTX; & permutando, *p*X*t*. PXT > *kt*X. KTX: verùm eſt ang. *kt*X > ang. KTX, ut dictum fuit; & ideo multo magis eſt ang. *p*X*t* > ang. PXT. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

Et hinc verò de poſteriori caſu, quòd ſemper ſit *p*F*t* > angulo PFT, fiat conjectura; ſiquidem demonſtrationem longè difficiliorem poſtularet, & his tamen multa impendiſſe verba jamdudum pertæſum eſt. Hæc itaque de refractionibus ſolitariæ ſuperficiei ſufficiant.

De radiorum bis refractorum affectionibus.

61. Quòd ſi gemina ſit refractio, proinde ut in Priſmatibus contingit, quorum phænomena præſertim explicare ſtatui, radiorum ſic refractorum paſſiones è præcedentibus ita manifeſtæ ſunt,

 ut

De Planorum

ut circa illas parùm negotii intereſſe videatur. De parallelis quidem ſuperficiebus nihil aliud occurrit obſervandum, quàm quòd poſterior tantum recurvat radios, quantum prior incurvat. De inclinatis verò ſequentia notentur.

PROP. XX.

Homogenei radii ad Priſma divergentes, poſt utramque refractionem divergere pergent.

Patet per Prop. VII.

Atque idem de parallelis vel Convergentibus radiis intellige, quòd nempe poſt utramque refractionem manebunt Paralleli vel Convergentes.

Scholium.

Quòd ſi punctum, à quo quilibet infinitè propinqui, poſt utramque refractionem, divergunt, ſive locus Imaginis trans Priſma conſpicuæ, deſideretur, inventio ejus à Schol. ad præfatam Prop. VIII. manifeſta eſt. Sed ut promptius fiat conjectura, juvabit adhibere Theorema hocce mechanicum. *Quòd Imago ad eandem illam circiter diſtantiam poſt Priſma apparebit, quam habet Objectum, cujus eſt Imago, dummodo refractiones hinc & inde non ſint admodum inæquales.*

PROP. XXI.

Ex heterogeneis radiis ad Priſma divergentibus, aliqui poſt utramque refractionem convergent.

Id quod conſtat ex Prop. X & XII. Scilicet ex illis, qui in plano ad utraque refringentia plana perpendiculari jacent, magis refrangibiles ex incidentiâ paulo obliquiori convenient cum minus refrangibilibus; atque idem in innumeris ferè aliis planis ſuperficiebus continget.

REFRAC-TIONIBUS.

PROP. XXII.

E radiis itaque ſic à puncto ad punctum, ſive ab Objecto ad oculum refractis, alii ad verticem priſmatis gradatim aliis propiores tranſibunt, pro eo ut ſint magis ac magis refrangibiles.

Per Prop. x. unde colorum ordines definiuntur, de quibus poſthac.

PROP. XXIII.

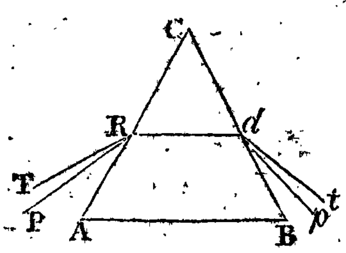
Quo major eſt angulus verticalis priſmatis, cæteris paribus, differentia refractionis fiet eo major, & inde colorum apparentia diſtinctior.

Et hoc manifeſtum eſt è Prop. II.

PROP. XXIV.

Quo denſior eſt Priſmatis materia, vel quo rarius eſt Medium circumfluum, cæteris paribus, eo major erit refractionis differentia, & inde Colorum apparentia manifeſtior.

Scilicet poſterior caſus è Prop. XIV & XVI. patet. Priorem verò, ne per Prop. XVII. in dubium revocetur, ſic oſtendo.



Concipe magis refrangibilem radium, PR, & minimè refrangibilem, TR, ſic in Priſma ad idem quodvis punctum R incidere, ut refracti pergant in eâdem lineâ R*d*, ac denuò in *d* refracti divergant verſus *p* ac *t*. Quo poſito conſtat per Prop. XV. quòd angulus *pdt* ex auctâ Priſmatis denſitate augebitur; deque angulo PRT par eſt ratiocinatio, ſi modò radii conſimiles ſecundum eaſdem lineas retrocedere concipiantur. Patet itaque aſſertio de radiis in Priſmate coincidentibus, & inde etiam de Parallelis.

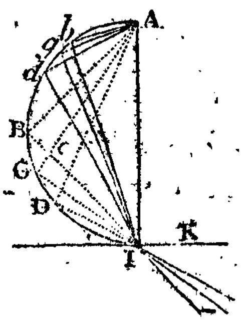
LEMMA

De Planorum

LEMMA VII.

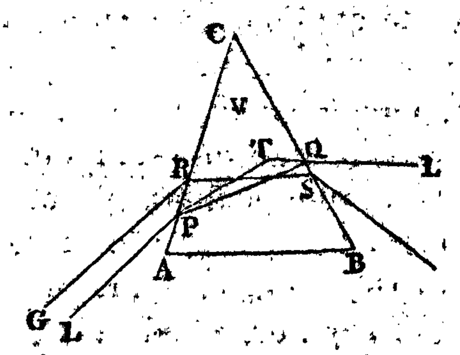
Radiis tribus homogeneis, bI, gI dI, è Medio denſiori in rarius per ſuperficiem IK *refractis, ſit differentiæ incidentiarum, bIg, gId, ſint æquales, ſumma refractorum angulorum extremis radiis effectorum erit duplo major anguli refracti, per intermedium radium effecti; hoc eſt refractis radiis retroactis ad* B, G *ac* D: *dico, quòd ſit angulus* $BIb + DId > 2$ *ang.* gIG.

Etenim deſcripto quovis circulo ADG, tangente refringentem ſuperficiem in I, cujus diameter ſit AI, quique dictos radios ſecet in *b*, *g*, *d*, B, G, D: quandoquidem anguli *bIg* & *gId* ſint æquales, erunt etiam arcus *bg* & *gd* æquales. Sed ductis A*g*, A*b*, &c. erunt A*b*, A*g*, A*d* ſinus incidentiarum, adeoque inter ſe ut ſunt AB, AG, AD ſinus refractionum. Quare (per Lem. VI.) eſt arcus DG major arcu GB, & inde $2gG < 2gG + GD - GB = gD + gB = gD - gd + gb + gB = Dd + Bb$: hoc eſt, $2gG < Dd + Bb$, ſive angulus BIb + ang. $dID > 2$ ang. gIG. Q. E. D.



PROP. XXV.

Homogeneis radiis à Priſmate refractis, angulus, quem incidentes & emergentes comprehendunt, tunc maximus evadit, cùm æqualis eſt hinc & inde refractio.



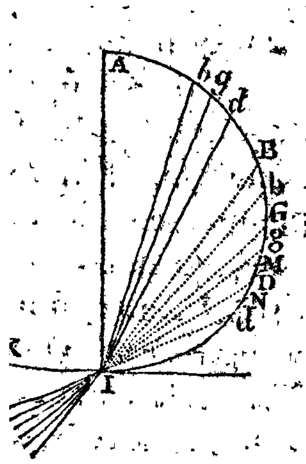
Sit ABC Priſma; GRSN radius utrinque æqualiter refractus ad R & S; et LPQL alius radius refractus inæqualiter, magis quidem ad P, minus ad Q, & producantur hi radii donec ſibi occurrant, LP & QL in T, GR verò & NS in V. Dico angulum RVS eſſe majorem angulo PTQ. Quod ut pateat, concipe radios in lineis PQ & RS hinc inde pergentes utrinque egredi Priſmate, & ſic è Medio denſiori in rarius refringi. Nam in triangulis CPQ, CRS, cùm angulus C communis ſit, cæ-

terorum

terorum angulorum ſummæ erunt æquales; & proinde, cùm CRS ſit iſoſceles, duplum anguli CSR æquabitur angulis CPQ + CQP. Quamobrem radii QP incidentia ad P tanto major eſt incidentiâ radii RS ad S, quanto eadem incidentia ſit major incidentiâ PQ ad Q. Trium itaque incidentiarum differentiæ ſunt æquales; adeoque, juxta Lemma præmonſtratum, ſumma refractorum angulorum, per incidentiam maximam & minimam effectorum, major erit duplo anguli refracti per incidentiam mediocrem effecti. Hoc eſt, ang. QPT + ang. PQT > 2 ang. RSV, ſive > ang. RSV + ang. VRS. Itaque, cùm in triangulis PTQ & RVS ſumma angulorum ad baſin PQ, ſit major ſummâ eorum ad baſin RS; erit angulus verticalis RVS major angulo verticali PTQ. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

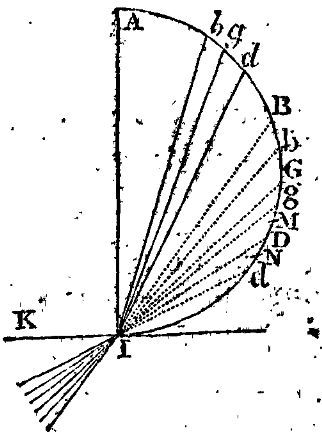
LEMMA VIII.

Si ſecundum tres lineas, bI, gI, dI, æquales angulos bIg, gId continentes, tres radii minimè refrangibiles incidant ad I *in ſuperficiem* IK, *& è Medio denſiori in rarius refringantur, quorum refracti retrorſum producti ſint* IB, IG, ID; *& præterea, ſi trium maximè refrangibilium radiorum, ſecundum eaſdem lineas bI, gI, dI incidentium, refracti retrorſum producti ſint* Ib, Ig, Id, *differentia refractionis radiorum, quorum incidentia eſt minima, unà cum differentiâ refractionis eorum, quorum incidentia eſt maxima, major erit quàm dupla differentia refractionis eorum, quorum incidentia eſt medioeris. Hoc eſt, ang.* BIb + *ang.* DId > 2 *ang.* GIg.



Etenim deſcripto quovis circulo ADI tangente refringentem ſuperficiem in I, cujus diameter ſit AI, quique præfatos radios in punctis b, g, d, B, b, G, g, D, d ſecet: concipe, ſubtenſas ab A ad quodlibet iſtorum punctorum duci; & erunt Ab, Ag, Ad inter ſe, ut ſunt AB, AG, AD; atque etiam, ut ſunt Ab, Ag, Ad. Unde ſequitur, quòd AB, AG, AD inter ſe ſunt ut Ab, Ag, Ad. Et præterea per Lem. VI. quòd ſit arcus GD > arcu BG, & arcus gd > arcu bg. Jam fiat arcus GM = BG,

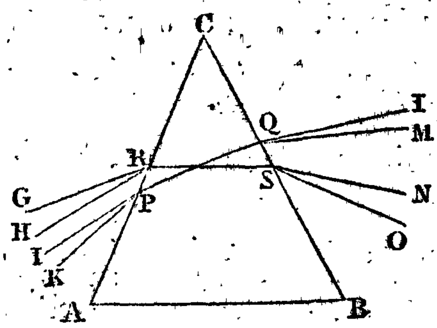
E PLANORUM



GM=BG; eritque GD>GM & AD>AM. Item in peripheriâ AD ſume punctum quoddam N, ſub hâc conditione, ut, ſi concipias AM, AN ſubtenſas duci, ſit AB. Ab : : AM. AN, & erunt AB, AG, AM inter ſe, ut ſunt Ab, Ag, AN; adeoque, cùm arcus BG ac GM ſint æquales, erit ſumma arcuum Bb + MN (per Lem. VII.) major duplo arcu Gg. Sed, cùm ſit AM. AN : : (AB. Ab : :) AD. Ad; vel converſè AM. AD : : MN. Dd, propter AD>AM erit arcus Dd> arcu MN; & utrobique addito arcu Bb, erit arc. Bb + arc. Dd> arc. Bb + arc. MN; & multo magis erit arc. Bb + arc. Dd> duplo arcu Gg, ſive ang. BIb + ang. DId> 2 ang. GIg. Q. E. D.

PROP. XXVI.

Heterogeneis radiis à Priſmate refractis, differentia angulorum, quos incidentes cum emergentibus conſtituunt, tunc minima evadit, cùm æquales ſunt utrobique refractiones.



In Priſmate ABC ſumatur CR æqualis CS, & RS ducatur, ut & alia quævis linea PQ, quæ non ſit parallela ad RS; & concipe radios in Priſmate ſecundum has lineas PQ & RS hinc inde pergentes, ad puncta P, Q, R & S egredi; & maximè refrangibiles verſus K, M, H & O refringi, ac minimè refrangibiles verſus I, L, G & N. Dico, quòd refractionum, inæqualiter ad P & Q factarum, differentiæ ſimul ſumptæ IPK + LQM ſint majores quàm HRG + NSO, differentiæ refractionum æqualiter ad R & S factarum ſimul ſumptæ. Nam incidentiarum ad P, Q & S differentiæ ſunt æquales, ut oſtenſum erat in Prop. præcedenti, atque adeo per Lem. VIII. differentia refractionis radiorum difformium ad P, ubi maxima eſt incidentia, unà cum differentiâ conſimili ad Q, ubi minima eſt incidentia, excedit duplum conſimilis differentiæ ad S, ubi incidentia eſt mediocris.

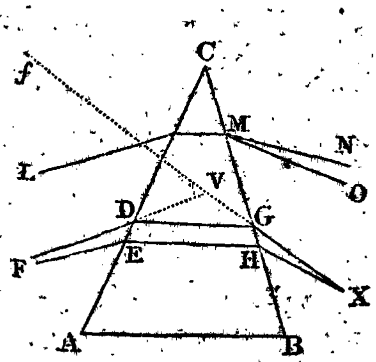
Hoc

Hoc eſt, ang. IPK + ang. LQM > 2 ang. NSO. Sive, cùm GRH & NSO æquentur, ang. IPK + ang. LQM > ang. NSO + ang. GRH. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

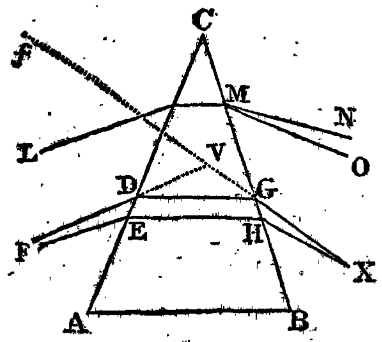
Schol. Poſui quidem radios è Priſmate utrobique egredi; ſin pergant ab I & K per P & Q ad L & M, & à G & H per R & S verſus N & O, linearum poſitiones & quantitates angulorum non inde mutabuntur; & proinde demonſtratio præfata tunc etiam valebit; & propter eandem rationem valebit etiam, cùm radii ad Priſma divergentes, evadunt in Priſmate paralleli. Quod idem de Propoſitionum XXIV & XXV. demonſtrationibus itidem intellige. Quinetiam in aliis quibuſcunque caſibus, ubi divergunt ante refractionem & poſt convergunt, vel in Priſma incidunt paralleli, non adeo multum à paralleliſmo intra Priſma recedunt unquam, quin ut anguli, vel differentiæ angulorum, quos incidentes cum emergentibus conſtituunt, pro iiſdem circiter haberi poſſint, ac ſi intus eſſent paralleli; adeoque dictas Propoſitiones ad omnes omnino caſus extendi.

PROP. XXVII.

Si denique radiis, à dato puncto F *ad datum punctum* X, *per Priſma* ABC *poſitione datum, refractis, deſiderentur anguli* DFE, GXH, *quos heterogenii comprehendunt*;



Problema ex eorum numero eſt, quæ Veteres linearia dixêre; at ſequens Mechanica ſolutio, quantum exigunt res Practicæ, veritati appropinquat. Finge ſummam angulorum DFE + GXH æqualem eſſe angulo NMO, quem radii duo alteri FD & FE, quod ad refrangibilitatem conſimiles, ac juxta quamvis lineam LM, rectæ angulum DFE biſecanti quàm proximè parallelam, incidentes poſt binam refractionem conſtituunt. Et è radiis ad X refractis, aliquem GX cum incidente radio FD convenientem in V, produc ad f, ut ſit f locus Imaginis, quam Objectum F oculo in X conſtituto exhibet. Dein ang. OMN ac diſtantiis fX & fV mechanicè cognitis, dic eſſe fX. fV :: ang. NMO. ang. GXH; & erit GXH, quem



quæris proximè; quemadmodum ex oſtenſis ad Schol. Prop. XII. quodammodo manifeſtum eſt. Cùm refractiones utrobique non ſunt admodum inæquales, res expeditiùs abſolvitur per Schol. ad Prop. I. fingendo eſſe VX. FV : : ang. DFE. ang. GXH, vel compoſitè FV + VX. FV : : ang. NMO. ang. GXH.

SECTIO QUARTA.

62. *De Refractionibus curvarum ſuperficierum.*

DE CURVARUM

HÆC de refractionibus Planorum. De Curvis & præſertim Sphæricis ſuperficiebus jam agendum eſt: quarum doctrinam reſpectu homogeneorum radiorum ſequentibus Propoſitionibus complecti conabimur.

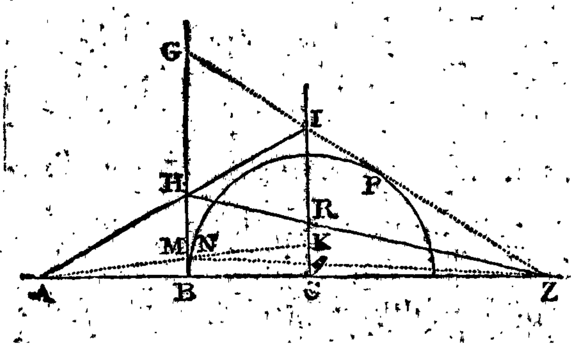
PROP. XXVIII.

Radii in Curvam ſuperficiem incidentis Refractum ducere.

Nempe eadem eſt refractio radii à Curvâ ac eſt à Plano contingente Curvam in puncto refractionis. Quære ergo refractum à contingente plano per Prop. III.

PROP. XXIX.

Si radii ſeu paralleli, ſeu ad punctum aliquod contermini, ſe ſphæræ objiciant refringendos, refractorum axi quam proximorum concurſum ſive focum determinare.



Sit A punctum radios ejaculans verſus ſphericam ſuperficiem, BNP, centro C deſcriptam. E vertice & centro erige ad axem AC perpendiculares BH & CI; ipſiſque occurrentem, in H & I age, quamlibet

libet AI per punctum A. Tum à puncto C verſus I cape CR, quæ fit ad CI ut ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ; & age rectam HR occurrentem AC in Z: & erit Z concurſus refractorum, quem oportuit determinare. Sit enim AN radius axi viciniſſimus incidens ad N, & occurrens CI in K. Age NZ occurrentem CI in g; & ut mos eſt, concipe infinitè parvum arcum BN æqualem eſſe BM ſegmento rectæ BH ad radium AK terminato; & erit CI : BH = CK : BN; ac BH. CR : : BN. Cg. Et ex æquo CI : CR : : CK : Cg; hoc eſt, CK. Cg ut eſt ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis. Et proinde, cùm anguli CAK & CZg ex hypotheſi ſint infinitè parvi, adeoque CK ad AN, & Cg ad NZ perpendiculares, vel ſaltem æquipollentes perpendiculis, erit NZ refractus ipſius AN. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

Cor. 1. Poſito I ad R ut eſt ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, erit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ. Eſt enim $\frac{I}{R}$ AB. AB : : (I. R : :) CI. CR, & AB. AC : : BH. CI. Et ex æquo perturbate $\frac{I}{R}$ AB. AC : : (BH. CR : :) BZ. CZ.

Cor. 2. Si quando punctum A infinitè diſtet, ſeu parallelos radios ejaculetur, tum propter æquales BH & CI, erit I. R : : BZ. CZ. Atque ita, ſi refracti radii paralleli ſunt, tum propter æquales BH & CR, erit I. R : : AC. AB.

Cor. 3. Si è quatuor punctis A, B, C & Z tria quævis dentur, poteſt quartum inveniri, ut è ſequentibus exemplis patebit.

Exem. 1. Dentur A, B, C, & quæratur Z. Scilicet eſt $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ; adeoque diviſim, $\frac{I}{R}$ AB − AC. AC : : BC. CZ.

Exem. 2. Si datis A, B & Z quæratur C; cùm ſit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ, viciſſim erit $\frac{I}{R}$ AB. BZ : : AC. CZ, & compoſitè $\frac{I}{R}$ AB + BZ. BZ : : AZ. CZ.

Exem. 3. Si datis A, C & Z quæratur B; cùm ſit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ, ſive AB. $\frac{R}{I}$ AC : : BZ. CZ, viciſſim erit $\frac{R}{I}$ AC. CZ : : AB. BZ, & compoſitè $\frac{R}{I}$ AC + CZ. CZ : : AZ. BZ.

Poſſunt eadem determinari per ductum linearum; veluti ſi datis A, B & Z quæratur C. Erige ad AZ normalem BH cujuſvis longitudinis, & in eâ cape BG, quæ ſit ad BH, ut I ad R; junge

DE CURVARUM

AH & GZ occurrentes in I; & IC normaliter demiſſa ad AZ incidet ad punctum quæſitum C.

63. NOTA I. Quòd Z ſit locus imaginis Objecti A per refractionem exhibitæ, cùm ſpectatoris oculus in axe ultra Z conſtituitur.

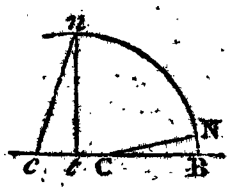
II. Si quando refracti radii divergant, vel incidentes convergant, vel ſint paralleli, ſimilis erit Problematis conſtructio, mutatis tantùm ſuo modo mutandis.

III. Si è puncto A emiſſi radii per plures ſphæricas ſuperficies, eundem axem AC retinentes, ſucceſſivè tranſmittantur, ad concurſum poſt omnes refractiones determinandum, quære primò concurſum radiorum poſt primam refractionem; deinde concurſum eorundem poſt ſecundam refractionem, juxta ac ſi primariò emiſſi fuiſſent è puncto præcedentis concurſûs, & ſic deinceps donec ad ultimum concurſum deventum ſit. Atque hoc pacto locus Imaginis Objecti cujuſvis, per Teleſcopium vel Microſcopium, viſi determinari poteſt.

IV. Ope Corol. 3. lentes ex ſphæricis ſuperficiebus confici poſſunt, quæ Teleſcopiis modo quolibet deſignato conſtituendis inſervient. Patet enim ex illo Corollario, quod non tantùm refractiones datarum lentium inveſtigari poſſunt, ſed & lentes delineari, quæ datas refractiones peragent.

LEMMA IX.

Ad datam quamvis Curvam concurſum axis & viciniſſimi perpendiculi determinare.



Sit BNn Curva, & ad quodvis ejus punctum, n, indeterminatè ſpectatum, quære perpendiculum nc, per notas methodos ducendi perpendicula Curvarum, & ſimul invenies longitudinem Bc. Tum (demiſſo ad Bc normali nt) finge Bt vel nt infinitè parvam eſſe, ſeu nullam; & emergit longitudo BC, cujus terminus eſt ad concurſum axis cum viciniſſimo perpendiculo.

Exem. 1. Sit BNn Parabola, cujus latus rectum r, & Bt dic x; erit Bc=$x+\frac{1}{2}r$, ut notum eſt. Pone jam $x=0$, & reſtabit $\frac{1}{2}r$ pro longitudine BC ad verticem.

Exem. 2. Sit BNn Ellipſis, cujus latus rectum r, & tranſverſum

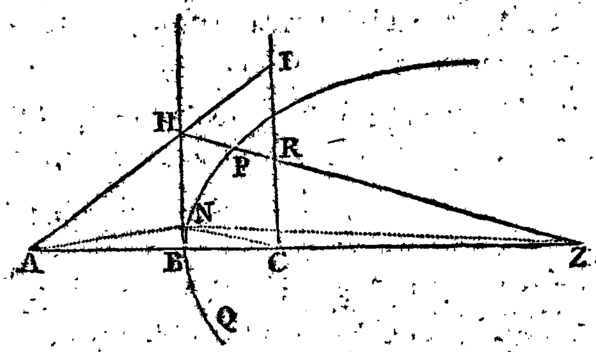
q;

q; eritque (ut notum eſt) $BC = x - \frac{rx}{q} + \frac{1}{2}r$. Jam pone $x = 0$, & reſtabit iterum $\frac{1}{2}r$ pro longitudine BC ad verticem. Nec ſecus in Curvis magis compoſitis procedendum eſt. REFRACTIONIBUS.

PROP. XXX.

Radiis in curvam quamvis ſuperficiem quàm proximè perpendiculariter incidentibus, Refractorum concurſum, ſeu Focum, determinare.

Eſto PBQ Curva quævis; A, commune punctum, ſeu concurſus incidentium radiorum; AB radius perpendicularis ſive axis, & AN radius quàm proximè perpendicularis, ſive axi proximus; ſitque NC ad Curvam perpendicularis, axique AC occurrens ad C.



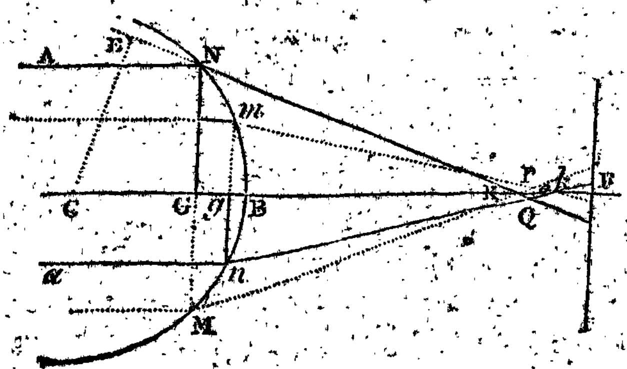
Et puncto C per Lem. IX. invento, erige ad B & C perpendicula BH & CI; quibus in H & I occurrentem age quamvis AI. Verſus I cape CR, quæ ſit ad CI ut ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ, & recta HR occurret ipſi AB in quæſito refractorum concurſu Z.

Probatur ad modum præcedentis Propoſitionis, & huic etiam conſimilia Corollaria & notæ competunt.

PROP. XXXI.

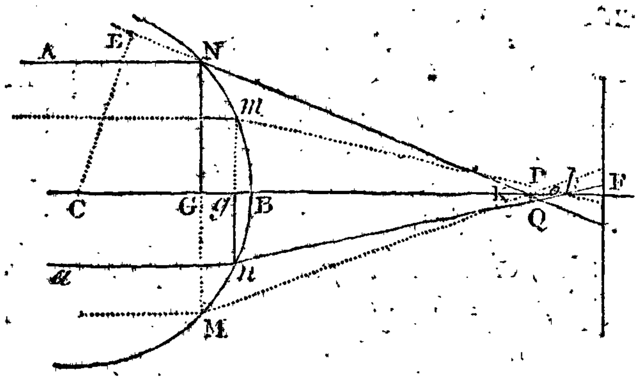
Parallelis radiis in Sphæram incidentibus, refractorum, ab axe remotorum, errorem à principali Foco determinare.

Sit NBM ſphæra; C, centrum ejus; CB, ſemidiameter incidentibus radiis parallela; AN, radius incidens; & NK, refractus ejus, occurrens axi ſeu ſemidiametro CB in K; & poſito F principali foco,



i. e.

De Curvarum



i. e. in quem radii prope axem jacentes congregantur, quærendus erit error FK. Demitte ergo perpendiculares CE in NK, & NG in CK; & dic $CB = a$, $GB = x$ & $CK = z$: atque ex naturâ circuli erit $NGq = 2ax - xx$; cui adde GKq, hoc eſt $zz + 2xz - 2az + xx - 2ax + aa$, & prodibit $NKq = zz + 2xz - 2az + aa$. Jam, cùm NG ſit ad CE ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſive ut I ad R, & propter ſimilitudinem triangulorum CEK & NGK, NK & CK ſint in eâdem ratione, erit $II.RR :: (NKq.CKq ::) zz + 2xz - 2az + aa.zz$; adeoque $IIzz = zz + 2xz - 2az + aa$ in RR; & factâ reductione, $zz = \frac{2RRaz - 2RRxz - RRaa}{RR - II}$, extractâque radice, $z = \frac{RRa - RRx + R\sqrt{IIaa - 2RRax + RRxx}}{RR - II}$; ac radicali in infinitam ſeriem redactâ, $z = \frac{Ra}{R - I} - \frac{RRx}{IR - II} - \frac{R^3x^2}{2I^3a} - \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c ([f]). Jam, cùm per Corol. 2. vel. 3. ad Prop. XXIX. ſit $\frac{Ra}{R - I} = CF$ (id quod etiam innoteſcit ex valore z jam invento, fingendo eſſe $x = 0$) ex hoc CF ſubduc inventum valorem z, & reſtabit $\frac{RRx}{IR - II} + \frac{R^3x^2}{2I^3a} + \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c. pro valore erroris KF, quem quærimus.

Corol. 1. Si BG ſive x ponatur valde exigua, erit $\frac{RRx}{IR - II}$ quàm proximè æqualis KF; tunc enim quantitates $\frac{R^3x^2}{2I^3a} + \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c. propter aſcendentes poteſtates ejuſdem x evadunt admodum exiguæ, & reſpectu

([f]) Nempe hoc modo.

Extrahendo radicem quadraticam, pro irrationali $\sqrt{IIaa - 2R^2ax + R^2x^2}$ veniet ſeries infinita $Ia - \frac{R^2x}{I} - \frac{R^4 - R^2II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^6 - R^4I^2}{2.I^5a^2}x^3$ &c. Quæ ſi cum R multiplicetur, pro eo omni quod numerator quantitatis fractæ, quæ ipſi z inventa eſt æqualis, irrationale habet; id eſt, pro $R\sqrt{IIaa - 2R^2ax + R^2x^2}$, veniet $RIa - \frac{R^3x}{I} - \frac{R^5 - R^3II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^7 - R^5I^2}{2.I^5a^2}x^3 -$; additiſque quæ rationalia habet numerator ille nomina, $RRa - RRx$, veniet pro numeratore toto $\overline{RR + RI}.a - \frac{R^3 + RRI}{I}x - \frac{R^5 - R^3II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^7 - R^5I^2}{2.I^5a^2}x^3 -$, ſive $Ra \times \overline{R + I} - \frac{R^2x}{I} \times \overline{R + I} - \frac{R^3x^2}{2.I^3a} \times \overline{R^2 - II} - \frac{R^5x^3}{2I^5a^2} \times \overline{R^2 - I^2} -$. Quibus omnibus à denominatore $RR - II$ diviſis, veniet pro z ſeries ipſa Newtoniana.

reſpectu termini $\frac{RRx}{IR-II}$ pro nullis haberi poſſint. REFRACTIONIBUS.

Corol. 2. Quinetiam, ſi ſtatuas NG $=y$, erit $\frac{RRyy}{2IRa-2IIa}=$ KF circiter. Etenim eſt $NGq = BG \times \overline{BC+CG}$, ſive $= BG \times 2BC$ proximè, hoc eſt, $yy=2ax$ ferè, vel $\frac{yy}{2a}=x$; & ſubſtituendo $\frac{yy}{2a}$ pro x in valore ipſius KF, emerget $\frac{RRyy}{2IRa-2IIa}=$ KF.

Corol. 3. Hinc Errores KF ſunt ut ſagittæ GB, vel ut quadrata ſemichordarum NG.

Corol. 4. Si radius ANK detur poſitione, & paralleli alicujus, axique proprioris & ad alteras axis partes incidentis, radii an refractus nk ducatur, ſecans axem in k, & hunc refractum NK in Q, & ad axem demittatur normalis Qo; linea Ko evadet omnium maxima, ubi radius an duplo minus diſtat ad axe circiter, quàm radius alter AN. Demiſſâ enim ad axem normali ng, ponatur $ng=v$, K$o=s$, GK$=f$, & KF$=b$; & per Corol. 3. hujus, erit $yy.vv$:: KF. kF. Adeoque kF$=\frac{bvv}{yy}$; qui à KF ſubducto reſtat $\frac{byy-bvv}{yy}=$ Kk.

Præterea eſt GK. GN :: Ko. Qo; adeoque Q$o=\frac{ys}{f}$: item gn. GK ($=gk$ proximè) :: Qo. ok, quare $ok=\frac{ys}{v}$. Huic adde Ko, & iterum prodit K$k=\frac{vs+ys}{v}$. Quamobrem eſt $\frac{vs+ys}{v}=\frac{byy-bvv}{yy}$; factâque diviſione per $v+y$, & reductâ æquatione, prodit $s=\frac{bvy-bvv}{yy}$.

Jam ut maximus s inveniatur, multiplica terminos juxta methodum Huddenii per dimenſiones quantitatis indeterminatæ v, & emerget $o=\frac{by-2bv}{yy}$, ſive $y=2v$, hoc eſt NG$=2ng$.

Corol. 5. Et hinc Ko, ubi maximum eſt, æquatur quartæ parti ipſius KF circiter; nam in valore ipſius s jam antè invento, ſi ſcribas $2v$ pro y, exoritur $\frac{1}{4}b=s$.

toniana.

Namque $\frac{Ra \times \overline{R+I}}{RR-II} = \frac{Ra \times \overline{R+I}}{\overline{R+I} \times \overline{R-I}} = \frac{Ra}{R-I}$.

Similiter $-\frac{R^2x}{I} \times \frac{R+I}{RR-II} = \frac{-R^2x \times \overline{R+I}}{I \times \overline{R+I} \times \overline{R-I}} = \frac{-R^2x}{RI-II}$.

Sed $-\frac{R^3x^2}{2.I^3a} \times \frac{R^2-II}{R^2-II} = -\frac{R^3x^2}{2.I^3a}$.

Et $-\frac{R^5v^3}{2.I^5a^2} \times \frac{R^2-II}{R^2-II} = -\frac{R^5x^3}{2.I^5a^2}$.

Corol.

De Curvarum

Corol. 6. Eſt etiam $oQ = \frac{Ry^3}{81aa}$ (g). Nam eſt GK (= BF proximè). GN :: KO. OQ, hoc eſt $\frac{Ra}{R-I} . y :: \frac{RRyy}{81Ra - 81Ia} (= \frac{1}{4}KF) . \frac{Ry^3}{81aa}$.

Corol. 7. Si arcus BM ſumatur æqualis BN, & $Bm = Bn$, ac radii ad puncta M & m refracti ducantur ſibi occurrentes in P; conſtat eſſe ſpatium $PQ = \frac{Ry^3}{41aa}$ (h), duplum nempe ipſius oQ; & præterea conſtat, refractos omnium radiorum, in ſphæricam ſuperficiem inter N & M cadentium, convergere in ſpatium hocce PQ; & idem PQ eſſe minimum circulare ſpatium in quod poſſent omnes congregari; adeoque Focum eſſe, ſeu locum Imaginis Objecti, parallelos radios in lentem, ad uſque limites M & N apertam, ejaculantis. Scilicet nulli radii poſſunt tranſilire hoc ſpatium; quia cùm oQ ſit in datâ ratione ad Ko, eritque oQ ſimul maximum, adeoque punctum Q omnium verſus F jacentium remotiſſimum ab axe, in quo radius quiſquam concurrit cum externo radio NK; neque poſſunt in minus ſpatium congregari, quia radii nk & mk ſecant externos radios in ipſiſſimis punctis P & Q, quibus ſpatium PQ terminatur.

Corol. 8. Si circuli NBM Apertura augeatur vel minuatur, Error lateralis PQ erit ut y^3, ſive ut cubus latitudinis aperturæ NM. Item ſi immutatâ aperturâ mutetur Circuli magnitudo, error PQ erit reciprocè ut aa ſive ut CBq, adeoque ut BFq, ſiquidem CB & BF ſint in datâ ratione: ſin verò & Circuli magnitudo & Apertura mutetur, erit error ille PQ ut $\frac{y^3}{aa}$ ſive ut $\frac{\text{NM cub.}}{\text{BF quad.}}$ quemadmodum ex $\frac{Ry^3}{41aa}$ (i) valore ipſius PQ conſtare poteſt.

Scholium.

Eodem ferè modo, quo radiorum parallelè incidentium errores KF

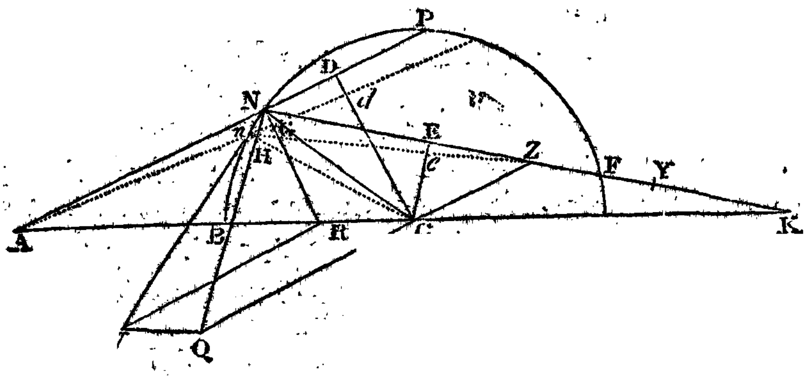
(g) Omnino legendum $\frac{RRy^3}{8.11.aa}$. Namque BF, et quæ hujus propemodum eſt æqualis GK, ad CF rationem habet quam I ad R. Id quod apud dioptricês peritos conſtat. Quare GK : CF = $\frac{Ia}{R-I} : \frac{Ra}{R-I}$. Et cùm CF illi $\frac{Ra}{R-I}$ æqualis ſit, omnino GK huic $\frac{Ia}{R-I}$ æqualis erit. Quare cùm GK ſit ad GN ut Ko ad oQ, erit $\frac{Ia}{R-I}$: GN ſive y, = Ko : oQ, ſicut rectè monuit qui primam hujus Libri editionem curavit. At verò recta Ko, quando eſt maxima, parti quartæ rectæ KF æqualis eſt; hoc eſt, cùm KF quantitati $\frac{RRyy}{2.IRa - 2.II.a}$ æqualis ſit, maxima Ko quantitati $\frac{RRyy}{8.IRa - 8.II.a}$ æqual

KF & PQ determinavimus, conſimiles divergentium vel convergentium errores, licet calculo difficiliori, determinari poſſunt. Refractionibus.

P R O P. XXXII.

Si Radii ſive paralleli, ſive verſus commune aliquod punctum inclinati, ſe Sphæræ objiciant refringendos; Refractorum extra axem ſibi quàm proximorum, & in eodem plano cum incidentibus jacentium, concurſum determinare.

Sit AN incidens radius; NK, refractus ejus; & NV, in plano trianguli ANK recta linea tangens Sphæram ad N. Ad AN duc NR



perpendicularem, & occurrentem axi AC in R; nec non RV parallelam, & occurrentem Tangenti NV in V. Item ad KN duc NQ perpendicularem, & VQ parallelam, convenientes in Q; & age QC occurrentem NK in Z; eritque Z concurſus radiorum ipſi AN viciniſſimorum. Sit enim A*n* alius ex incidentibus priori AN infinitè vicinus, & occurrens NR in G. Age *n*Z occurrentem NQ in H; & ad AN & NK è C, centro ſphæræ, demitte normales CD & CE, occurrentes A*n* & *n*Z in *d* & *e*. Jam, cùm AN ſuppona-

qualis erit. Quare maximâ exiſtente K*o* erit $\frac{Ia}{R-I} : y = \frac{4RRyy}{8.IRa - 8.II.a} : oQ$.

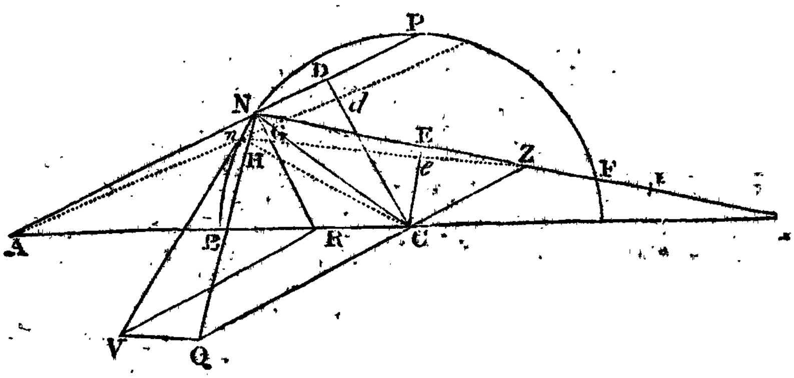
Quare $oQ = \frac{RRy^3}{8.Ia \times R-I} \times \frac{R-I}{Ia} = \frac{RRy^3}{8.II.aa}$. Hæc eſt longitudo rectæ Q*o*, quando K*o* maxima eſt.

(h) Legendum $\frac{RRy^3}{4.II.aa}$ ſicut rectè monuit quem ſuprà laudavimus, vid. Not. g. Quin et hanc emendationem commendare videtur Newtonus ipſe; qui in Libro Opticès primo, Prop. VII, §, formulam poſuit, quæ in hanc noſtram abierit, ſi pro literis illius S, D ponantur *y*, 2*a* hujus, quibus eadem planè ſignificantur.

(i) Vid. Not. h.

De Curvarum

tur infinitè vicinus A*n*, arcus infinitè parvus N*n* pro rectâ coincidente cum tangente NV haberi poteſt; ac triangula NG*n*, NRV, &



NH*n*, NQV pro ſimilibus. Quare eſt DC. D*d* :: (NR. NG :: NV. N*n* :: NQ. NH ::) EC. E*e*, unde diviſim & alternatim, DC. EC :: *d*C. *e*C. Eſt autem DC ad EC ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, propterea quòd NK ſit refractus ipſius AN, adeoque etiam *d*C eſt ad *e*C ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis. Et proinde, cùm anguli DA*d* & EZ*e* ſint infinitè parvi, atque adeo C*d* ad A*n* & C*e* ad *n*Z perpendiculares, vel ſaltem perpendiculis æquipollentes, erit *n*Z refractus ipſius A*n*. Q. E. D.

Corol. 1. Eſt ND. NE :: (ſive NP. NF ::) NR. NQ. Nam actâ NC, propter triangula NRV & NDC, NEC & NQV ſimilia; eſt ND. NR :: (NC. NV ::) NE. NQ; & alternè ND. NE :: NR. NQ.

Hinc promptior emergit Problematis reſolutio: nempe ad radios AN, NK erige normales NR, NQ, quorum NR axi AC occurrat, & NQ ſit ad NR ut NF ad NP. Dein age QC, quæ cum NK in quæſito puncto Z conveniet.

Corol. 2. Eſt etiam AN × DC × NE. AD × EC × ND :: NZ. EZ. Nam eſt AD. AN :: DC. NR; & inde $NR = \frac{AN \times DC}{AD}$. Item ND. NE :: NR. NQ; & inde $NQ = \frac{AN \times DC \times NE}{AD \times ND}$; adeoque AN × DC × NE. AD × EC × ND :: (NQ. EC ::) NZ. EZ.

Corol. 3. Si punctum radians A infinitè diſtet, ſive parallelos radios ejaculetur, poſito I. R :: ſinus incidentiæ, ſin. refract. erit I × NF. R × NP :: NZ. EZ. In hoc enim caſu AN & AD, cùm ſint infinitè longæ, pro æqualibus haberi debent. Atque adeo per

Corol.

Corol. 2. hujus, erit DC×NE. EC×ND : : NZ. EZ. Sed ex hypotheſi eſt DC. EC : : I. R; & proinde I×NE. R×ND : : (NZ. EZ : :) I×NF. R×NP. Cæterùm de his vide plura in Lectionibus D[ris]. Barrow. REFRACTIONIBUS.

64. Notetur autem I°. quòd mutatis mutandis reſolutio Problematis cuicunque caſui facilè accommodatur, ſive radii incidentes divergant à puncto aliquo, vel ad idem convergant, vel incidant paralleli.

II. Cùm è radiis huic ANK proximis, qui jacent in plano ANK, conveniant in *z*; qui verò in conicâ ſuperficie, per revolutionem trianguli ANK circa latus AK generatâ, jacent; conveniant in K; erit maxima radiorum ipſi ANK undique proximorum conſtipatio circa medium ſpatii KZ, puta ad Y; & proinde oculo in lineâ NK ultra K conſtituto, ſenſibilis imaginis Objecti A, per refractionem ſphæricæ ſuperficiei BN viſi, locus erit ad Y; vel ſaltem intra limites K & Z: nam locus ille non præciſè definitur.

III. Cùm Radii pluribus ſuperficiebus ſucceſſivè refringuntur, ut vicinorum poſt omnes refractiones concurſum determines, primò quære concurſum poſt primam refractionem; deinde concurſum eorundem poſt ſecundam, tanquam ſi primariò effluxiſſent è puncto præcedentis concurſûs; & ſic deinceps ut ad Prop. XXIX. dictum fuit.

PROP. XXXIII.

Radiis in quamcunque curvam ſuperficiem incidentibus, Refractorum ſibi quàm proximorum, & in eodem plano cum Incidentibus jacentium, concurſum deſignare.

Finge BNP jam non Sphæram, ſed aliam quamcunque Curvam referre, ſitque A commune punctum, ſeu concurſus, incidentium radiorum; AN, aliquis ex Incidentibus; NK, Refractus ejus; & NC, perpendicularis Curvæ ad punctum refringens. In hâc NC quære interſectionem proximi alicujus perpendicularis (qualis *nc*) ad aliud proximum punctum refringens inſiſtentis (k), (id quod alibi docebitur) ſitque iſta interſectio C. Jam ductâ AC, demitte ad radios AN, NK normales CD, CE; ac erige NR, NQ, quorum NR

(k) Vid. Geometr. Analyt. Prob.

 occurrat

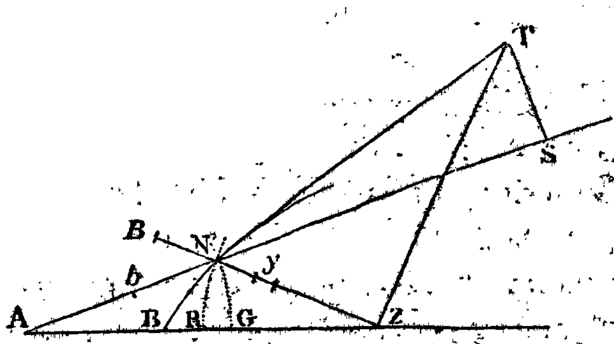
De Curvarum

occurrat AC in R, ſitque NQ ad NR ut NE ad ND; & acta QC conveniet cum Refracto NK in deſiderato proximorum Refractorum concurſu Z.

Probatur ad modum præcedentis Propoſitionis, & huic etiam conſimilia Corollaria & Notæ competunt.

PROP. XXXIV.

Figuram determinare, quæ radios homogeneos, ſive parallelos, ſive ad commune aliquod punctum terminatos, ita refringet, ut Refracti omnes ad aliud datum punctum accuratè conveniant.



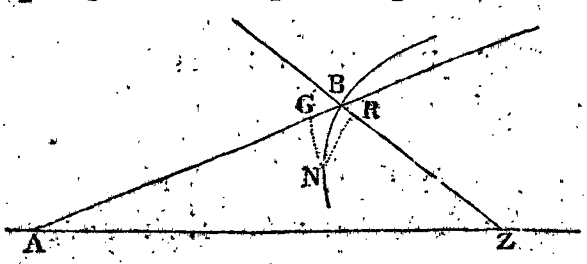
Sit A concurſus incidentium radiorum, & Z refractorum, ac punctum aliquod, B, in recta AZ, pro vertice Curvæ ad arbitrium ſumatur. Ab illo B capiantur in linea BZ, verſus Medium denſius, BG cujuſvis longitudinis, & BR ratione ad BG quam habet ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ. Centris A & Z, & intervallis AG & ZR, deſcribantur circuli ſe interſecantes in N; & ipſius N locus erit Curva, quæ deſideratam refractionem peraget.

Quod ut pateat, producatur AN ad S, ut ſit NS, NZ :: BG. BR; & ad NS & NZ erigantur perpendiculares, ST & ZT, occurrentes in T, & acta NT Curvam tanget in N, ut ex methodo ducendi tangentes alibi expoſitâ conſtabit ([1]). Jam cùm NS & NZ ſint ut BG & BR, hoc eſt, ut ſinus incidentiæ & refractionis; & reſpectu ſinûs totius, ſive ſemidiametri NT, ſit NS ſinus anguli NTS, qui æquatur angulo incidentiæ radii AN, & NZ ſinus anguli NTZ, qui æquatur angulo refractionis radii NZ: patet eſſe NZ refractum ipſius AN. Q. E. D.

65. NOTA

([1]) In AN, ZN ut opus ſit productis, capiantur A*b*, Z*B* rectis AB, ZB ſingulatim æquales. Erunt igitur *b*N, N*B* illis BG, BR ſingulatim æquales. Habebit igitur *b*N ad N*B* rationem eam quam BG ad BR; id eſt datam illam, quam ſinus incidentis radii ad ſinum emergentis. Quare et fluxionibus rectarum *b*N, N*B* eadem data ratio intercedet. (Geometr. Flux. Theor. IV.) Sed propter rectam A*b* magnitudine datam, fluxioni rectæ *b*N æqualis erit fluxio rectæ AN. (Geometr. Flux. Theor. V.) Similiter propter rectam Z*B* magnitudine datam, fluxioni rectæ *B*N fluxio rectæ ZN æqualis erit. Quaro

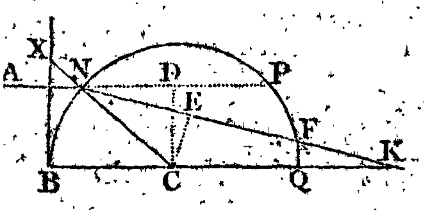
65. NOTA I. Poteſt etiam Curva huic uſui inſerviens deſcribi, quæ per datum quodvis punctum B, extra axem AZ poſitum, tranſibit; ſcilicet agantur AB & ZB, & in ipſis capiantur BG & BR in ratione ſinuum incidentiæ & Refractionis; et centris A, Z, ac intervallis AG & ZR, deſcribanturque circuli occurrentes in N; eritque N ad Curvam, quam oportet deſcribere. REFRACTIONIBUS.



II. Præterea Problematis reſolutio, mutatis mutandis, ſe ad omnes caſus extendit, ſive incidentes aut refracti radii convergant, divergant, vel exiſtant paralleli, ſive refractio fiat è rariori Medio in denſius, vel è denſiori in rarius. Et quidem, ſi radii ex neutrâ parte paralleli ſint, i. e. ſi punctorum A & Z neutrum ſit ad infinitam diſtantiam, Curva BN erit aliqua quatuor Ellipſium quas Carteſius in hunc uſum in Geometriâ deſcripſit. Sin alterutrum infinitè diſtet, ita ut radii punctum illud reſpicientes evadant paralleli, Curva erit conica ſectio, uti notum eſt: et in hoc caſu, circulus RN vel GN, propter infinitam centri diſtantiam, evadet recta linea, ipſi AZ ad R vel G perpendicularis.

LEMMA X.

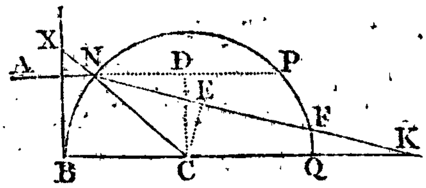
E parallelis radiis, ad Circulum refractis, radium illum determinare, cujus pars circulo incluſa datam habeat rationem ad partem refracti ejuſdem circulo incluſam.



Sit AN radius incidens; NK, refractus; NP & NF, partes eorum Circulo incluſæ; CD & CE, perpendicula ad iſtas partes è centro circuli demiſſa; & BC, ſemidiameter acta parallela ipſi AN;

Quare fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN rationem habebit, quam ſinus incidentis radii ad ſinum emergentis. Sed et recta NS ad rectam NZ rationem habet, quam ſinus incidentis radii ad ſinum emergentis. Habet igitur recta NS ad rectam NZ rationem eam quam fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN. Quamobrem ſi rectæ ZT, ST, à punctis Z, S ad perpendiculum cum rectis N, NS eductæ, in puncto T concurrant, juncta NT Curvam, ad quam eſt N, in N continget. Newton. Geometr. Analyt. Cap. VI. § 32.)

De Curvarum

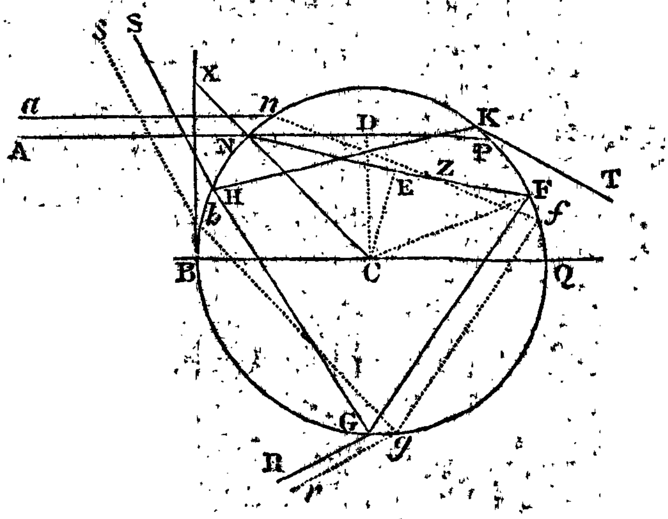


ſitque CD. CE :: I. R, & NP. NF :: p. q. His poſitis, ut innoteſcat punctum N, quod radios AN & NK determinat, erige ad BC normalem BX, cujus quadratum ſit ad BC quadratum, ut $\frac{qq-pp}{pp}$ ad $\frac{II-RR}{II}$, & acta CX ſecabit Circulum in deſiderato puncto N. Eſt enim ex hypotheſi p. q :: (NP. NF ::) ND. NE, & I. R :: CD. CE. Quare $\frac{q}{p}$ ND = NE; & $\frac{R}{I}$ CD = CE. Porro, cum ſit NDq + CDq (= NCq) = NEq + CEq, aufer hinc inde NDq + CEq, & reſtabit CDq − CEq = NEq − NDq; hoc eſt, ſubſtituendo valores ipſarum CE & NE modo inventos, CDq − $\frac{RR}{II}$ CDq = $\frac{qq}{pp}$ NDq − NDq, & facta reductione $\frac{II-RR}{II}$ CDq = $\frac{qq-pp}{pp}$ NDq; quo in proportionalitatem reſolutio, fit $\frac{qq-pp}{pp}$. $\frac{II-RR}{II}$ :: (CDq. NDq ::) BXq. BCq. Q. E. D.

PROP. XXXV.

Sole Sphæram pellucidam illuſtrante, radiorum ejus, poſt unam reflexionem emergentium Maximam ad axem inclinationem determinare.

Sit BNK Sphæra propoſita; BCQ, diameter ſive axis incidentibus radiis parallelus; AN, aliquis ex incidentibus; NF, refractus ejus;



FG, reflexus; & GR, denuo refractus: & quærendus erit Maximus angulorum, quos RG cum axe BQ poteſt conficere. In quem finem

nem advertendum eſt, quòd in eo ſolo caſu, ubi RG maximè inclinatur ad BQ, radii ipſi AN viciniſſimi poſſunt emergere paralleli ad RG. Nam in aliis caſibus ex emergentibus radiis ſibi viciniſſimis alii magis, alii minus continuò inclinantur ad BQ, adeoque aliquantulum inclinantur ad ſe invicem. Advertendum eſt præterea, quòd radii emergent paralleli, qui conveniunt ad punctum reflexionis. Duc enim radium *an* ipſi AN parallelum & quàm proximum, ſitque ejus refractus *nf*, reflexus *fg*, ac iterum refractus *gr*; & punctis F & *f* coincidentibus, cum anguli NF*n* & GF*g* ſint æquales, & refractiones ad N, *n* & G, *g* ſimiles; emergentes radii, GR & *gr*, æquè paralleli erunt ac incidentes AN & *an*. REFRACTIONIBUS.

Quærendus eſt itaque radius AN, cujus refractus cum refracto viciniſſimi radii *an* concurrit ad F. Et quidem per Corol. 3. Prop. XXXII. (demiſſis à centro Sphæræ ad radios normalibus CD & CE, poſitoque I. R : : CD. CE) ſi radii iſti ad quodvis punctum Z concurrant, erit I×NF. R×NP : : NZ. EZ : : NF. EF (puncto nempe Z ad ipſum F juxta hypotheſin cadente) : : 2. I. Quare I×NF=2R×NP, & I. 2R : : NP. NF. Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. X. dabitur punctum N. Scilicet ad verticem circuli ducatur tangens BX, cujus quadratum ſit ad quadratum ſemidiametri BC, ut 4RR−II ad II−RR, & agatur CX; hæc enim Circulo occurret in N, & ex invento N cætera nullo negotio determinantur.

Corol. I. Hinc fit 3RR. II−RR : : CN*q*. ND*q*. Cùm enim ſit 4RR−II. II−RR : : BX*q*. BC*q*; componendo erit 3RR. II−RR : : (BX*q*+BC*q*. =CX*q*. BC*q* : :) CN*q*. ND*q*.

Corol. 2. Eſt & I. 2R : : ND. NE. Nam ſuprà fuit I. 2R : : NP. NF, & ex his expeditior evadit Problematis reſolutio.

Scholium.

Unà cum Maximâ inclinatione radii RG, datur Maximus arcuum FQ, ad refractos NF terminatorum. Nam angulus FCQ, quem FQ ſubtendit, eſt æqualis angulo, quem CF & AN comprehendunt; hoc eſt, æqualis dimidio anguli, quem RG & AN, vel BQ, comprehendunt; & proinde arcuum FQ, æquè ac angulorum ab RG & BQ comprehenſorum, maximus eſt, qui radio AN in punctum jam inventum incidente definitur.

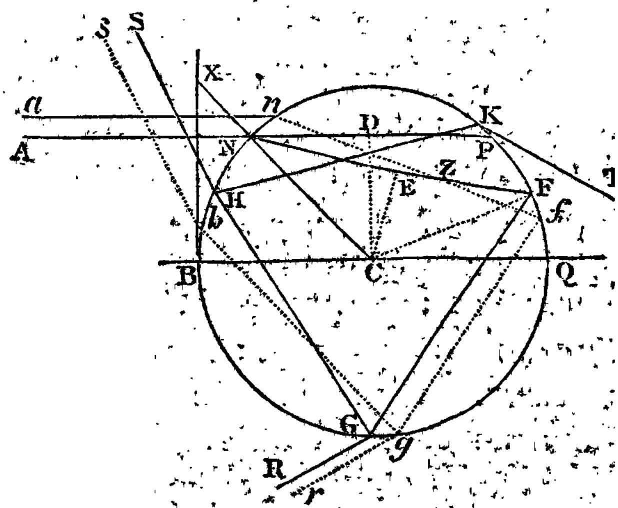
PROP.

De Curvarum

PROP. XXXVI.

Sole Sphæram pellucidam, BNP, *illuſtrante; radiorum ejus, poſt duas reflexiones emergentium, minimam ad axem inclinationem determinare.*

Sint AN & An radii duo incidentes ſibi quàm proximi; qui poſt duas reflexiones, in Ff & Gg, emergant ſecundum HS & *hs*: et manifeſtum eſt, quòd in eo ſolo caſu, ubi angulus acutus, quem



EQ & SH comprehendunt minimus eſt, radii illi HS & *hs* poſſunt eſſe paralleli, uti ſuprà de radius GR & *gr* dictum fuit; & ubi hoc accidit, radius etiam FG ad *fg* parallelus erit. Unde, 2 arc. F*f* = (arc. F*f* + G*g* = arc. FG − *fg* = arc. NF − *nf* =) arc. N*n* − F*f*. Adeoque 3 arc. F*f* = arc. N*n*; & cùm NF dividatur in Z in ratione iſtorum arcuum, ut patet, erit NZ = 3 ZF = 3 EZ. Cùm itaque per Corol. 3. Prop. XXXII. ſit I × NF. R × NP :: NZ. EZ :: 3. 1; erit I × NF = 3R × NP, ſive I. 3R :: NP. NF. Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. X. dabitur punctum N, ducendo nempe BX, quæ circulum tanget in vertice B, & cujus quadratum ſit ad BC quadratum ut 9RR − II ad II − RR, & agendo CX, quæ occurret peripheriæ in N. Invento autem N, cætera facile determinantur.

Corol. 1. Hinc eſt 8RR. II − RR :: CN*q*. DN*q*. Nam 9RR − II. II − RR :: BX*q*. BC*q*; & componendo, 8RR. II − RR :: CX*q*. BC*q* :: CN*q*. ND*q*.

Corol.

Corol. 2. Eſt etiam I. 3R : : ND. NE, utpote cùm ſuprà fuerit I. 3R : : NP. NF. REFRACTIONIBUS.

Scholium.

Ad eundem modum maxima radii KT, poſt tres reflexiones emergentis, inclinatio ad axem, juxtà ac maximus arcuum QG inveſtigabitur. Scilicet in eo caſu FG & *fg* convenient ad G, eritque arc. F*f*= (arc. FG−*f*G = arc. NF−*nf*=) N*n*−F*f*; & inde 2 arc. F*f*=arc. N*n*, & NZ=2ZF; adeoque 4. I : : NZ. EZ : : (per Corol. 3. ad Prop. XXXII.) I×NF. R×NP, ſive I. 4R : : NP. NF, & proinde per Lem. X. 16RR−II. II−RR : : BX*q*. BC*q*; unde conſectatur eſſe 15RR. II−RR : : CN*q*. ND*q*, & I. 4R : : ND. NE.

Atque ita, ſi radii poſt quatuor reflexiones emergentis, inclinatio minima deſideratur, determinabis faciendo, ut ſit 25RR−II. II−RR : : BX*q*. BC*q*; vel 24RR. II−RR : : CN*q*. ND*q*. Et I. 5R : : ND. NE, & ſic præterea in infinitum.

66. Tranſactis refractionibus Homogeneorum radiorum, jam reſtat, ut Heterogeneos conferamus. De horum ad Plana refractionibus paulo fuſius agebamus, ut eo Priſmatum (quorum uſus in experimentis faciendis poſthac erit frequentiſſimis) affectiones innoteſcerent. Præcipuum verò, quod circa curvas ſuperficies jam determinandum occurrit, eſt quantitas erroris radiorum; à quo oritur confuſio, ſive indiſtincta viſio Objectorum, quæ in Teleſcopiis per nimiam vitri, objectum reſpicientis, aperturam evenire ſolet. Et in hunc finem cùm præmiſſa ſit Prop. XXXI. unde errores innoteſcunt, qui in ſphæricis ſuperficiebus per ineptitudinem Figuræ efficiuntur: ſequentem jam ſubjungimus, quâ errores ex inæquali Refrangibilitate diverſorum radorum orti, determinari poſſunt.

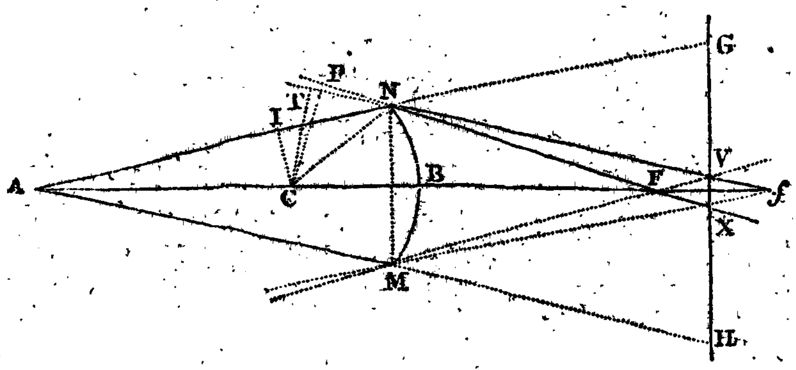
PROP. XXXVII

Heterogeneis radiis in Sphæram incidentibus, errores ex inæqualibus radiorum ſimiliter incidentium refractionibus progenitos determinare.

E puncto A in Sphæram NBM, centro C deſcriptam, incidant, ſecundum lineam aliquam AN, radii duo maximè diſformes; quorum

De Curvarum

rum refracti ſunt NF & Nf, axi occurrentes in F & f, & in illos demittantur perpendicula CI, CP & CT. Jam, ſi accurata reſolutio deſideretur, refractiones radiorum NF & Nf ſeorſim compu-



tandæ ſunt; ſed, cùm arcus NM ponatur admodum exigua portio circuli, veritatem quàm proximè aſſequemur aſſumendo angulos CNI, CNP, & CNT ferè eſſe ut eorum ſinus. Sit ergo I communis ſinus incidentiæ; P, ſinus refractionis radiorum maximè refrangibilium; ac T, ſinus ille minimè refrangibilium. Erit ang. CNI. ang. CNP : : I. P, & ang. CNP. ang. CNT : : P. T, ac diviſim ang. INP. ang. CNP : : P−I. P, & ang. CNP. ang. PNT : : P. P−T, & ex æquo, ang. INP. ang. PNT : : P−I. P−T.

Sume jam arcum BM æqualem arcui BN; & radiorum ſecundum AM incidentium duc refractos MF, mf, prioribus occurrentes in V & X. Age VX, & produc donec occurrat incidentibus radiis ad G & H; & patet VX eſſe latitudinem minimi ſpatii, in quod omnes radii congregari poſſunt. Eſtque GX. VX : : (ang. GNX. ang. VNX proximè : : ang. INP. ang. PNT : :) P−I. P−T; & GH+VX (2GX). VX : : 2P−2I. P−T; ac diviſim GH. VX : : P+T−2I. P−T. Unde datis P, T, I, dabitur ratio GH ad VX.

Ex. gr. Cùm ſuprà determinaverim, quòd ad vitrum aëri conterminum ſit I. P : : $44\frac{1}{2}$. $69\frac{1}{2}$, & I. T : : $44\frac{1}{2}$. $68\frac{1}{2}$; ſi aſſumatur I = $44\frac{1}{2}$, erit P = $69\frac{1}{2}$, ac T = $68\frac{1}{2}$, & P+T−2I = 49, & P−T = 1, adeoque GH. VX : : 49. 1, circiter.

Scholium.

(n) Hæc ita ſe haberent, ſi vera eſſet æſtimatio lineæ PQ fig. p. 334, quam Newtonus hìc poſuit. Verùm eam vitioſam eſſe ſuprà monuimus. (Not. *.) Nimirum illa PQ his notis algebraicè deſignanda eſt, $\frac{RRy^3}{4.ll.aa}$. Unde pro literis a, y, l, R numeris 120, 1, 11, 27 ſubſtitutis, efficietur PQ = 27 × 27

2

Scholium.

67. Ope hujus & Prop. XXXI. errores Homogeneorum Radiorum, qui in ſphæricis ſuperficiebus per Figuræ ineptitudinem obveniunt, cùm Heterogeneorum erroribus conferri poſſunt; & conſtabit hoſce longè majores eſſe in parvis Sphærarum portionibus: atque adeo heterogeneitatem Lucis, & non ineptitudinem Figuræ Sphæricæ, in cauſâ eſſe, quòd Teleſcopia in majorem perfectionis gradum nondum promota habeamus.

Concipiamus e.g. quòd NMB in figuris p. 334 & p. 346. referat Objectivum Vitrum Teleſcopii, cujus anterior ſuperficies NM plana ſit; eò ut radios in poſteriori, ſeu ſphæricâ, ſuperficie NBM ſolummodo refringat; & ponamus CB ſemidiametrum hujus Sphæræ eſſe 10 pedes, ut Teleſcopium ferè 20 pedes, ſive 240 digitos, longum conficiat; ſitque Apertura NM 2 dig. quanta maxima cum viſione ſatis diſtinctâ adhibeatur in hujuſmodi Teleſcopiis, quæ Objectum quaſi 70 vel 80 vicibus ampliant; & ſinus incidentiæ ſit ad ſinum refractionis, in confinio vitri & aëris peractæ, ut 11 ad 17 circiter, prout ſuprà determinavimus. His poſitis ſcribendum eſt 120 pro a, 1 pro y, 11 pro I, & 17 pro R, in valore ipſius PQ, quem exhibuimus in Corol. 7. Prop. XXXI. hoc eſt in termino $\frac{Ry^3}{4Iaa}$; & emergit $\frac{17 \text{ dig.}}{4 \times 11 \times 120 \times 120}$, ſive $\frac{17 \text{ dig.}}{633600}$, $=$ PQ: eſtque hic error lateralis Homogeneorum Radiorum, ortus ab ineptitudine Figuræ Sphæricæ. Præterea concipiamus radios AN & AM fig. p. 346. eſſe parallelos axi; & erit GH $=$ NM $=$ 2 dig. adeoque VX, error nempe lateralis heterogeneorum ab invicem in eodem loco concurſûs, erit $\frac{2}{49}$ dig. Confer jam hos errores, & patebit VX eſſe ad PQ (ſeu $\frac{2}{49}$ ad $\frac{17}{633600}$) ut 1267200 ad 833, ſive ut 1521 ad 1 circiter (n). Adeoque VX eſſe quaſi mille & quingentis vicibus majorem quàm PQ; tanta ſanè diſproportio, ut PQ reſpectu VX pro nullo haberi poſſit. Error quidem VX, cùm ſit $\frac{2}{49}$ dig. tantus eſt, ut miror, quòd Objecta per hujuſmodi Teleſcopia tam diſtinctè videri poſſint.

(n) $\frac{17 \times 17}{4 \times 11 \times 11 \times 120 \times 120} = \frac{289}{6969600}$. Quare VX : PQ $= \frac{2}{49} : \frac{289}{6969600} = 2 \times 6969600 : 49 \times 289 = 984 : 1$. Similem numerorum emendationem adhibuit quiſquis ille fuerit, qui hunc librum primus edidit.

poſſint. Sed alterius generis error PQ, ſive $\frac{17}{633600}$ dig. i. e. $\frac{1}{37271}$ dig. circiter, longè minor eſt, quàm qui poteſt eſſe ſenſibilis, & proinde negligendus; & indiſtincta viſio erroribus ex heterogeneitate Lucis exortis ſolummodo tribuenda. Et hinc patet perfectionem Teleſcopiorum non è Conicis Sectionibus petendam eſſe, ſed figuras Sphæricas huic uſui æquè inſervire poſſe. In Microſcopiis quidem errores homogeneorum radiorum, ex ſphæricâ ſuperficie Vitri Objectivi, propter Aperturam benè magnam, enormes oriuntur & admodum ſenſibiles; adeo ut illa Vitra, ſi ſecundum conicam aliquam ſectionem debitè formarentur, paulo perfectiora evaderent. Sed (°) methodus tamen me non latet corrigendi errores illos abſque Conicis Sectionibus; & efficiendi ut Vitra è Sphæricis ſuperficiebus formari poſſint, quæ radios homogeneos ſatis accuratè refringent, ne dicam, quæ longè accuratiùs refringent obliquos radiorum penicillos, quàm vitra aliis quibuſcunque figuris terminata; adeo ut Sphæricas ſuperficies uſibus Dioptricis, præ cæteris omnibus accommodatas eſſe cenſeam.

(°) Nempe ſi perſpicillorum vitra objectiva ex vitris duobus ſphæricè figuratis & aquam inter ſe claudentibus conſlentur. Vid. Newtoni Princip. Schol. Prop. ult. Lib. 1. Et *Optics*. Prop. VII. Part. I. Lib. 1. *Curator Editionis Primæ*.

ARGUMENTA CAPITUM

PARTIS SECUNDÆ LECTIONUM OPTICARUM.

SECT. I. *Exponitur Doctrina de Coloribus, & per experimenta Priſmatis probatur.* Pag. 349

SECT. II. *De variis Colorum Phænomenis.* 399

SECT. III. *De Phænomenis Lucis per Priſma in Oculum tranſmiſſæ.* 411

SECT. IV. *De Phænomenis Lucis per Medium Refractivum parallelis planis terminatum tranſmiſſæ.* 419

SECT. V. *De Phænomenis Lucis per Media ſphæricè terminata tranſmiſſæ; deque Iride.* 424

OPTICÆ PARS SECUNDA.

DE COLORUM ORIGINE.

SECTIO PRIMA.

Exponitur Doctrina de Coloribus, & per Experimenta Priſmatis probatur.

QUI in fabricandis Teleſcopiis occupati ſunt, de Coloribus conqueruntur, quibus Objecta, dum vitris iſtis mediantibus aſpiciuntur, tingi ſolent; quique eo magis augentur & apparent, quo Vitrum Oculare ex ſphæris minoribus efformatur, vel etiam quo Vitrum Objectivum majori latitudine radiis intrantibus patet. Unde duplici incommodo implicati impediuntur, ne Perſpicilla ad optatum perfectionis gradum perducant: tum quòd Oculare Vitrum ultra certos gradus parvum, ad Objecta magis amplianda, nequeant adhibere; tum quòd vitrum Objectivum ultra certos limites aperire nequeant, ad Objecta magis lucida & perſpicua reddenda. Qui gradus vel limites, ſi non probè obſerventur, Objecta coloribus involuta reddentur, & multo minùs diſtincta, quàm ſi vel minora cernerentur, ope vitri ocularis minùs convexi, vel minùs lucida diminutâ Perſpicilli aperturâ. Jam, cùm iſtæ perfectiones præcipuæ ſint, quæ in Perſpicillis deſiderantur; nempe ut Objecta magis amplient, & reddant lucidiora: operæ pretium videtur in naturam Colorum inquirere; ut inveſtigemus tandem quid in cauſâ ſit, quòd ita appareant, & Objecta reddant indiſtincta; hujus enim ignorantia quàm plurimos labore non exiguo ſed inani tamen exercuit, dum perfectionem Teleſcopiorum à vitioſis vitrorum

De Radiorum

vitrorum figuris ortam eſſe credentes, in iſtis meliori figurâ perpoliendis navârunt operam. At, ſi cauſam horum colorum ſatis exploratam habuiſſent, ſimul innotuiſſet inæqualis diverſorum radiorum Refrangibilitas, & inde vitia Teleſcopiorum non ab ineptitudine figuræ Sphæricæ ad refractiones ritè peragendas originem ducere conſtitiſſet. Quo benè intellecto, conatus ſuos procul dubio mutâſſent, & laboribus iſtis ſecundum aliam methodum diſpoſitis, Opticam in gradum multo perfectiorem jàm promotam haberemus.

2. Qui de Coloribus hucuſque diſſeruere, vel id nomine tenus fecerunt, ut Peripatetici; vel in eorum naturam & cauſas inquirere conabantur, ut Epicurei & alii recentiores. Quæ Peripatetici de hiſce tradidere, etſi vera forent, tamen ad noſtrum propoſitum nihil valerent: quippe, dum modum, quo generantur, & cauſas, undè fiunt tam varii, non attingant. Etenim illi, de originibus & variis rerum ſpeciebus diſputantes, pro cauſis, ex quibus ipſarum exiſtentiam & diſcrimen mutuantur, varias quaſdam Formas aſſignârunt; verùm de particulari cujuſvis Formæ cauſâ & ratione, ob quam differt ab aliis, haud unquam quicquam diſſeruere. Sic ea fecerunt miſſa, quorum explicatio videtur ſummum Philoſoporum officium, imo quæ ſola mentem, ſcientiæ naturalis avidam, explere poſſint.

3. Attamen, ne mancam Philoſophiam tradidiſſe viderentur, effecerunt, ut ejuſmodi diſquiſitiones pro maximè abſurdis & ridendis habeantur; utpote quæ ſupponunt Formarum eſſe alias Formas, & Qualitates Qualitatum. Itaque cùm Lux definiatur eſſe Qualitas vel Forma, quæ dat eſſe lucidum, non expectandum eſt, ut aliquid de ejus cauſis audiamus, vel quâ ratione ad varios Colores producendos fiat varia. Dicunt equidem, quod plus luminis quibuſdam coloribus immiſcetur, quàm aliis: at hoc non ſufficit ad eorum productionem, tum quòd nullus omnino color ex albedine & nigredine ſolummodo mixtis, præter fuſcos intermedios, generatur; tum quòd quantitas lucis non mutat ſpeciem coloris. Corpus enim Rubrum, verbi gratiâ, ſemper apparet Rubrum, ſive aſpiciatur in crepuſculo, ſive in meridie lucidiſſimo. Porro autem ipſa definitio, quam attribuunt coloribus, adeo non pandit eorum naturam, ut eos ne nomine tenus exprimat. Ait

Ariſtoteles

Ariſtoteles Χρῶμα δὲ ἐςὶ τȣ̃ διαφανȣ̃ς ἐν σώματι ὁρισμένῳ πέρας. Quæ ſuperficiei coloratæ potius quàm coloris deſcriptio eſt. Illa enim dici poteſt extremitas perſpicua in corpore terminato. At color plerumque videtur, ubi nulla talis datur extremitas, ut in Iride & Priſmate, in Vitris vel Liquoribus perſpicuis, & aliquo colore leviter tinctis. In Aquâ Marinâ, quæ viridis plurimùm apparet, qui tamen color non in extremitate aquæ, ſed per totam ejus craſſitiem, generatur; in Aere, qui, licet maximè perſpicuus & nullo corpore denſo terminatus, ſerenâ tamen nocte cæruleus apparet; & in Flammâ, quæ non minùs perſpicua eſt, & luci pervia, quàm ipſe Aer. Sic cùm humores oculi colore aliquo tinguntur, omnia videntur eodem colore tincta, licet extremitas perſpicui ſit aliis coloribus prædita. Et cùm Solem nudis oculis modò aſpexeris, luminoſa omnia deinceps videntur rubra, & nigra plerumque apparent cærulea; qui color erit magis conſpicuus, ſi clauſis oculis te in locum aliquem tenebroſiſſimum ſtatim conferas. Imo premendo oculum colores in tenebris excitare liceat; quis autem vocabit illos extremitatem perſpicui? Cæterùm non opus eſt, ut has opiniones enixè refutem, quæ, etſi veræ eſſent, tamen non ſunt ſufficientes, neque propoſito meo adverſantur. Eſto enim Lux qualitas corporis lucidi: eſto Lumen actus perſpicui; & Color ejus extremitas: & quicquid de illis dixerunt, eſto; abinde tamen haud concipi poterit, quo pacto Lux refringatur; unde Colores ſint varii; quid in cauſâ ſit, quòd in Perſpicillis apparent; & quâ ratione incommodum iſtud devitari poſſit.

LUCIS COLORIBUS.

4. Ad opiniones aliorum Philoſophorum quod attinet, dixerunt Colores vel ex Umbrâ Luceque variè mixtis; vel ex contortione globulorum, aut eorum variis preſſionibus generari; vel denique ex variis modis, quibus Medium quoddam Æthereum vibratur, ſtatuentes Lucem productam eſſe ex impulſu vibrantis Ætheris in retiformem tunicam delato. Extra oleas nimis vagarer, ſi has opiniones ſigillatim refutandas adortus eſſem: nec opus eſt, ut faciam, cùm omnes in communi quodam errore conſentiant; ſcilicet, quòd modificatio Lucis, quâ ſingulos colores exhibet, ei non ſit inſita ab origine ſuâ, ſed inter reflectendum vel refringendum acquiritur. Inter radios lucis nullum contemplantur diſcrimen, priuſquam incidant in corpus aliquod colorificum; opinati tan-

tùm,

De Radiorum

tùm, quòd, pro variâ diſpoſitione corporis iſtius, variis modis reflectuntur vel refringuntur, & pro ſpecie modificationis, quam ſic acquirunt, varia deinde Colorum phantaſmata ſpectantibus exhibent. Mixtura Lucis & Umbræ, gyratio globorum, vel varia vibratio Medii non ſupponuntur ineſſe radiis antecedenter ad eorum reflexiones vel refractiones, ſed per iſtas actiones generari creduntur. Quemadmodum & Peripatetici ſtatuunt Colores à corporibus originem ducere, quorum dicunt eſſe qualitates. Attamen contrarium eſſe verum ex ſequentibus abunde patebit. Invenio ſcilicet, quod modificatio Lucis, unde Colores originem ſumunt, luci connata ſit; & non oritur à Reflexione neque à Refractione neque à qualitatibus corporum, aut modis quibuſlibet, nec ab iis vel deſtrui poteſt, vel ullo modo mutari.

5. Verùm, ut ſententiam meam diſtinctius proferam, invenio primò, quòd radiis diverſè refrangibilibus competant diverſi colores; maximè refrangibilibus Purpura, ſive Violarum color competit, et Rubor minimè refrangibilibus, atque mediocribus Viriditas, vel potius confinium Viridis & vireſcentis Cærulei. Cæruleus autem Purpuræ intercedit & Viriditati, Flavuſque Viriditati & Rubori. Adeoque radii prout ſunt plus pluſque refrangibiles, apti ſunt ad hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generandos unà cum omnibus eorum ſucceſſivis gradibus & coloribus intermediis.

6. Invenio præterea, quòd nullius radiorum generis Forma, ſive diſpoſitio colorifica, vel refractione, vel aliâ quâcunque (quam potuerim animadvertere) cauſâ, mutari poteſt; ſed unicum tantùm, ſibi proprium, colorem unumquodque ſemper conſervat & exhibet; ſi modò à radiorum diverſi generis miſturâ non conturbetur. Nam colores, qui refractionibus generari videntur, non niſi difformium radiorum miſturâ variâ, vel ſeparatione fiunt.

7. Tertio invenio, quòd color Albus & Niger, unà cum Cinereis ſeu Fuſcis intermediis, fiunt ex radiis cujuſque ſpeciei confuſè miſtis; & ſimiliter, quòd cæteri omnes colores, qui non ſunt ex primitivis, per varias horum radiorum miſturas producuntur. Et inde non mirum eſt, ſi difformibus radiis per inæqualem refractionem ſegregatis, diverſi colores ex his de novo emergere videantur.

8. Quinetiam

8. Quinetiam invenio, quòd Primitivi Colores per miſturam radiorum alterutrinque confinium exhiberi poſſunt. Viridis nempe ex Flavo & Cæruleo; Flavus ex adjacente Viridi Citreoque, & ſic de aliis. Per colores autem Primitivos non tantùm quinque prædictos intelligo, ſed & quoſlibet alios, quibus exhibendis aptum datur aliquod uniforme radiorum genus. LUCIS COLORIBUS.

9. Invenio denique, quòd omnes omnium corporum colores non aliunde generantur quàm è diſpoſitione quâdam, quâ apta ſunt ut alios radios reflectant, & intromittant alios. Sic corpus rubrum eſt, quòd radios ad Rubedinem aptos reflectit maximè, & pleroſque cæteros intromittit; Purpureum, quod radios iſti colori generando proprios reflectit, & intromittit alios: Album verò, quòd ferè omnes reflectit; & Nigrum, quòd omnes intromittit, pauciſſimis, ſed omnium tamen ſpecierum, radiis repercuſſis.

10. Verùm ne videar officii limites exceſſiſſe, dum naturam Colorum pertractare aggrediar, qui nihil ad Matheſin attinere cenſeantur; non abs re erit, ſi de ratione incepti hujus iterum commonefaciam: nimirum tanta eſt inter proprietates Refractionum & Colorum affinitas, ut ſeorſim explicari nequeant. Qui alterutras ritè velit cognoſcere, ut alteras cognoſcat neceſſe eſt: & præterea, ſi de Refractionibus non agerem, & earum diſquiſitio non eſſet in cauſâ, quòd negotium de Coloribus ſimul explicandis inceptarem; tamen generatio Colorum tantam Geometriam complectitur, & eorum cognitio tantâ firmatur evidentiâ, ut vel ipſorum gratiâ poſſem aggredi, ſic limites Matheſeos non nihil ampliaturus. Quemadmodum enim Aſtronomia, Geographia, Navigatio, Optica & Mechanica pro ſcientiis Mathematicis habeantur, licet in iis agatur de rebus Phyſicis, Cœlo, Terrâ, Navibus, Luce & Motu Locali: ſic etiamſi Colores ad Phyſicam pertinent, eorum tamen ſcientia pro Mathematicâ habenda eſt, quatenus ratione mathematicâ tractantur. Imo verò, cùm horum accurata ſcientia videtur ex difficillimis eſſe, quæ Philoſophus deſideret; ſpero me quaſi exemplo monſtraturum, quantum Matheſis in Philoſophiâ Naturali valeat; & exinde ut Geometras ad examen Naturæ ſtrictiùs aggrediendum, & avidos ſcientiæ naturalis ad Geometriam priùs addiſcendam horter: ut ne priores ſuum omnino tempus in ſpeculationibus humanæ vitæ nequaquam profuturis

 abſumant;

De Radiorum

abſumant; neque poſteriores, operam præpoſterâ methodo uſque navantes, à ſpe ſuâ decidant. Verùm ut Geometris philoſophantibus, & Philoſophis geometriam exercentibus, pro conjecturis & probabilibus, quæ venditantur ubique, ſcientiam Naturæ ſummis tandem evidentiis firmatam nanciſcamur. Itaque ad inſtitutum redeo, de Coloribus ſecundum præcedentes quinque Propoſitiones explicatis diſceptaturus.

PROP. I.

Radiis diverſè Refrangibilibus diverſi competunt Colores.

EXPER. I.

11. Quo primum comprobem, repetamus experimentum Priſmatis ſub initio propoſitum; nempe Radii Solares obtenebratum cubiculum ad foramen F (fig. 1.) ingreſſi, à Priſmate ABC, quàm proximè foramen iſtud intus diſpoſito, refringantur, tendentes deinde verſus oppoſitum parietem HI, ad imaginem PT ibi depingendam; & Imago illa, ut vulgo notum eſt, coloribus tingetur: quorum Rubeus ad extremitatem T à recto curſu minus deviantem, & Purpureus ad alteram procliviorem extremitatem P procidet; Cæruleus autem Viridiſque & Flavus ad Q, R & S, intermedia loca, cernentur. Conſtat itaque quòd radii maximè refracti Purpuram exhibent, & minimè refracti Ruborem; cæterique, intermediam refractionem paſſi, colores in ordine præfinito intermedios. Sed in majorem evidentiam, tum doctrinæ de radiorum diverſâ Refrangibilitate ſub initio propoſitæ, tum hujus doctrinæ, quòd certis Refrangibilitatis gradibus certi conveniant Colores; videamus è contra an diverſi coloris radii diverſam Refractionem patientur; hoc eſt, an radii verſus P tendentes refractionem iterum majorem patientur, quàm qui tendunt verſus T; id quod variis modis tentare liceat, quorum facillimum & maximè perſpicuum ſequentem exiſtimo.

EXPER. II.

12. Sume aliud Priſma *abc* (fig. 1.) & illud alicubi inter primum Priſma, ABC, & imaginem, PT, ita colloca, ut ſit illi Priſmati

mati ABC tranſverſum, ſive parallelum imagini PT, radioſque verſus PT tendentes intercipiat, & alioverſum refringat, puta verſus *pt*. Hoc facto, Imaginem *pt* refractionibus utriuſque Priſmatis ſic effectam videbis, ut priùs coloratam, ſed in alio tamen ſitu diſpoſitam; non parallelam imagini PT, ſed ſecundum extremitates rubras manifeſto convergentem. Jam, cùm radii ad utroſque colores, Rubrum T & Purpureum P pertinentes, ſimiliter incidant in Priſma ſecundum *abc*, ſi eandem præterea Refractionem paterentur, imagines PT & *pt* deberent eſſe parallelæ; & ideo, cùm non exiſtunt parallelæ, ſed imaginis *pt* extremitas Purpurea, *p*, longiùs ab alterâ imagine PT transferatur, quàm extremitas Rubea, *t*; neceſſario concedendum eſt, quòd radii ad extremitatem purpuream, P, tendentes magis refringantur, quàm qui tendunt ad extremitatem rubeam T: hoc eſt, quòd radii generantes Purpuram apti ſunt, ut magis refringantur quàm Ruborem efficientes: atque idem quoque de coloribus intermediis eâdem ratione conſtabit, ſicut oſtendendum propoſui. LUCIS COLORIBUS.

13. In experiendis hiſce notari poterit, quòd quo viciniùs anteriori Priſmati, ABC; ſive quo remotiùs à pariete, HI, collocetur priſma poſterius *abc*; imagines, *pt* & PT, eo magis ab invicem diſtantes, etiam ad ſe magis inclinabuntur; adeo ut angulum ſemirectum vel paulo minorem eo contineant, cùm Priſmata collocantur ad invicem viciniſſima; cujus rei ratio facillima eſt conſideranti, quòd diſtantiæ, P*p* & T*t*, ſunt in ratione quâdam datâ. Sic in fig. 2. ſi parallelæ P*p* ac T*t* ſint in ratione datâ, quo majores exiſtant, eo major erit inclinatio linearum PT ac omnium *pt*. Et hinc patet axes imaginum omnium productas convenire ad commune aliquod punctum cum axe ipſius PT.

14. Si fortè concurſus Imaginum deſideretur, radii OF, à Sole directi, eò uſque producantur, donec occurrant cum plano HI, in quod dictæ imagines projiciuntur, quemadmodum videre eſt ad X; id quod fiet auferendo Priſma ABC, ut jubar per F trajectum rectâ tendat ad X: & erit X locus, ad quem imagines PT & *pt* convergunt. Nam, quemadmodum radii maximè refrangibiles cadunt in P ac *p*, & minimè refrangibiles in T & *t*, conficientes imagines oblongas, PT ac *pt*; ſi alii præterea radii darentur minus adhuc refrangibiles, illi citra punctum T ac *t* in papyrum IH caderent: quo

De Radiorum

pacto imagines illæ paulo longiores evaderent, auctæ ſcilicet ad extremitates T ac *t*. Atque ita, ſi fingeremus radios gradatim minùs atque adhuc minùs refrangibiles dari, uſque dum deventum eſſet ad radios adeo pertinaces, ut non poſſent omnino refringi; illi radii Priſmata ſine aliquâ refractione pertranſeuntes, incidere deberent in ipſiſſimum punctum X, ad quod poſuimus radios à Sole directè venientes tendere. Imagines itaque, PT & *pt*, ſic productæ convenirent ad X, & proinde ad idem X convergunt. Cæterùm dubitari poteſt, an imagines illæ, ſi eo uſque producerentur, dum convenirent ad X, forent accuratè rectæ vel paululum incurvatæ; neque iſtud (cùm multi foret laboris & parvi momenti) jam lubet determinare; ſufficit, quòd ex obſervatione quàm proximè convergunt ad X.

15. De hoc experimento ſub initio obſervabam, § 23. quòd omnibus adverſatur objectionibus, quæ contra doctrinam de inæquali Refrangibilitate traditam proponi poſſunt; ex eo quod per tranſverſam refractionem ſecundi Priſmatis conſtat inæquales refractiones non eſſe fortuitas & irregulares, neque ex radii cujuſque diffuſione vel dilatatione ortas eſſe, aut aliâ quâvis cauſâ præter diſpoſitionem cujuſque radii ad refractionem in gradu aliquo certo & conſtante patiendam; quandoquidem cujuſque refractio in utroque Priſmate ſecundum illam legem peragitur. Addo jam, quòd exhinc etiam conſtat, refractiones ſingulorum radiorum ſecundum eaſdem leges peragi, ſive commiſceantur cum radiis aliorum generum, ut fit in albâ luce, ſive ſeparatim refringantur, luce priùs in colores converſâ. Nam experiri eſt, quòd ſimiles ſunt refractiones poſterioris Priſmatis, cùm proximè collocatur poſt alterum Priſma, antequam Lux per id trajecta tranſmigret in Colores, atque cùm longius poſt illud Priſma ſtatuitur, ubi Lux evaſit colorata.

16. Sicui in poteſtate eſt Inſtrumentum aliquod ad quantitates Refractionum accuratè menſurandas paratum, nullus dubito, quin iſtius etiam ope ſeorſim dimetiendo refractiones diverſorum generum radiorum, facilè obſervabit earum differentias; licet ego prædictis tanquam manifeſtiſſimis acquieſcens, haud operæ pretium duxerim rem aliis modis experiri. Verùm, ut cuique magis pateat,

teat, quanta ſit prædictorum evidentia, quædam, quæ exinde ſca- LUCIS COLORIBUS.
turiunt notatu digniſſima, proferre non pigebit.

EXPER. III.

17. Sit F*f* (fig. 3.) paries, vel operculum feneſtræ duobus foraminibus, F & *f*, luci pervium, iiſque digitos duos ab invicem diſtantibus; & intus diſponantur duo Priſmata, ABC, DEG, in ſitu ſibi invicem parallelo, & perpendiculari ad lineam F*f* per centra foraminum ductam; quæ duo lucem ingreſſam refringunt ad imagines duas, PT & MN, in oppoſitum parietem projiciendas, ſimili prorſus modo, quo factum eſt in experimento priori; & præterea ſint anguli Priſmatum, ACB, DGE, comprehenſi planis refringentibus æquales; quibus ita conſtitutis videbis imagines, PT & MN, in directum jacentes cum extremitatibus earum T & M contiguis. Quod ſi non eveniat, ſitus unius è Priſmatibus parùm mutandus eſt, donec extremitates contiguas eſſe cernas, vel fortè nonnihil coincidentes. Purpurâ M & Rubore T ſic juxta poſitis, adhibeatur Priſma tertium *abc*, quod primis Priſmatibus & eorum imaginibus interponatur, in ſitu ad lineam F*f* ſive ad imagines dictas, PT, MN, parallelo; ita nempe ut radios utriuſque Priſmatis ABC, DEG, tendentes verſus PT & MN, pariter intercipiat, eoſque refringens aliò projiciat, quemadmodum ad *pt* & *mn*; adeo ut quæ duobus Priſmatibus in priori ſpecimine facta ſunt, hîc videas facta tribus.

18. His ita paratis & conſtitutis, videbis imagines *pt* & *mn* ab invicem disjunctas eſſe, quæ priùs apud PT & MN fuerunt contiguæ & in directum poſitæ; ita quidem ut Purpura, *m*, in extremitate imaginis *mn*, magis diſtet ab imaginibus primis PT & MN, quàm Rubor *t* in extremitate imaginis *pt*; id quod nullo modo potuiſſet accidiſſe, niſi radii ad Purpuram generandam apti aliquanto magis refringerentur ex incidentiâ pari, quàm radii generantes Rubedinem. Etenim, cùm radii coloris utriuſque pariter incidant in Priſma poſterius *abc*, pariter etiam emergerent, ſi æqualiter refringerentur; & exinde depingerent imagines, *pt* & *mn*, prioribus, PT & MN, parallelas & in directum jacentes. Dixi radios utriuſque coloris (Purpurei Rubeique) pariter incidere in Priſma poſterius *abc*: quod ne moram injiciat alicui, concipien-

 dum

dum eſt, quòd radii FT tantùm inclinantur verſus extremitatem ejus *c*, quantum alteri *f*M verſus extremitatem alteram *ab*, & ſic incident pariter ſive ad eoſdem angulos, licet non paralleli. Si quis tamen velit efficere, ut incidant etiam paralleli, nihil aliud agendum eſt, quàm ut alterum è Priſmatibus anterioribus, ABC, vel DEG, circa ſuum axem paululum convertatur, donec inter T & M, interiores imaginum extremitates, tanta intercedat diſtantia, quanta eſt inter foramina F & *f*, ſive quanta iſti rei ſufficiens videatur; imaginibus ad iſtam diſtantiam in directum jacentibus: & Priſmate *abc* deinceps interpoſito, facilè percipiet, quòd incidentes parallelè emergent inclinati; tum quòd imagines non amplius in directum jacebunt, tum quòd Purpura M ad majorem diſtantiam transferetur quàm Rubedo T.

19. Si tria Priſmata non præſto ſint, experimentum jam recitatum duobus experiri poſſit, idque modo magis expedito & facili. Sit ABCDE (fig. 4.) priſma, cujus unum latus planum, ABDE, papyro denigratâ tegatur, duobus parvis foraminibus, F & *f*, luci perviâ, quorum foraminum ſitus eſto ad longitudinem Priſmatis tranſverſus. Tunc Priſmate hoc ita diſpoſito, ut radii permeantes iſta foramina terminentur in oppoſitum quoddam planum, puta papyrum HI; transferatur iſta papyrus ultra citraque, donec videas imagines duas, PT & MN, contiguis extremitatibus in directum conjunctas ut priùs; deinde altero Priſmate *abc* interpoſito, in ſitu ad alterum tranſverſo, videbis imagines illas PT & MN ad *pt* & *mn* ita tranſlatas eſſe, ut non ampliùs jaceant in directum, rubedine *t* à T minùs remotâ, quàm purpura *m*, ſicut in prioribus contingebat.

EXPER. IV.

20. Eſt & aliud ex eodem fonte derivatum ſpecimen, haud expertu difficilius aut minoris evidentiæ. Priſmate ABC (fig. 5.) juxta foramen F ut priùs collocato, ad diſtantiam convenientem (veluti duodecim pedum) ſtatuatur aliud Priſma, *abc*, in ſitu tranſverſo reſpectu prioris, vel fortè parallelo, aut alio quovis pro arbitrio; ita tamen ut anterius Priſma, ABC, lucem refractam & coloratam projiciat in aliquod ex planis lateribus, *ac*; quod quidem latus obducatur papyro denigratâ, & exiguo foramine, G, per

medium

medium transfoſſâ, per quod aliqui ex radiis, ab anteriore Priſmate refractis, tranſeant in hoc Priſma poſterius; ubi, cùm rurſus refracti fuerint, pergant ad papyrum HI ab inde decem pedibus, vel pluribus, diſtantem. Quibus ita conſtructis & diſpoſitis, in ſitu illo figatur papyrus, HI, & poſterius Priſma *abc*. Denique præ manibus ſumatur anterius Priſma ABC, non ut moveatur è loco ejus, ſed ut motu tantùm angulari nunc huc nunc illuc paululum inclinetur, ut alios atque alios colores ſucceſſivè trajiciat per foramen G in oppoſitam papyrum HI; & videbis, quòd color quilibet diverſus ad locum diverſum perget. Veluti, cùm ea ſit poſitio Priſmatis ABC, ut Rubeum colorem projiciat in G, ſi ponatur quòd ille ab altero Priſmate *abc* refringatur ad T; tum poſitione Priſmatis ABC paululùm mutatâ, inclinando circa axem donec Purpura cadat in G; videbis, quòd ille color juxta obliquiorem tramitem refringetur, puta ad P: & pari modo, ſi color aliquis intermedius incidat in G, idem refringetur ad locum ipſis P & T interjacentem. Quamobrem, cùm radii cujuſlibet generis pergentes à foramine F, poſitione dato, ad foramen G poſitione datum, & ideo ſimiliter incidentes in Priſma poſterius *abc*, refringantur ad loca diverſa P, T, cæteraque intermedia; conſtat, quòd inæqualiter refringantur: & cùm refractus GP obſervetur magis deflectere ab incidente FG quàm refractus GT, conſtat, quòd radii Purpuram exhibentes magis refringantur quàm exhibentes Ruborem; cæterique deinceps in ordine intermedio.

LUCIS COLORIBUS.

21. Siqua forſan oboritur ſuſpicio, quòd ex motu Priſmatis ABC, foraminibus F & G interpoſiti, incidentia radiorum diverſos colores efficientium tantum varietur, quantum ſufficiat ad varietatem efficiendam locorum P, T, &c ad quos refringuntur, quamvis motus iſte ſit exiguus & ineptus huic effectui; tamen, ut ſuſpicio illa prorſus eximatur, anterius Priſma ABC ad alteras partes foraminis F, Solem verſus, collocandum eſt; ut radii incidentes in foramen G directè veniant à dicto foramine F: eo enim pacto, cùm foramina F & G poſitione determinentur, poſitio radiorum per utrumque trajectorum determinabitur; eademque accurata erit omnium incidentia, quoſcunque colores exhibentium: & tamen diverſicolorum refractio non ſecus peragetur ad loca diverſa, P, T, &c, quàm modò explicui.

EXPER.

De Radiorum

EXPER. V.

22. Ex abundanti denique placet alium recenſere modum, quo hæc eadem tentari poſſint, ne copia deſit experturis. Nimirum radiis, ut priùs, per Priſma ABC (fig. 6.) trajectis, ad diſtantiam quamlibet, puta viginti pedum, adhibeatur Speculum planum, quale IK vel GH; quod eoſdem verſus locum quemvis D reflectat: ubi per aliud Priſma, LMN, tranſmittantur denuò verſus *p* vel *t*. His poſitis, ſi Speculum iſtud ita collocetur ad IK, ut rubrum colorem reflectat, & notetur locus *t* ad quem hi radii tendunt, poſtquam tranſiêre per Priſma LMN; deinde Speculum ſtatuatur ad GH, ut violaceum vel cæruleum colorem ad idem Priſma LMN ſecundum eandem lineam PTD, reflectat; & notetur locus *p*, ad ad quem iſti etiam radii à dicto Priſmate LMN refringantur: invenietur, quòd cæruleus color, verſus *p* refractus, longiùs divaricabit ab incidentibus radiis PTD, quàm rubeus refractus verſus *t*: atque adeo quòd radii Cæruleum generantes majorem refractionem patiantur, quàm generantes Rubeum.

23. Cum veritatem propoſitam ſic fecerim ſtabilitam, hanc Propoſitionem concludam adnotando connexionem & affinitatem, quam Coloribus & Refractionibus intereſſe dixeram: nempe ex oſtenſis non ſolum pateat, quòd diverſa Colorum genera cum definitis gradibus Refrangibilitatis reciprocantur; ſed & iiſdem experimentis probatur dari radios diverſè Refrangibiles, & radios diverſè Refrangibiles eſſe diverſi Coloris; iiſdemque probatur è contrà radios diverſicolores eſſe diverſè refrangibiles, & inde radios diverſè refrangibiles dari. Et ſcopus eorum, quæ in primis Lectionibus de diſpari Refrangibilitate radiorum edocui, quoad cauſas Colorum intelligendas, multum illuſtratur; ut pateat, quòd una abſque aliis dilucidè tractari nequeant.

PROP. II.

Radiorum Formæ, ſive Diſpoſitiones Colorificæ, non ſunt Refractione mutabiles.

24. Tranſactâ aſſertione, quòd diverſicolores radii ſint diverſè refrangibiles, & è contrà; videamus, an cujuſcunque radiorum, ſeorſim

ſeorſim ſpectati, generis Color à Refractione mutari poſſit; & hoc à noviſſimè (°) tradito experimento quadantenus decernitur. Scilicet, cùm extrema Purpura incidebat in foramen G (fig. 5.) radii, ſecundâ vice ad P refracti, Purpuram iterum exhibuêre ſine aliquâ Flavedine, Rubore, aut Viriditate exinde generatâ: &, cùm extrema Rubedo in G projiciebatur; eadem Rubedo in T abſque Violaceo, Cæruleo, aut Viridi emergente apparuit. LUCIS COLORIBUS.

25. Sed experimentum nondum omnibus numeris abſolutum eſt; nam ubi Priſma *abc* non tranſverſum, ſed alteri Priſmati ABC parallelum ſtatuebatur, è Purpurâ Cæruleus, & è Rubedine Flavus eliciebatur; præſertim ſi non ſummæ colorum extremitates per G trajiciebantur; cùm autem Viriditas trajecta fuit, colores utrinque proximi (Cæruleus nempe & Flavus) emerſêre; & ſic Flavus Citriuſque Ruborem & Viriditatem, ac Cæruleus Viriditatem & Purpuram præbuerunt. Eorum itaque reminiſci oportet, quæ ſub initio de more, quo oblonga hæc imago, PT, ex circulis in directum poſitis formatur, explicui; & inde conſtabit hoſce colores non ſimplices eſſe, ſed è plurium miſturâ componi. Nam concipe genus radiorum æqualiter refrangibilium, & intenſam Purpuram generantium, ab integro Solari diſco profluere, & per Priſma, verſus imaginem PT (fig. 7.) trajectos incidere in circulum AC. Deinde aliud concipe radiorum, paulo minus refrangibilium, genus in alium circulum YZ, qui priorem in G contingat, incidere; & manifeſtum eſt, quòd nulli iſtorum generum radii commiſcebuntur: quippe cùm circulos, AC & YZ, ex nullâ parte coincidentes occupant. Quòd ſi tertium radiorum, intermediam refractionem paſſorum, genus, in circulum EF, quaſi in medio poſitum, incidere fingas, patebit aliquos ex iſtis cum utriſque prioribus in ſpatiis HI & KL miſceri, in quibus nempe circuli ab illis illuminati coincidunt; atque ita, ſi concipias imaginem totam, PT, ex innumeris circulis, in longum diſpoſitis, componi, quorum quilibet à diverſis radiorum generibus illuminatur; conſtabit, quòd in omni ejus parte radii heterogenei commiſceantur: quibus deinde per iteratam refractionem magis ſegregatis, color quilibet in ſimpliciores reſolvi debet. Sic in Viridi latet Flavus & Cæruleus; qui tamen non conſpiciuntur, tum quòd Viridita-

(°) Imo ex Quarto.

De Radiorum

tem generantes, ſive (ut perſpicuitatis gratiâ voces fingam) Viridiformes radii propter copiam præpollent, tum quòd Flavus & Cæruleus Viridem componunt; ſed quatenus per ſecundam refractionem ſecernuntur, unuſquiſque ſub propriâ formâ videbitur. Et ſic in aliis.

Exper. VI.

26. His perſpectis periclitatus ſum, quid è pluribus refractionibus eveniret; hoc fretus conſilio, quòd Colores iteratis Refractionibus plus pluſque mutari deberent, ſi modò à ſingulis quamlibet internam mutationem paterentur; contrà verò, ſi non intrinſecus mutati, ſed, per divergentiam difformium radiorum, è miſturis tantùm educti & ſegregati eſſent: tum apparentes mutationes iteratis Refractionibus minores fieri, propterea quòd Colores quâlibet vice ſimpliciores evaderent: & experienti poſterior caſus evenit. Scilicet, cùm coloris per poſterius Priſma *abc* trajecti, partem aliquam tertio Priſmate, ad diſtantiam aliquot pedum diſpoſito, exceperim; Color ille denuo trajectus adeo perdurabat, ut, ſi ratione non conſtitiſſet mutationem aliquam eventuram fuiſſe, ſenſu judice haud mutari percepiſſem. Tentabam deinde, ſiquam quartâ Refractione mutationem ſenſibilem inducere potuerim, ſed fruſtrà. Interea cavendum eſt, ne foramina, F ac G, cæteraque, per quæ lux tranſit, majora ſtatuantur, quàm exigunt colores, ut evadant perſpicui.

27. Eſt & alia methodus, quâ diverſi Colores ab invicem ſegregari poſſunt, ut in ſegregatis examen ſtatuatur; ſcilicet experimentum ſub initio traditum eſt, quo Solis imago, PT, per contractionem cujuſque circularis imaginis, oblongam illam efformantis, multo oblongior quàm aliâs evaſerit. Nam in contractâ imagine *pt* (fig. 8.) quæ totidem conſtat circulis, eadem centra retinentibus, quot ſunt in majori PT, circuli minus coincidunt. Sic enim AC & EF ex parte HI coincidunt; at cùm in minores *ac* & *ef* contrahuntur, videre eſt, quòd ex omni parte ab invicem diſtant, & ſic de aliis. Quamobrem, cùm circuli à diverſis radiorum generibus illuminati jam minùs confunduntur, Colores evadent minùs commixti, utut non fient omnino ſimplices; propterea quòd circuli, inter *ac*, *ef* cæteroſque poſiti, cum illis ex ali-

quâ ſuâ parte poſſint coincidere. Sed hâc de cauſâ plures ejuſdem cujuſque coloris gradus tantùm commiſceri poſſunt, ut Cyaneus & Indicus in Cæruleo, Coccineus, Minius, & fortaſſe Citrius in Rubro; & ſic de aliis. Quæ quidem miſtura ſemper fiet eo minor, quo imago *pt* in anguſtiorem contrahitur.

LUCIS COLORIBUS.

EXPER. VII.

28. Diſpoſui itàque Priſma ABC (fig. 9.) unà cum lente LM, ad diſtantiam quaſi decem pedum à foramine F, per quod Sol illuxit cubiculum; & radii, per hæc duo vitra trajecti, deſideratam imaginem contractam, *pt*, ad pedes exinde decem circiter formabant; lente LM exiſtente tali, ut radios parallelos ad focum quinque pedibus à ſe diſtantem cogeret. Deinde aliud adhibui Priſma, HIK; cujus latus planum HI velamine nigro, ad *n* (ut dictum eſt) transfoſſo, tegebatur, & ad imaginem *pt* ſtatui; ubi Colores ſecundùm latitudinem maximè contractos & diſtinctè terminatos vidi, ut eorum aliquis pro arbitrio tranſmitteretur per *n* in parietem, vel papyrum YZ. Quibus poſitis obſervabam deinde, quòd Colores hoc modo multo minùs à repetitis Refractionibus mutati fuerint, quàm in præcedentibus. Cùm rubor per *n* tranſmiſſus eſt, idem rubor ad YZ apparuit, & non alius color quiſpiam, demptis variis ejuſdem gradibus, ut Coccineo & Minio: et ſic Viriditas in varios ſolummodo gradus diſcreta fuit, ex unâ parte vergens ad Flaveſcentem Viriditatem, & ex aliâ Thalaſſinum; ſed in Flavum aut Cæruleum, aliumve colorem quemvis, ex nulli ſui parte transformari potuit. Atque idem in aliis coloribus contigit.

29. Obſervabam præterea, quòd cùm foramen F factum erat anguſtius, ut per imaginis *pt* majorem contractionem colores evaderent ſimpliciores, colores ad YZ trajecti minùs adhuc mutati fuerint, & vix aliquam mutationem ſenſibilem paſſi fuiſſe videbantur, cùm foramina non latius duodecimâ parte digiti patuêre; hoc tantùm excepto diſcrimine, quòd lux apud *pt* fortior erat (quia magis contracta) quàm apud YZ. Atque adeo nil dubitandum eſſe cenſeo, quin colores evaderint prorſus immutabiles, ſi modò per indefinitam parvitatem foraminum, F & *n*, omnino in ſimplices diſcerni poſſunt. Et hoc ex eo etiam confirmatur, quòd

De Radiorum

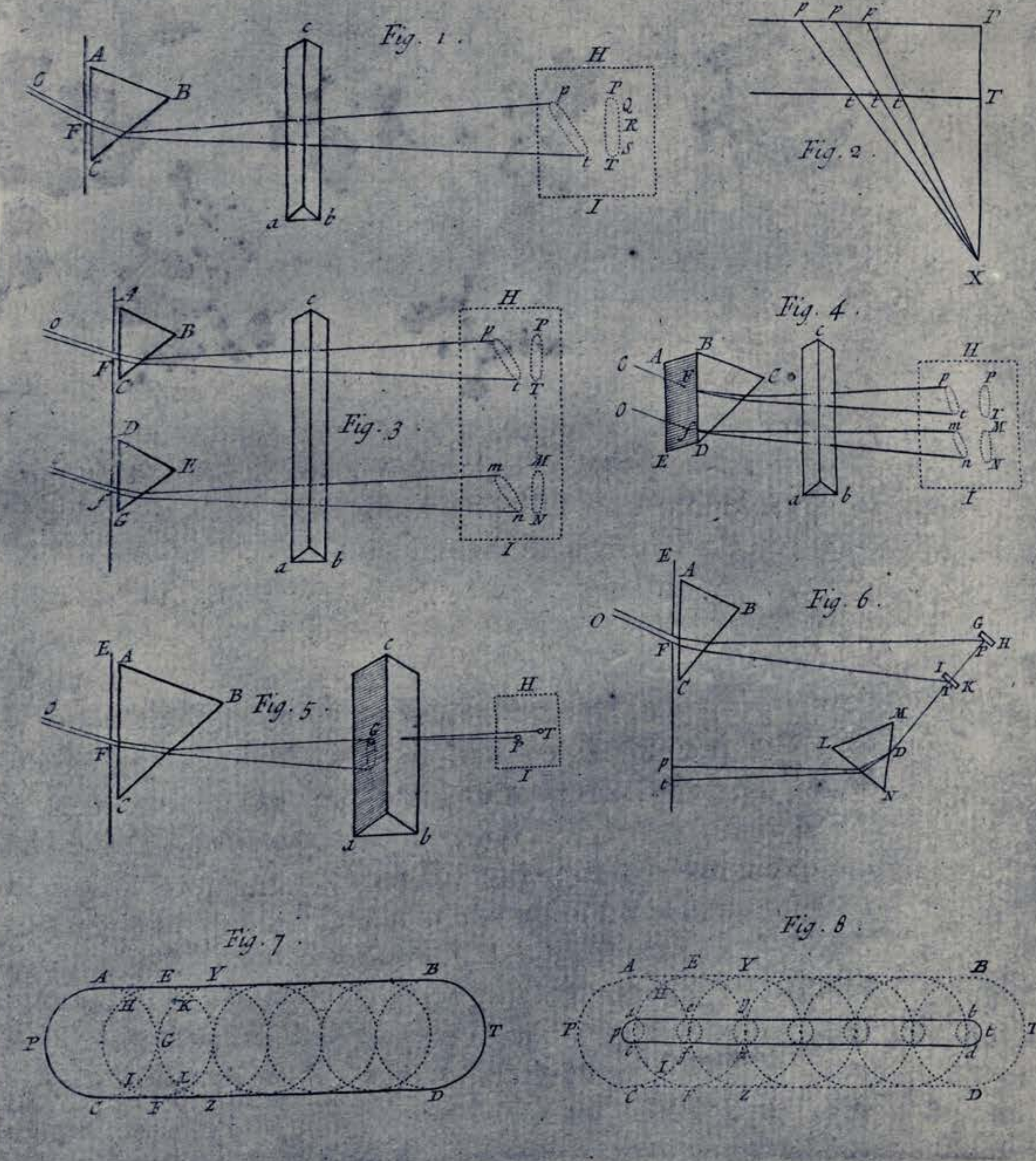
cùm texi lentem LM, juxta perimetrum ejus, velamine nigro, per medium ad latitudinem ferè ſemiſſis digiti circulariter pertuſo, figura imaginis YZ pene orbicularis evaſit; & eo magis orbicularis, quo magis foramen F contraxi. Id quòd notari vellem, cùm plurimum illuſtret, cauſam imaginis PT in longitudinem diductæ non aliam fore, quàm radiorum coloribus diſſimilium diverſam refrangibilitatem.

30. Cæterùm, quo propoſitum adhuc magis pateat, & ex abundanti ut conſtet, quinam ſint Colores Primitivi; adverto circulos AC, EF, YZ cæteroſque in alternas partes juxta lineam, quæ per omnium centra tranſit, maximè extendi, & ab invicem recedere, antequam attingant parallelas rectas AB & CD, quibuſcum imago illa utrinque terminatur. Sic AC & EF, ſe mutuò ſecantes in H & I, recedunt poſtea, non omninò coincidentes in triangulis AHE & CIF. Colores itaque juxta ipſiſſimas extremitates AB & CD ſunt omninò ſimplices. Et ex hoc fundamento propoſitum aſſequi poſſem; ſed cùm circuli illi, ſtatim ut ab extremitatibus ipſis recedunt, inter ſe mutuò nimis interferuntur, quàm ut Colores, per aliquam ſenſibilem latitudinem, ſatis ad experimenta commodè inſtituenda ſegregantur; rem potius ad hunc modum aſſequar.

EXPER. VIII.

31. E præoſtenſis conſtat, figuras, ex quibus in longum diſpoſitis imago PT componitur, circulares eſſe propter Solis diſcum circularem; & inde, ſi diſcus ille triangularis eſſet, vel aliâ quâcunque non circulari perimetro terminatus, illæ etiam figuræ vel triangulares, vel alio quovis modo ad inſtar Solis terminatæ evaderent. Et par eſt ratio de foramine F, & figuris ad inſtar iſtius foraminis; ex quibus, in longum ſimiliter diſpoſitis, imago *pt* conſtituitur. His animadverſis, vice orbicularis foraminis F triangulare ſubſtituitur, cujus altitudo verbi gratiâ ſit pluſquam digiti, baſis tertiæ quartæve partis digiti, & crura æqualia. Et Priſmate ABC ad trianguli hujus perpendiculum exiſtente parallelo, imago *pt* (fig. 10.) quadrilatera ex triangulis *caf*, *emb*, *gni* cæteriſque infinitè multis efformata eſt; quibus juxta baſes, in lineâ *cd* poſitas, cum ſe mutuò parte maximâ communicantibus, exinde ad

Tab. I.



ad uſque ipſorum vertices receſſio gradatim facta eſt, donec in verticibus, ad rectam *ab* ſitis, penitus diſſocientur, adeoque colores ibi ſimplices evadunt. LUCIS COLORIBUS.

32. Jam verò obſervabam, quòd ſimplices ſive primitivi colores juxta terminum *ab*, etſi longè debiliores, tamen (ſenſu judice) ejuſdem ſpeciei apparuêre, ac compoſiti juxta terminum *cd*; cujus rei ratio eſt, quòd color quilibet primitivus per commiſturam colorum utrinque confinium exhiberi poteſt, ut in ſequentibus patebit. Colorum, verò quos hoc pacto primitivos eſſe conſtitit, gradus eſſe inſigniores, Coccineus ſive Purpureus, Minius, Citrius, Luteus ſive Heliocryſeus, Subflava Viriditas, Gramineus, Thalaſſinus, Cyaneus, Indicus & ejuſmodi Violaceus; qui ad uſque extremitatem imaginis extendebatur, ſed abſque immiſtâ rutili alicujus fulgoris tincturâ apparuit, ſi modò cubiculum factum fuerit valdè tenebroſum.

33. Obſervabam præterea, quòd coloribus hiſce juxta terminum *ab* conſpicuis, non potui ſenſibilem ſpeciei mutationem, Refractionibus utcunque repetitis, inducere. Quinetiam tentabam, ſi quo alio pacto mutare poſſem, quemadmodum reflectendo à corporibus diverſimodè coloratis. Sed in eo fruſtra fui; nam (ſuperfluâ luce quaquaverſum penitus excluſâ) ſi cæruliformes radii in aurum incidêre, illud aurum cærulei coloris evaſit: ſi flaviformes in Indicum incidêre, flaveſcebat Indicum. Et ſic in cæteris, adeoque hanc Propoſitionem ſatis ſuperque ſtabilem eſſe cenſeam.

PROP. III.

Colores Albi & nigri, cum Cinereis ſive Fuſcis intermediis, ex radiis uniuſcujuſque ſpeciei confuſè miſtis generantur.

34. Aſſertionis veritas è præcedenti Propoſitione manifeſta eſt, nam colores qui non ſunt ex primitivis (quales non reperiuntur jam recenſiti) per compoſitionem generari neceſſe eſt. At non gravabor tamen fuſius probare; idque potiſſimum, cùm lucem cui color Albus competit, ex radiis quoad qualitates colorificas æquè ac refrangibilitatem heterogeneis componi, eâque de cauſâ albere certiſſimè conſtat. Proponitur itaque jam monſtrandum eſſe,

De Radiorum ... eſſe, quòd, cùm omnes omnino Colores, quos priſmata generant, debitè commiſcentur, Albedo exinde reſultabit; deque tali miſturâ perfectè componendâ plures modos, eo quo cogitabam ordine, recenſere animus eſt.

EXPER. IX.

35. Ac primò rem aggreſſus ſum cum pluribus priſmatibus ita diſpoſitis, ut Colores eorum in eundem locum inciderent, & ſic inter ſe miſcerentur. Sint ABC, DEF ac GHI (fig. 11.) tria priſmata, juxta ſe, ſitu parallelo, ita diſpoſita, ut alterum DEF ſit alteris duobus, ABC & GHI, utrinque viciniſſimis intermedium, in morem trium linearum conficientium capitalem literam Græcam Ξ; & lux per unumquodque priſma liberè tranſiens, excipiatur in papyrum PT, pede uno vel duobus poſtpoſitam. Coloribus omnium priſmatum ſic in ipſam PT projectis, convertantur priſmata circa proprios axes, & videbis colores iſtos ſibi invicem accedere vel recedere. Quare convertantur, donec talis ſit eorum ſitus, ut unius priſmatis, ABC, Rubor, & alterius, GHI, Purpura, vel Color Indicus, cum Viriditate tertii, DEF, coincidant; ſicut vides factum ad R: & ex iſtis coloribus, ita ſibi commixtis, Albedinem generari cernes; colore Purpureo & Cæruleo juxta P conſpecto; Rubeo verò & Flavo juxta T; & Albo juxta R cæteros intercedente.

36. Cæterum in iſtis experiendis convenit obſervare ſequentia. Primò, ſi anguli priſmatum, planis refringentibus contenti, ACB, DEF & GHI, ſint inæquales; præſtat, ut illud priſma, cujus angulus GIH maximus eſt, ponatur verſus exteriorem partem anguli contenti radiis incidentibus & refractis, & iſtud verſus interiorem, cujus angulus ACB eſt minimus.

37. Secundo Aperturæ, per quas lux tranſmittitur trans priſmata, debent eſſe magnæ; imo convenit, ut tranſitus luci per tota priſmata pateat, obſtaculo nullo adhibito; neque opus eſt, ut experimentum in tenebris peragatur, ſicut in aliis quampluri- mis requiritur.

38. Tertio papyrus PT, in quam Colores incidunt, non nimis diſtare debet à priſmatibus: ſufficit diſtantia pedum plus minus duorum. Has autem aperturas & diſtantiam ſtatuo, ut colores eo

eo meliùs commiſceantur ad Albedinem perfectiorem componendam.

39. Quartò, ut colores ad R faciliùs etiam & ſatiùs commiſceantur, priſma ABC ſtatuatur in ſitu quocunque tali, ut radii, tum ingredientes, tum emergentes, Refractionem præterpropter æqualem patiantur, & in eo ſitu figatur. Et colores ejus ad diſtantiam duorum pedum excipiantur, vel ad eam potius, ubi vides Flavum ejus & Cæruleum modò contiguos, Albedine intermediâ tum evaneſcente. Poſtea figatur aliud priſma GHI in tali ſitu, ut Purpura ejus contingat Ruborem alterius ABC, non autem coincidat illi, & linea contactûs notetur. Deinde tertium priſma DEF ſic fige, ut ejus colorum medietas cadat in dictam lineam contactûs; quod ubi contingit, facilè cognoſces, intercipiendo lucem cætera priſmata ingreſſuram. Denique papyrus PT ultra citraque transferatur paululum, donec videas Albedinem perfectam in medio colorum ad R generari. Quam quidem Albedinem ex variis coloribus compoſitam eſſe conſtabit, intercipiendo colores unius duorumve priſmatum, priuſquam attingant papyrum; nam loco Albedinis, eos, quos non intercipis, colores intueberis.

40. Denique ſi velis, ut colores cujuſque priſmatis perfectiùs miſceantur, poſſis adhibere plura priſmata, modò præſto ſint; tamen eventus non deerit expectationi, ſi tria tantùm adhibeas. Etenim colores cujuſque priſmatis, ſeorſum ſpectati, non ſunt omnino ſimplices, ſed Viridis & Rubeus nonnihil miſcentur in Flavo; & Purpureus ac Viridis in Cæruleo; & ſic de reliquis, quemadmodum in ſequentibus oſtendetur: & inde fiet, quòd cùm tria tantùm Priſmata adhibentur, non ſolùm tres colores, Rubeus, Viridis & Indicus commiſceantur in R, ſed etiam Cæruleus & Flavus, unà cum omnibus eorum gradibus intermediis, iſtam Albedinis compoſitionem ingrediantur.

EXPER. X.

41. Verùm, cùm tot priſmata in ſitu tam accurato diſponere, propter motum Solis & alia incommoda, difficile forſan & laborioſum ſimul inveniatur, niſi adhibeatur machina quædam eâ de cauſâ fabricata, ut ejus ope priſmata in deſiderato ſitu figantur; alium propterea modum profero, quo iſta negotio leviori, idque

unico

De Radiorum

unico priſmate periclitari poteris. Sumatur papyrus, vel aliud opacum corpus attenuatum, in morem laminæ, & in eo confodiantur oblongæ rimæ ſex, aut plures, parallelæ, quarum latitudines ſint æquales diſtantiis, aut iis paulo majores. Deinde papyrus iſta figatur alicui ex planis lateribus priſmatis. Sit illud latus papyro obductum ACED (fig. 12.) & rimæ in papyro exciſæ litteris *l* deſignentur, quarum ſitus eſto parallelus ad EC concurſum laterum refringentium priſmatis, ſive ad verticem ejus. Papyrus autem debet toti iſti plano, ADEC, ſuperindui; nequa lux alibi tranſmiſſa quàm per prædictas rimas perturbet experimentum. Tum priſma ſtatuatur in luce Solis, ut radii ejus per dictas rimas id ingrediantur, vel, poſtquam refracti fuerint, per eas egrediantur, & in iſto ſitu figatur. Quo facto, ſumatur alia papyrus PT, quæ ſic teneatur à poſticâ parte priſmatis, ad diſtantiam trium duorumve digitorum, ut in eam lux terminetur; & videbis tot lineas colorum, quot ſunt oblongæ rimæ *l*, quarum linearum cuique tot competunt colores, quot ſolent apparere virtute priſmatum. Nempe quælibet rima ſubit officium unius è priſmatibus, experimento priori adhibitis, & proprios colores, Cæruleum, Rubrum, cæteroſque generat; quaſi tot eſſent Priſmata, quot ſunt rimæ. Porro, ſi papyrus PT longiùs differatur à priſmate, coloratas iſtas lineas paululum dilatari cernes, & interjecta ſpatia minui, donec abſorbeantur à coloribus tandem factis contiguis. Et, ſi papyrus adhuc longiùs differatur, colores à diverſis rimis effecti, Rubri cum Cæruleis primò, deinde alii cum aliis, incipient plus pluſque miſceri, & ſic ſeſe paulatim diluent; donec, cùm miſtura ſatis abſoluta eſt, convertantur in Albedinem, præterquam in eorum extremitatibus P ac T, ubi miſtura & confuſio ferè nulla eſt. Et iſthæc accidunt, cùm papyrus PT quaſi ad diſtantiam decem vel duodecim vicibus majorem ipſâ AC vel BC, latitudine planorum priſma conſtituentium, amovetur. Quòd ſi amoveatur adhuc longiùs, abſimilium radiorum commiſtio perfectior fortaſſe evadet, ſed colores Purpurei & Cærulei ad P, ac Flavi ac Rubri ad T, latiores fient, & interjectum ſpatium album minuetur, donec totum deſtruatur ab iſtis coloribus occupatum.

42. In hiſce autem experiendis cavendum eſt, ut oblonga foramina, *l*, ſint accuratè æqualia, & æqualibus diſtantiis ab invi-

cem

cem diſſita; ne luce magis copioſâ per aliquod ingreſſa quàm per cætera, colores exinde generati prævaleant cæteris, & miſturam perfectam conturbent, & ſic vice Albedinis colores apparebunt hinc illinc more fortuito ſparſi. Illa vero diſtantia rimarum *l*, ut & earundem latitudo, non malè ſtatuitur eſſe pars digiti circiter duodecima, aut eâ major fortè, ſi priſma ſatis amplum adhibeas. Quinetiam, ſi cupias, ut experimentum ſit omnibus numeris abſolutum, vice priſmatum vitreorum vulgo venalium, quæ ſunt nimis gracilia, debes amplioribus uti; qualia poſſis efficere ex laminis vitreis utrinque perpolitis, & conjunctis in morem vaſculi priſmiformis; quod vaſculum impleatur aquâ clariſſimâ, & undique cemento obturetur. Non multum refert, quænam ſit hujus latitudo; ſufficit, ut ſit trium digitorum. Sed refringentia latera debent eſſe quatuor vel ſex digitos lata, aut amplius; ut rimæ præfatæ, *l*, cum diſtantiis earum fiant majores, & plures, & magis accuratæ. Sin utaris anguſtioribus, qualia vulgo venduntur, colores externi juxta P ac T, dilatando, priùs deſtruent interjectam albedinem, quàm perficiatur per remotionem papyri PT. Et illa præterea, quæ in totum conſtant ex vitro, colore aliquo vel Viridi vel Flavo plerumque tinguntur; & radios ita tingunt in tranſitu, ut Albedinem perfectam exhibere nequeant.

Lucis Coloribus.

43. Jam verò audire videor objectionem, ex receptis Philoſophorum opinionibus depromptam. Dicat enim aliquis, quòd Colores reverâ & propriè loquendo non miſcentur, ſed deſtruuntur potius; idque eâ de cauſâ, quòd umbræ vicinia, quæ neceſſaria eſt ad productionem Colorum, tollitur, cùm radii, per diverſas rimas trajecti, commiſceri incipiunt; & propterea, quòd radiis ſic mixtis, quorum motus inter ſe diſſentiunt, neceſſe eſt, ut iſti motus deſtruant alterutros, quibus ceſſantibus Color omnis perit, & in Albedinem convertitur. Sic Carteſianus aliquis contendat fortè, quòd, cùm globuli miſcentur, quorum rotationes contrariantur ſibi; neceſſe eſt, ut impediant ſeſe, & alternos motus deſtruant. Et ſic alii objiciant alia.

44. Sed reſponſio multiplex in promptu eſt: & imprimis inquam, quòd, cùm umbræ, coloribus interjectæ, primùm evaneſcunt, removendo papyrum PT; colores tamen non ideo pereunt, neque minimum immutantur, donec incipiunt miſceri per remo-

De Radiorum

tiorem diſtantiam papyri; & Albedo non producitur, donec, per diſtantiam adhuc remotiorem, miſtura radiorum omnis generis evadat perfecta. Unde confinium Umbræ non eſt neceſſarium ad Colores producendos, neque Albedo generatur ex iſto ſublato.

45. Secundo, Colores, qui primò omnium miſcentur, nimirum Purpureus ſive Violaceus, & Rubeus, videntur maximè eſſe omnium diſſimiles, propterea quòd adverſas colorum extremitates occupent. Quamobrem itaque motus eorum contrarii non deſtruunt ſeſe, neque color albus generatur, antequam cæteri etiam colores omnes miſcentur?

46. Tertio, cuique licet obſervare, idque nullo negotio, quòd colores non omnino mutantur trajiciendo radios per Medium quantumvis luminoſum: ſic colores Priſmatum ſunt iidem, ſive trajiciantur per ſpatium illuminatum, ſive tenebris involutum; & res omnes eodem modo coloratæ cernuntur, ſive conſpiciantur, cùm lumen Solis trajiciatur per intermedium ſpatium, ſive cùm excludatur; id quod ſecus eſſet, ſi lux in lucem, per idem Medium tranſeuntem, poteſt agere. Quinimo ſi radii, duobus priſmatibus refracti, ſeſe decuſſent, poſtquam ab invicem diſcreti ſunt, eoſdem colores efficient, quos aliàs efficerent, ſi non omninò miſcerentur. Id quod non poſſet evenire, ſi radii, diverſis coloribus tincti, ſibi mutuò per eadem ſpatia tranſeuntibus mutationem aliquam inducerent.

47. Quarto, cùm in illâ diſtantiâ papyrum PT fixeris, ubi colores Albedinem optimè componunt; ſtatuatur alia papyrus YZ, ad diſtantiam duorum vel trium digitorum à priſmate, & in eâ notentur lineæ coloratæ; tum exſcindantur iſtæ partes papyri, in quas dictæ lineæ cecidêre. Factis eo pacto rimis oblongis VVVVVV parallelis & æqualibus, ut & æquè latis ac diſtantibus; deinde papyrus iſta YZ in locum ſuum reſtituatur, tres digitos circiter à priſmate diſtantem; ut per rimas ejus lux colorata trajiciatur ad alteram papyrum PT longinquiorem; quo facto poſſis obſervare, quòd ſi parùm deprimas papyrum YZ, ut Purpureos colores & Cæruleos, ſuperioribus labris rimarum ejus impingentes, intercipiat, & tranſmittat cæteros; Albedo ad papyrum PT convertitur in Rubeum colorem, aut Citrium vel Flavum: ſin attollas eam, ut Rubei & Flavi labris inferioribus intercipiantur, cæterique perlabantur,

bantur, Albedo iſta convertitur in Purpureum, Indicum & Cæruleum; perinde ut fieri oportet in mixturâ colorum: nam unis è mixturâ ſublatis, alteri debent ad propriam ſpeciem & formam reſtitui.

LUCIS COLORIBUS.

48. Quinto, papyro YZ ſublatâ, & reliquis ſtantibus, papyrum alteram PT in meditullio Albedinis acu perfora, ut lucis ejus alba portiuncula trajiciatur; quam deinceps accipe in aliam papyrum, iſti PT ad diſtantiam quatuor vel ſex digitorum poſtpoſitam, & vice Albedinis colores iterum apparebunt. At, quomodo colores ille de novo generari potuiſſent, ſi deſtruerentur in productione, potiùs quàm miſcerentur, non video. Concedendum eſt itaque, quòd tantùm miſcentur; & quòd radii, variis coloribus tincti, & promanantes à diverſis rimis *l*, *l*, decuſſant ſeſe in dicto foramine acu effecto, & poſtea divergentes ab invicem gradatim ſegregantur, & ſegregati proprios iterum colores depingunt, quemadmodum poſthac fuſiùs explicabitur. Ad eundem præterea modum, ſi Speculum aliquod planum & exiguum, K, ſtatuas in medio Albedinis, ad PT papyrum effectæ, ita quidem ut aliquos ex albificantibus radiis aliorſum, veluti ad *pt*, reflectat; lux alba ſic reflexa degenerabit in colores, quos videre eſt ad *pt* papyrum objiciendo. Etenim radii tincti cum diverſis coloribus, & in albedinem ad ſpeculum K commiſti, inclinantur ad ſe invicem; propterea quod adveniunt à diverſis fiſſuris *l*, *l*, *l*, *l*, *l*, *l*. Atqui tantum divergunt à Speculo, poſtquam reflectuntur, quantum antea convergebant. Divergentes itaque paulatim diſſocientur; ac diſſociati proprios colores non ſecus exhibebunt, quàm ſi nunquam fuiſſent commiſti. Liquet ergo, quòd in miſturâ radiorum diverſicolorum diſpoſitiones ad efficiendos varios colores non deſtruuntur, utut Albedinem exhibeant, dum commiſceantur ſibi.

49. Ad hæc, lamina K, ſi valde obliquetur ad radios in ipſam incidentes, non amplius Alba apparebit, ſed vel cum Rubeo vel Cæruleo colore imbuta, prout vel verſus verticalem angulum, vel verſus baſin priſmatis inclinatur; id quod nullo modo accideret, ſi alba lux, quâcum illuminatur, homogenea eſſet; quandoquidem alba & ſpecularia corpora reflectendo lucem, non mutant colorem ejus. Sed hoc ex eo evenire fatendum eſt, quòd in Speculum, quando incidentibus radiis admodum obliquatur, pauciores ex ob-

 liquioribus

De Radiorum

liquioribus radiis in illud incidant, inque reflexâ luce major ſit copia radiorum minus obliquorum, qui proinde prædominantur, & proprium colorem oſtendunt; quem non poſſent exerere, ſi, ad albedinem lucis incidentis producendam, non tantùm cum aliis coloribus miſcerentur, ſed reverâ tranſmutarentur in uniformem Albedinem. Cæterùm nota, quòd in iſthoc experimento faciendo, præſtat laminam non perpolitam, ſed ſuperficie nonnihil aſperâ, qualis eſt nummi argentei vel chartæ, &c. præditam adhibere.

50. Præterea vulgo notum eſt, quòd ex pulveribus diverſicoloribus, inter ſe commiſtis, novus color emergit; tamen, ſi pulveres iſti inſpiciantur Microſcopiis, omnes videntur tincti propriis coloribus. Adeo ut ex miſturâ pulverum colores proprii non deſtruantur, ſed permiſcendo tantùm color novus eliciatur. Verùm iidem planè colores ex miſturâ colorum Priſmatum ac Pulverum producuntur. Sic pulvis Cæruleus cum Flavo miſtus producit Viriditatem; & eadem Viriditas etiam producitur ex miſturâ radiorum tinctorum cum Cæruleo & Flavo: & proinde non dubium eſt, quin colores novi ex coaleſcentibus Priſmatum coloribus, non factâ aſſimilatione ſed miſturâ tantùm, ſimiliter oriantur. Cæterùm, ut nullum dubitandi locum relinquerem, effeci, ut Pulveres colorum principalium, quos Priſmata generant, Rubei, Flavi, Viridis, Cærulei & Purpurei, in proportione certâ miſcerentur; & licet Albedo perfecta non prodibat, tamen iſti colores ad ſenſum periêre, & quoddam genus Albedinis fuſcum & obſcurum, ſive mediocre inter Albedinem perfectam & Nigredinem, producebatur: quod noſtro propoſito non minus inſervit, quàm ſi Albedo perfecta prodiiſſet; quandoquidem Fuſcus ille ab Albo perfecto tantùm differt quantitate lucis, non autem ſpecie coloris; ut exinde pateat, quòd producitur ex Albo cum Nigredine contemperato. Neque expectandum eſt, ut mihi videtur, alium quàm Fuſcum colorem è tali Pulverum miſturâ generari. Nam, cùm Pulveres colorati intromittant maximam partem lucis, iſtam ferè ſolam reflectentes, quæ apta eſt ad exhibendos proprios colores, ut oſtendetur poſtea; eorum mixtura maximam quoque partem lucis intromittet. Unde pro Albedine perfectâ talis color generandus eſt, qualis efficitur ex Albedine & Nigredine mixtis,

id eſt Fuſcus. Attamen non eo inficias, quin tales fortè Pulveres inveniantur, præſertim inter Mineralia, qui tantum lucis reflectant, ut mixti exhibeant Albedinem perfectiorem, quàm hactenus vidi ex mixturis effectam. Cæterùm, quòd Pulveres coloribus tantùm quinque præcipuis tinctos miſcebam; non ideo cogitandum eſt Albedinem ex quinque ſolis productam fuiſſe, ſed ex omnigenis. Nam in omnium corporum coloribus alii latent principalibus commiſti, licet minùs fortes, ut à principali ſeparati non cernantur; ſic in Cæruleo pulvere latent Cyaneus & Indicus, aliique gradus omnes uſque ad Viridem aut Flavum fortaſſis ex unâ parte, & ad intenſum Purpureum ex alterâ; utut Cæruleus ſolus appareat, quòd ſit cæteris longè copioſior.

LUCIS COLORIBUS.

51. Experientiis hiſce admonitus in mentem præterea revocabam, quòd corpuſcula, quæ conſpiciuntur in radiis Solaribus, huc & illuc volitantia, varios colores exhibent, modò quiſquam ea diligenter obſervat in cubiculo quaquaverſum luci occluſo, præter unicum foramen per quod illuminantur; & tamen, cùm iſti pulviſculi in acervum congregantur, nullus omninò color apparet præterquam fuſcus.

52. Non minus appoſita eſt obſervatio, quòd, cùm Aqua, ſapone in eâ ſoluto, paululum inſpiſſata, & in ſpumam agitando converſa fuerit; poſtquam paululum conſtitit ſpuma, in ſingulis bullulis, ex quibus conglomeratis efformata eſt, innumeri omnis generis colores acutiùs inſpicienti apparuêre; & tamen ſpuma, ad tantam diſtantiam ſpectata, ubi colores in ſingulis bullulis ab invicem diſtingui nequibant, apparuit perfectè candida.

53. Patet itaque colores Priſmatum reverâ non deſtrui ad Albedinem producendam, ſed commiſceri tantùm; quandoquidem emergunt immutati, cùm radii coeuntes decuſſavêre, & per ſubſequentem divergentiam iterum diſſociantur; & proprios etiam colores exhibent, cùm aliqui copioſiùs quàm cæteri reflectuntur: atque ſubalbus color, è miſturâ Pulverum omnigenis coloribus præditorum, ut & Albedo perfectior, è diverſicoloribus bullulis, ſine aliquâ congredientium colorum mutatione ſimiliter emergat. Ad hæc, cùm rei dignitas poſtulare videatur, ut nullus non moveatur lapis; præter modos præcedentes componendi Albedinem lubet

lubet adhibere Tertium & Quartum deinde, quo faciliùs prædicta experiri poſſis, & magis fortè cum evidentiâ.

EXPER. XI.

54. Poſito quòd Sol illuceat obſcurato cubiculo per unicum tantum foramen F (fig. 13.) cui Priſma ABC affigitur, ingreſſam lucem refringens ad PT; juxta colores, in papyrum PT ſic projectos, teneatur alia papyrus Z, ut illuminetur à coloratâ luce, quam altera papyrus PT reflectit. Quo factó, papyrus Z, ſic illuminata radiis omnium colorum à PT confuſè reflexis apparebit alba. De hoc autem ſpecimine, maximè luculento & facili, juvabit obſervare ſequentia.

55. Primo, quòd auferendo papyrum PT, ne lucem ampliùs ad Z reflectat; è conſequente defectu lucis in Z, cognoſcas eam illuminari per ſolam lucem coloratam à PT reflexam.

56. Secundo, ſi papyrum Z ipſi PT valde vicinam teneas, ut una pars ejus magis illuminetur ab uno colore, & alia ab alio; ipſa Z non apparebit alba, ſed ejus partes ab omnibus coloribus iſtis tingentur, quibus ſunt viciniſſimæ. Sin ipſa Z ad majorem à PT diſtantiam transferatur, ut omnes ejus partes æqualiter ferè ab omnibus coloribus illuminentur, ex illâ colorum mixturâ generabitur Albedo. Pari ratione, ſi quemlibet è coloribus ad papyrum PT tendentibus intercipias, ne reflectetur ad Z; illud Z non ampliùs albeſcet, ſed evadet coloratum pro mixturâ, quam cæteri colores, in ipſam PT prolapſi, componunt.

57. Denique, quòd Albedo illa Z, non deſtruendo colores, ſed tantùm miſcendo generatur, exinde pateat, quòd colores PT cernuntur beneficio radiorum non ſecus oculo mixtim incidentium, quàm papyro Z. Itaque, ſi colores deſtruerentur potiùs, quam miſcerentur ad Z, etiam deſtruerentur ad corneam tunicam oculi, vel pupillam; ubi tamen certiſſimum eſt, quòd miſceantur tantùm, ut decuſſantes poſtea divergant ad varias partes retinæ, & ſic excitent phantaſmata propria. Quinimo ſi radii, tincti cum diverſis coloribus, dum per eadem ſpatia confuſè tranſeant, poſſent inter ſe invicem agere, & diſpoſitiones mutare, quas quilibet habent ad expingendos proprios colores; omnes omnium rerum colores conturbarentur, & ſe mutuò tranſmutarent, dum per Aera

tranſmittuntur,

Tab. II. 	Pag. 374.

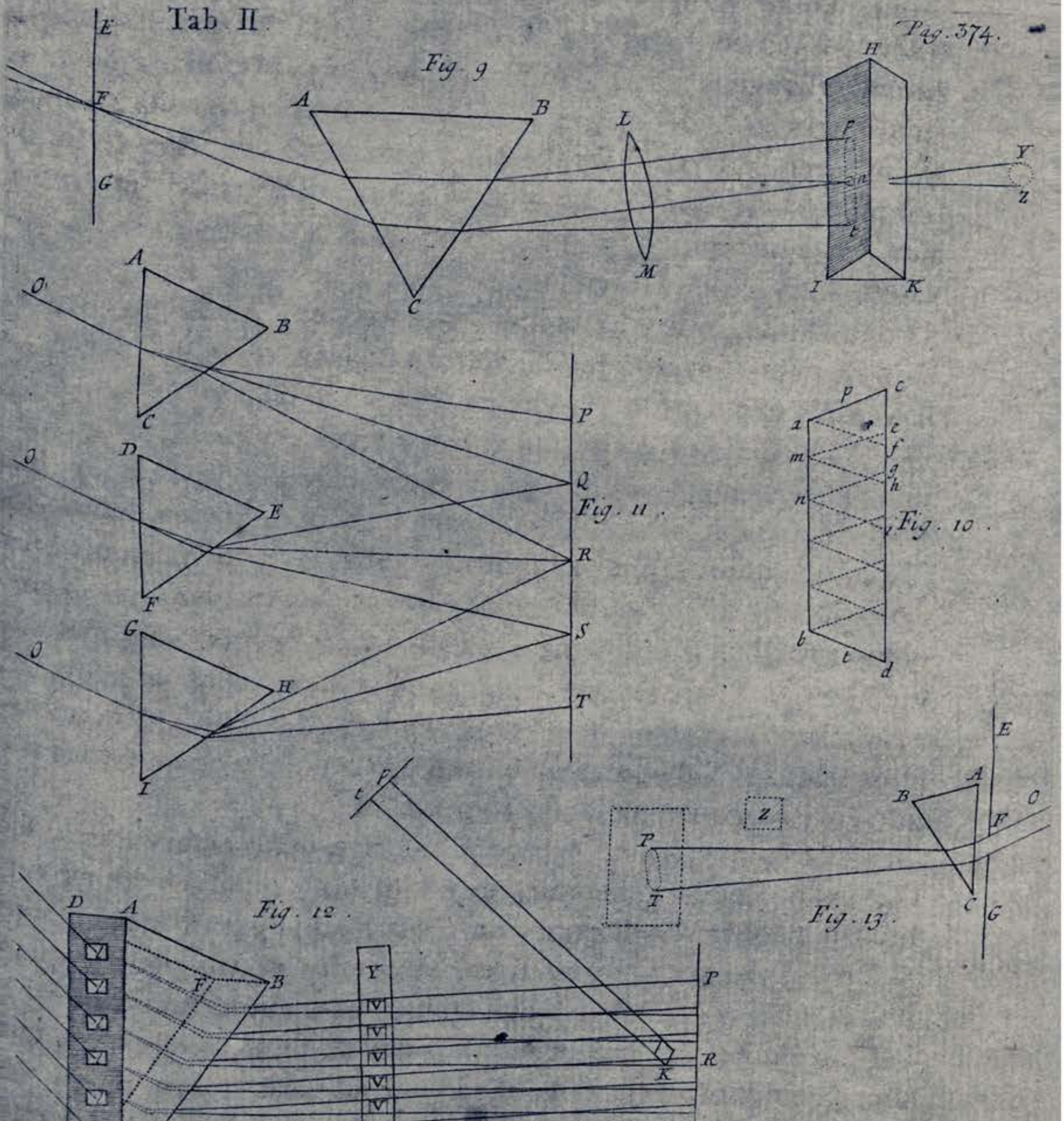


Fig. 9

Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

tranſmittuntur, ubique ſcilicet radiis aliorum corporum omnigenis coloribus tinctorum occurrentes; & ſic in coloribus viſibilium nulla eſſet certitudo, conſtantia nulla.

LUCIS COLORIBUS.

EXPER. XII.

58. Quartum præterea modum deſcripturus, quo colores in Albedinem miſceri poſſint, pono ABC (fig. 14.) eſſe priſma foras ante foramen F diſpoſitum, quod refractam lucem in obtenebratum cubiculum tranſmittit verſus MN. Tum lentem MN convexam ſume, cujus focus eſt ad diſtantiam ſemipedis, vel pedis unius duorumve, quale eſt Objectivum Vitrum Perſpicilli bipedalis, & eam ſtatue paulo plus diſtantem à foramine F, quàm focus diſtat à ſe; ita ſcilicet ut lux colorata per eam deinceps trajiciatur, ſicut videre eſt in ſchemate: ſit autem ejus latitudo, ſive Apertura tanta, ut omnes radios tranſmittat. Deinde, cùm lentem in dicto ſitu ſtabilitam feceris, ponè ſtatuatur papyrus PT, in quam radii hi refracti terminentur; eamque primò colloca proximè ad lentem, deinde ad majorem diſtantiam continuato motu transfer; & videbis colores, Purpureum P Rubeumque T, contrahi, & eouſque minui, dum omnes convertantur in Albedinem; puta ad X, quatuor vel ſex pedes, aut longiùs fortè, diſtantem à lente, pro convexitate ejus vel poſitione. Deinde, ſi papyrum adhuc longiùs transferas, colores iterum emergent, ſed in ſitu contrario; Rubeo ad τ conſpecto, & Purpureo ad π; neque ulla inter eos ad PT & $\pi\tau$ differentia intercedit, præterquam quòd ſitus ſit contrarius. Scilicet à lente MN effectum eſt, ut omnes radii venientes ab aliquot punctis foraminis F in totidem iterum punctis congregentur ad papyrum X; & ſic omnes omnium ſpecierum, tum Purpuram ad P, tum Rubedinem ad T, tum alios alibi colores efficientium, convergunt ad X; & ibi confuſè miſcentur ad Albedinem generandam: de quâ imagine albâ & orbiculari monebam ſuprà. Poſtea verò, cùm ſeſe decuſſavêre in X, radii PX tendunt ad π, & TX ad τ, adeo ut colores * expingantur ad P & π per eoſdem radios Pπ, & iidem ad T & τ per eoſdem Tτ, & ſic de aliis. Unde liquet iterum, quòd diſpoſitiones radiorum diſſimilium, ad diverſos colores producendos, non deſtruantur per eorum mixturam; quan-

* Lege *iidem colores*.

doquidem

De Radiorum

doquidem eoſdem expingunt cùm ſegregantur, quos ante mixturam expingebant.

59. Porro, ſi radios cujuſvis coloris intercipias, interponendo aliquod corpus opacum prope lentem MN, & cæteros facias miſſos; videbis non modò colores interceptos è papyris PT ac $\pi\tau$ tolli, ſed & Albedinem X deſtrui; & ejus vice colorem aliquem, qualis efficitur per mixturam radiorum præterlabentium, generari. Sic, ſi radios intercipias oſtendentes Rubeum ad N, Rubedo T ac τ tolletur, ac Albedo X convertetur in Cæruleum. Vel, ſi ſiſtas tum Rubeum ad N tum Purpureum ad M, & intermedios Flavum, Viridem, & Cæruleum præterlapſos mittas, ex eorum miſturâ Viriditas producetur ad X. Et ſic prætermittendo quos velis, & ſiſtendo alios pro arbitratu, poſſis experiri mixturas quaſlibet; & explorare, qui color indè generabitur, modò pretium laboris experientiam illam judicaveris.

60. Verum, cum experimenti hujus dignitas videatur exigere, ut ſummâ cum diligentiâ retegatur, & penitus explicetur, dum plura de coloribus ſimul complectitur & exhibet, quàm in unico tantùm experimento ſolent latere; non gravabor modum copioſiùs oſtendere, quo radii miſcentur ad X; & nonnulla poſtmodo, ſcitu non indigna, patefacere. Itaque concipiantur tales Refractiones in Priſmate fieri, ut radii incidant in varios circulos ad lentem MN, qui varios gradus Refractionis patiuntur, prout explicui in præcedentibus; ſitque PQRST (fig. 15.) oblonga imago, compoſita ex præcedentibus circulis, & in lentem projecta; quorum circulorum extremi duo ſunto PQ Purpureus, & ST Rubeus. Porro ſit $f F f$ diameter foraminis, per quod lux in lentem trajicitur; cujus foraminis punctum aliquod, ut F, primò conſideremus, à quo venientes radii dictos circulos, PQ, ST, totamque imaginem PT efformant; & præterea, cùm radii eundem quemlibet circulum efformantes ſint homogenei, ponatur, quòd lens ſit tali figurâ prædita, ut eos omnes ad eundem illum circulum, puta Rubeum ST, pertinentes, verſus punctum quoddam, Z, exactè refringat; quod fieri poſſe per lentem convexis Hyperbolis terminatam, ut & per lentes aliter formatas, Carteſius in Dioptricâ & Geometriâ edocuit. Eſt itaque Z focus radiorum FS, FT, & cæterorum uniformiter Rubeorum, & recta FZ ducta erit axis lentis. Præterea, cùm

radii

radii FP, FQ, cæterique conficientes alterum extremum circulum PQ, colorem Purpureum oſtendant, & propterea magis refringantur quàm alteri tendentes ad ST; illi ideo emergent ad punctum quoddam aliquanto propinquius quàm Z, veluti ad Y; ut ii facilè percipient, qui norunt focos lentium eſſe tanto propinquiores ſibi, quanto major eſt earum vis refractiva. Liquet itaque radios, in coloribus & refractionibus abſimilibus, ad diverſos focos convergere. Sed, cùm eadem lens pluribus focis haud queat aptari, & ideo, cùm Z ſupponatur focus in quem omnes radii ad circulum Rubeum ST pertinentes exactè conveniant, radii pertinentes ad alterum circulum, PQ, purpureum omnes in ejus focum Y exactè convenire nequeunt; attamen eorum concurſus juxta Y in axe tam proximè accuratus erit, ut quoad ſenſum & experientiam omnem habeatur pro accurato. Lucis Coloribus.

61. Quinetiam, ſi lens MN ponatur ſphæricè convexa, ut neuter focorum Y vel Z ſtrictè loquendo poſſit eſſe accuratus; tamen, quantum ad præſentia ſpectat, pro accuratis habere liceat. Itaque concipiendo, quòd radii manantes à PQ & ST convergant ad Y vel Z, & ſibi decuſſantes divergant itidem; patebit, quòd hi duo radiorum penicilli concurrent, & miſcebuntur in ſpatio focis Y & Z intermedio, veluti ad *t*, modo lentis centrum R ponatur intermedium circulis PQ & ST. Ad eundem modum radii cæterorum generum convergent in alios focos ipſis Z & Y intermedios, ac tanto propinquiores ipſi Y, quanto major eſt eorum paſſio refractiva. Sic focus viridiformium radiorum cadet in medio ſpatio, veluti ad X; radiique cæruliformes convenient citiùs inter X & Y, & flaviformes longinquius inter X & Z; ac cæteri colores intermedii in ſpatiis intermediis, eorumque penicilli ſeſe decuſſabunt ultra citraque locum *t*; ita tamen ut iſtæ decuſſationes ſint eo denſiores, quanto ſint ipſi *t* viciniores, & ut ſpatium X*t* ſit minimum, per quod omnes radii tranſeunt manantes ab eodem puncto F. Non diſſimili modo radii venientes ab alio quovis puncto foraminis, ut *f*, ſi ſint rubriformes, convergent ad *z*; ſin purpuriformes ad *y*; & ad intermedium aliquod punctum, ſi ſint intermedii generis, & eorum concurſus denſiſſimus erit in loco medio, veluti *xl*. Atque adeo ex radiis, ab integro foramine *f*F*f* manantibus, foci minimè refrangibilium jacebunt in ſuperficie

De Radiorum

$y\Upsilon y$ lenti proximâ, & foci maximè refrangibilium jacebunt in aliâ ſuperficie zZz à lente remotiſſimâ, focique mediocriter refrangibilium jacebunt in aliis intermediis ſuperficiebus. Et ſic omnes omnium radiorum foci totum ſpatium $yzzy$, à ſuperficiebus iſtis integratum, occupabunt, & in eo præcipuè penicilli decuſſabunt, & commiſcebuntur.

62. Jam ex hâc deſcriptione venit obſervandum, quòd ſi papyrus HI teneatur in medio dicti ſpatii $yzzy$, ut in eam radii terminentur, ubi eſt denſiſſimus eorum concurſus, & miſtura ad Albedinem generandam perfectiſſima; radii viridiformes, tendentes ad focos in papyro ſitos, in eam incident intra literas xx. Sed rubriformes venientes ab ST, ac tendentes ad focos in ſuperficie zZz ſitos ut dictum eſt, incident in papyrum intra literas ll, paulo vicinius ad I. Et pari modo purpuriformes incident in eundem locum ll dum tendunt à PQ ad focos ſitos in ſuperficie quâdam $y\Upsilon y$ ad lentem proximâ. Cæteri autem radii cadent in alia ſpatia inter xx & ll mediocria, ipſiſque xx tanto viciniora, quanto foci eorum minùs abſint à papyro. Liquet itaque, quòd totum ſpatium $xXtl$ non debet albeſcere, ſed pars ejus tantùm media inter literas x & l interiores ſita, ubi ſcilicet colores omnes commiſcentur. Etenim in extremitate x verſus H radii viridiformes cadunt ſoli, qui proinde tingent extremitatem iſtam cum Viriditate. Ad alteram autem extremitatem, verſus I, nulla miſcetur Viriditas, ſed Purpura tantùm cum Rubore. Qui dicta perpendet, etiam facilè concipiet, quòd, cùm papyrus paululum transferatur ultra citraque, colores alii præter Viriditatem apparebunt ad extremitatem imaginis verſus H. Sic videlicet inter P & y Purpureus apparebit extrinſecus; inter y & x, Cæruleus & Viridis ad x, deinde Flavus inter x & z, ac Rubeus denique ad z, & poſtea perpetuo. Ad adteram autem imaginis extremitatem, verſus I ſitam, Rubeus erit extimus à T uſque ad l, ubi commiſcetur Purpuræ: quæ quidem mixtura dat pallidum. At ultra l, Purpura ſemper conſpicietur. Cæterùm, cùm diſtantia inter y & z valde parva ſit, & multo magis diſtantia inter X & t ſive x & l, hoc eſt, latitudo limbi colorati; propter ſummam ejus exilitatem, conſpectui vix patebit, ſed totum ſpatium $xXtl$, niſi acrius obſervanti, apparebit album.

 63. Cum

63. Cùm hæc advertiſſem, experiebar deinde an reſponderent præconceptis; & licet malè ſucceſſit primò, dum utebar anguſtâ lente; poſtea tamen, cùm adhibui lentem eâ de cauſâ latiorem, ut angulus XY*t* ſive *xyl*, & inde *xl* ſive X*t*, hoc eſt, latitudo dicti limbi colorati fieret major; quod optabam, evenit. Adhibeatur igitur lens, cujus latitudo, ſive Apertura ſit trium digitorum aut major eo, foci autem longinquitas pro lubitu pedum trium vel quatuor; tum ea collocetur ad diſtantiam ſex vel octo pedum à foramine *f*F*f*, ut colores, PQRST, in eam prolapſi uſque ad extremitates ejus extendantur, nullis tamen præterlabentibus. Deinde papyrus HI pone collocetur, & transferatur ultra citraque, & ad extremitatem imaginis, verſus H, videbis omnes Priſmatum colores à Purpurâ ad Rubedinem uſque gradatim ſucceſſivos. Sed ad alteras imaginis partes, verſus I, inter Purpuram ad *z* & Rubedinem ad *y* conſpicuam, neque Viriditas, neque alius quiſquam ex intermediis coloribus apparebit, niſi fortè qui fiunt ex Rubeo & Purpureo mixti; quemadmodum ex eo cognoſcas, quòd, cùm intercipis extremitatem Purpuræ, ope corporis opaci juxta lentem interpoſiti, ille limbus imaginis verſus I fiet rubeus; ſin extremitas Rubedinis ad T intercipiatur, limbus idem fiet Purpureus. Et hinc eſt, quòd tranſitus à Purpurâ ad Rubedinem, ex hac parte imaginis, fiet multo celerior quàm ex alterâ verſus H, ubi colores Refractionibus abſimiles omnes interveniunt. Cæterùm, cùm dictorum colorum latitudo tam exigua ſit (ſcilicet haud major centeſimâ parte digiti, ut niſi vitra ſint benè polita, & à venis libera, & inſuper experientis diligentia & curioſitas ſolito major, fortè excidet propoſito) Quamobrem in majorem evidentiam rei & experiendi copiam, addo, quòd, ſi Microſcopium ſumas, atque ita diſponas, ut papyrum aliquam affixam laminæ, ſuper quàm Objecta collocantur contemplanda, diſtinctè amplificet; dein ita ſtatuas, ut imago lucida *xxtl* incidat in iſtam papyrum, colores in ejus limbo, ſic ampliatos, videbis ſat manifeſtos.

LUCIS COLORIBUS.

EXPER. XI.

64. Verùm, cùm miſtura radiorum, quoad colores diſſimilium, non ſit adeo perfecta in hoc ſpecimine, quin ut è coloribus aliqui in extremitate albedinis appareant (licet tam exigui, ut incautus

De Radiorum

cautus fortè non advertat); placet inſuper obſervare, quòd ſi vice lentis refractoriæ ſpeculum concavum, accuratè formatum & perpolitum, adhibeas, dicta miſtura fiet omnibus numeris perfecta. Etenim irregularitas illa, quâ refractiones ita perturbantur, in reflectionibus nulla eſt; ſed radii quoſcunque colores depingentes, & utcunque refrangibiles, ad eoſdem tamen angulos reflectuntur, in quibus incidunt. Quamobrem, ſi MN (fig. 16) ſit Speculum Ellipticum, cujus foci ſint F & X; radii omnes à puncto F manantes, cujuſcunque ſint generis, ſive Purpuram ad P, ſive Rubedinem ad T, ſive alios alibi quoſcunque colores ad Speculum exhibentes, omnes accuratè conveniunt in eodem puncto X. Quinimo, licet Speculum MN non ſit ex Ellipticâ figurâ ſegmentum, ſed è Sphæricâ, modo ſemidiameter ſphæræ, hoc eſt diſtantia ejus à focis prædictis F & X ſatis magna ſit; puta trium pluriumve pedum, & diſtantia focorum valdè parva, puta non plus quàm unius digiti: ſi hæc inquam ponantur, radii ab F manantes adeo propemodum convenient in X, ut iſtud X quoad ſenſum pro exacto foco habeatur: & eodem modo radii manantes ab aliis punctis, ut *f*, ipſi F vicinis, in aliis, ut *x*, ipſi X vicinis quàm proximè convenient. Et ſic omnes omnino colores reflectuntur à ſpeculo PT in unumquodque punctum imaginis *x*X*x*, totamque exhibebunt albam.

65. Sunt & alii modi componendi Albedinem; quemadmodum, ſi vice lentis ſpeculive, duo Priſmata, ILM & KMN (fig. 17.) in ſitu ad conſimile Priſma ABC parallelo, ad diſtantiam aliquot pedum juxta poſita adhibeantur; quæ radios in contrarias partes refringant, faciantque verſus X convergere, quos Priſma ABC divergentes effecerat. Colores ad X congregati component Albedinem, ac poſt decuſſationem ſub propriis (ut antea) formis ad $\pi\tau$ denuo apparebunt.

66. Opportuna hîc alia ſubit aſſertionis demonſtratio, quòd colores in concurſu non deſtruuntur ad Albedinem efficiendam, ſed commiſcentur tantùm: utpote rotam, dentibus undique in perimetro conſitam, ita colloca juxta duo priſmata ILM & KMN, vel juxta lentem MN in præcedenti experimento, ut è coloribus aliqui in dentem aliquem impingent, dum cæteri per intervallum inter illum & proximum dentem præterlabantur, & in chartam ad

ad præfatum colorum concurſum, x, excipiatur. Tum rotam imprimis lentè circumvolve, & videbis ſingulos colores in chartam, ſine aliquâ albedinis apparitione, ſucceſſivè procedere; poſtea, ſi rotam tam celeri motu circumagi facias, ut ſuccenturiantes colores, propter velocitatem conſecutionis, ab invicem diſtingui nequeant, tranſmigrabunt in Albedinem, eamque quoad ſenſum homogeneam; ſine aliquâ colorum apparitione, ex quibus, celerrimè ſe mutuò conſequentibus Albedo illa efficitur: & hanc Albedinem, è coloribus illis ſucceſſivè commiſtis componi per ſe manifeſtum eſt. Lucis Coloribus.

67. Quinetiam Albedo non tantùm ad locum concurſûs, x, è commiſtis coloribus componitur, ſed etiam ad foramen *f*F*f*, ubi lux modò tranſiit Priſma & colores nondum apparuêre; quandoquidem omnes radii, quibuſcunque coloribus affecti, qui ad punctum quodvis imaginis *x*X*x* convergunt, ab alio quodam puncto foraminis *f*F*f* manârunt, & ſic iidem radii ad utrumque ſpatium *f*F*f* & *x*X*x* miſcentur, & utriuſque albedinis eadem eſt compoſito.

68. At hæc clariora fient obſervando primò, quòd rei alicujus utcunque figuratæ, & applicatæ ad foramen *f*F*f*, umbra diſtinctè projicitur in papyrum radios excipientem ad X. Quinimo bullularum Aeris in priſmate latentium (ſicut vitris omnibus contingere ſolet) umbras videre licet, ad inſtar macularum in dictam papyrum projectas: id quod nullo pacto contingere potuiſſet, niſi radii manantes ab aliquot punctis ipſius *f*F*f*, in totidem punctis rurſus convenirent ad *x*X*x*. Et licet non exactè conveniant in iiſdem punctis manantes ab iiſdem, cùm lens refractaria vice ſpeculi adhibetur ut in figuris 14 & 15, & proinde colores nonnullos generent in confinio lucis & umbræ, ſicut fuſè explicui; tamen ſpatium, in quod conveniunt, tantillum eſt, ut pro puncto ſenſibili fermè habeatur.

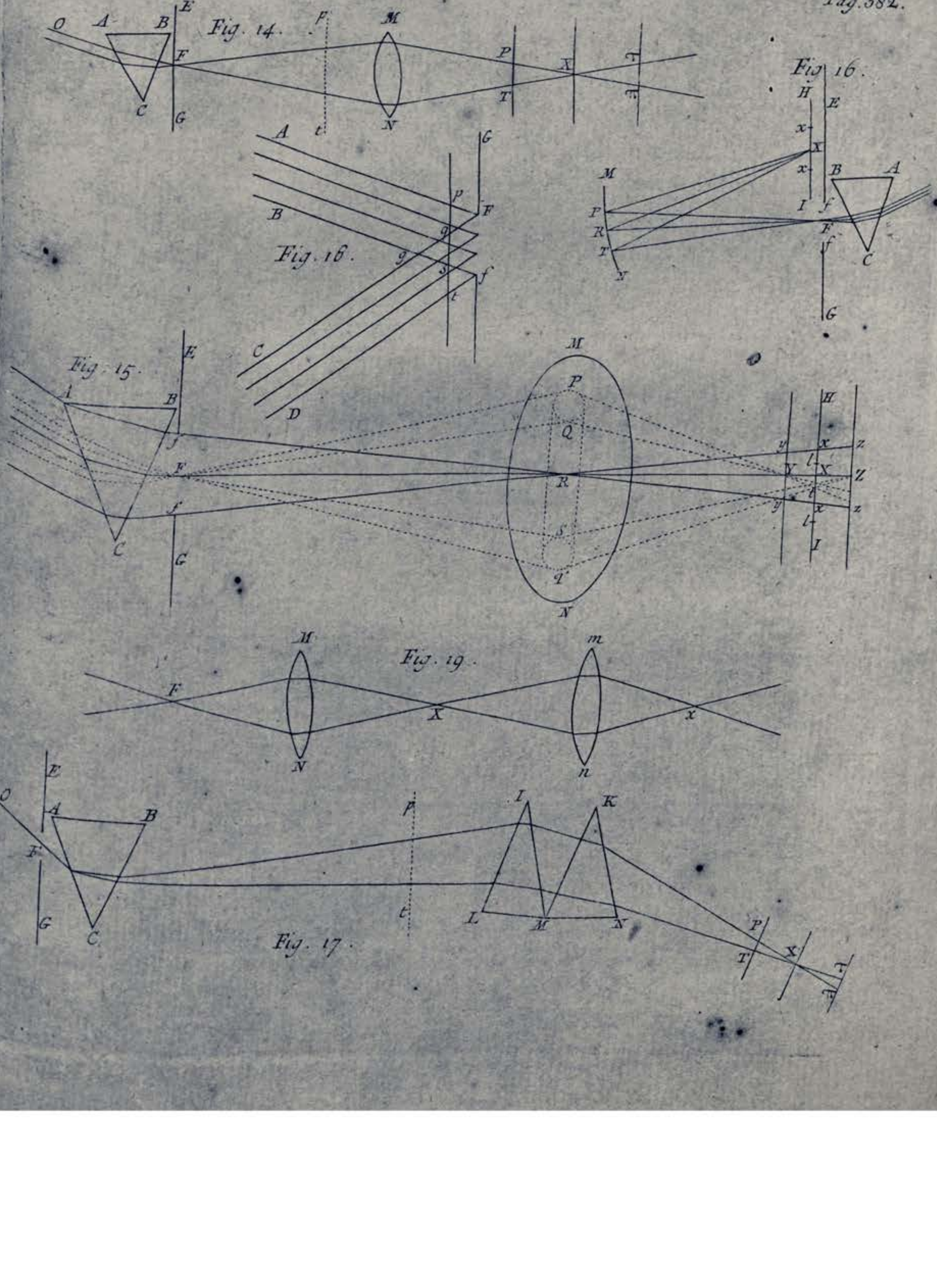
69. Secundo, ſi lentem in figurâ 14 ita ſtatuas, ut æquidiſtet à focis ejus F & X in medio poſita, ac deinde colores excipias in papyrum PT, tum ultra lentem verſus X, tum citra verſus F alternis temporibus admotam; poſſis obſervare, quòd colores eodem plane modo apparent, diminuuntur, & in Albedinem paulatim convertuntur, dum dicta papyrus motu lento & continuo transfertur ad F, atque dum transfertur ad X; adeo ut divergentia colorum

De Radiorum

rum ab F & convergentia ad X omnino ſimilis ſit. Pari ratione, ſi papyrus $\pi\tau$ lentè moveatur ad X, juxta & *pt* moveatur ad F, iidem colores conſpicientur in utrâque, & eodem modo deſinent in Albedinem; hoc tantùm excepto, quòd eorum ſitus contrariatur propter decuſſationem radiorum in X; atque adeo divergentia colorum ab utriſque, F & X, ſimilis eſt. Quid itaque concludendum eſt exinde, quàm quòd eodem modo commiſcentur, & ad F, antequam divaricaverunt ab invicem, & ad X, ubi rurſus congregantur in Albedinem? Sed, ut comparatio modò facta evadat illuſtrior, venit obſervandum porro, quòd cùm papyrus ſtatuitur ipſi F contigua, & amovetur deinde verſus *pt*, & poſtea ſtatuitur ad X, & amovetur verſus $\pi\tau$; quòd inquam Albedo ad F & X, in utroque caſu, primò degenerabit in colores ſecundum extremitates ejus, dum in meditullio manet alba; cujus rei ratio non eſt alia, quàm quòd radii divergentes perinde ſegregantur in confinio lucis & umbræ. Sic, poſito quòd radii divergant à ſpatio F*f* (fig. 18.) alii quidem paralleli tendentes ad AB, atque alii ad priores inclinati ſed inter ſe paralleli tendentes ad CD; prima ſegregatio fiet in extremitatibus juxta lineas FA & *f*D, ultimaque in medio veluti ad *g*: nam in lineâ *pt*, inter F*f* & *g* ductâ, videre eſt, quòd paralleli juxta extremitates *pq* & *st* ab invicem ſegregantur, ſed maxim tranſeunt per intermedium ſpatium *qs*.

70. Tertio, ſicut lens MN in fig. 14. refringendo radios divergentes ab F, facit ut convergant ad X & ibi conficiant Albedinem; eodem modo, ſi iſti radii, poſtquam decuſſavêre, divergentes ab X iterum trajiciantur per aliam lentem *mn* (fig. 19.) priori ſimilem, & ſimiliter poſitam inter focos ejus X & *x*, id eſt æquali ab utriſque diſtantiâ; colores, ſic ad *x* ſecundâ vice congregati, Albedinem rurſus component, ſicut antè compoſuerant ad X; hoc tantùm interpoſito diſcrimine, quòd apparebunt in limbo Albedinis ad *x* duplo latioris, quàm (è mox oſtenſis) apparent ad X, atque inſuper in ſitu contrario. At ſpeculis, ut dictum eſt, adhibitis, quæ lucem aliquoties repercutiant, iſti colores erunt nulli; atque adeo penicilli FX & X*x* evadent omnino ſimiles, & ſimilis fiet decuſſatio & commixtura radiorum ad F, X & *x*. Concludendum eſt itaque, quòd Lux, cùm modò trajicitur per Priſma, licet Albedinem exhibeat, tamen conſtat ex radiis heterogeneis confuſè mixtis,

Tab. III



mixtis, & ab invicem per divergentiam mox diſceſſuris; qui poſtquam ita ſegregantur, propriis apparent formis; ſin iterum congregantur, Albedinem rurſus componunt, & ſic præterea in infinitum.

LUCIS COLORIBUS.

EXPER. XII.

71. Imo verò Lux non ſolùm componitur ex omnium colorum radiis, ut egreditur priſmate, & nondum diſcernitur in colores iſtos; ſed etiam cùm nondum attigit Priſma, & antecedenter ad omnem refractionem: & inde non mirum eſt, quòd, cùm ſegregantur in colores, virtute priſmatis radios inæqualiter refringentis, & colores iterum commiſcentur ope lentis, aut alio quovis modo præmonſtrato; quòd inquam rurſus componunt Albedinem: neque hoc ſolùm exinde confirmatur, quòd lux è coloribus compoſita primigeniæ luci perſimilis ſit; ſed etiam ex eo, quòd radii penitus differunt Refrangibilitate, & conceptus non eſt durior, quòd differunt coloribus: imo cùm eidem refrangibilitatis gradui color idem perpetuò competat (ut Purpureus maximè refrangibilibus, Rubeus minimè refrangibilibus, & ſic porro); quid aliud ab iſtâ cognatione innuitur, quàm quòd ſint congenita, & fortaſſe quod à communi quâdam cauſâ dependent? Sed in hujus rei majorem evidentiam oſtendam præterea, quòd radiorum Solis æqualiter incidentium quædam genera reflecti poſſunt, dum alia per reflectentem ſuperficiem trajiciuntur; adeoque diverſos colores diverſis radiis, ante omnem refractionem, ineſſe. Sit ABC (fig. 20.) Priſma, quòd excipit radios, in obſcurum cubiculum per foramen F, uno digito latum, trajectos, eoſque refringit ad papyrum vel parietem, HI, iis obſiſtentem apud T: porro autem, cùm ſuperficies priſmatis BC non omnes refringat radios verſus T, ſed & plurimos reflectat; eos apud P ſiſte etiam cum aliâ papyro KL, in morem albæ imaginis, foramini F perſimili, terminante. Deinde converte Priſma circa axem ejus ſecundum ordinem literarum ABCA, & videbis tum amplitudinem colorum ad T, tum quantitatem lucis ad P augeri perpetuò; donec tandem, cùm Refractio ad planum BC ſit maximè obliqua, colores ad T incipient evaneſcere, & reflecti ad P; Purpureus primò, deinde Cæruleus, Viridis & Flavus, & denique Ruber, cujus quidem lucis acceſſu

imago

De Radiorum

imago P fiet multo lucidior quàm antea. Interea verò, dum colores ad T gradatim evaneſcunt, videbis Albedinem ad P paululum mutari, & nonnihil vergere ad Cæruleum, per acceſſum nempe Purpurei & Cærulei, qui primò reflectuntur; id quod nullo modo accidiſſe potuiſſet, niſi radiis, prout à Sole veniunt, diſcrimen ineſſe concedatur: ſcilicet quòd ex iis quidam, ad efficiendos Rubeum & Flavum diſpoſiti, pertinaciùs, & cum minore Refractione, penetrant ſuperficiem BC, & verſus T perlabuntur; dum alii, ad exhibendum Purpureum & Cæruleum parati, ſuperficiem dictam aut penetrant languidiùs, majores refractiones patientes; aut, ſi nequeant penetrare propter nimiam eorum obliquitatem, tum faciliùs & citiùs reflectuntur ad P, iis primò omnium reflexis, quorum potentia ad iſtam ſuperficiem penetrandam ſit minima; id eſt purpuriformibus & cæteris deinde ſuo ordine, prout incidentia ſit magis obliqua; donec rubriformes ultimò reflectantur, obliquitate tantâ & debilitati, ut non ſint ampliùs potentes dictæ ſuperficiei reſiſtentiam ſuperare. Atque hæc facilè conſtabunt iis, qui nórunt, quòd quo major eſt vis refractiva ſuperficiei cujuſvis, eo citiùs & ad minorem obliquitatem radii reflectuntur; & quo minor, eo magis obliqui penetrabunt.

72. De hoc autem experimento convenit obſervare, primò quòd, cùm prædicta variatio Albedinis ad P ſit admodum parva, propter exuberantiam lucis albæ collatæ ad reflexum Cæruleum, itaque cavendum eſt, ne priſmate utaris, quod ex vitro conflatur tincto cum colore aliquo; ne lucem ad P reflexam ita tingat, ut difficile ſit dictam variationem obſervare; præſtat adhibere priſma ex laminis vitreis tenuibus & perpolitis confectum, & aquâ limpidiſſimâ repletum.

73. Secundo, licet mutatio dicta ſit parva, tamen ſatis eſt ad oſtendendum, quòd radii retinent eoſdem colores cùm reflectuntur, quos exhibent, cùm trajiciuntur per ſuperficiem BC; ſiquidem tingunt Albedinem P colore ſuo, quantum liceat tam paucis tingere. Colores itaque ſuos habuêre prius, & eoſdem retinent, ſive refringantur, ſive reflectantur; licet in mixturis plerumque celati lateant, donec eruantur (non autem fiunt) virtute priſmatum.

74. Tertio,

74. Tertio, ex luce ad priorem ſpeciem Albedinis, per reflexionem omnium colorum à T, reſtitutâ, quid aliud denotatur, quàm Albedinem iſtam per miſturam omnium colorum reproduci? Scilicet, cùm Rubor ultimò reflexus admiſcetur cæteris coloribus antea reflexis, reflexorum colorum miſtura tunc perfecta eſt ad Albedinem componendam, quæ ſuperadditur albedini prius exiſtenti in P. Lucis Coloribus.

75. Quarto, ne qua oriatur ſuſpicio, quòd refractiones in ſuperficiebus AC & AB, ad ingreſſum radiorum in Priſma & egreſſum factæ, poſſint aliquid conducere ad effectus hoſce producendos; obſervare licet, quòd effectus iidem producuntur, cujuſcunque licet magnitudinis ſtatuatur angulus ABC; hoc eſt, quæcunque ſit refractio ſuperficiei AC; modò angulus ABC ponatur ejuſdem eſſe magnitudinis atque angulus ACB; aliàs enim pro imagine albâ ad P generabuntur colores. Experimentum itaque nullatenus dependet à refractionibus ſuperficierum AC & AB; imo poſſis efficere, quòd, cùm colores partim reflectuntur ad P, & partim trajiciuntur ad T, radii perpendiculariter incidant in AC, emergantque ex AB, & ſic neutrâ ſuperficie refringantur, modò ſtatuas angulum ABC, ut & ACB, eſſe grad. 40. circiter, & iidem tamen effectus producentur.

EXPER. XV.

76. Cæterùm in majorem evidentiam & explicationem modi, quo prædicta fiunt, liceat experiri per lucem in colores diſcretam, quòd Purpureus primò, & cæteri deinde (quiſque ſuo ordine) reflectuntur. Etenim (in fig. 21.) ſint ABC & *abc* duo Priſmata parallela, quorum alterum ABC projiciat colores in alterum *abc* ad diſtantiam duodecim vel plurium pedum. Tum Priſmate *abc* circa axem ejus ſecundum ordinem literarum *abca* converſo, donec tanta ſit obliquitas radiorum in ſuperficiem *bc* incidentium, ut incipiant ad *p* reflecti, non amplius potentes penetrare ad *t*; videbis omnes purpuriformes primò omnium reflecti, cæteroſque deinde ſuo ordine.

77. Veruntamen quia purpuriformes radii paulo magis refringantur in primo Priſmate, ABC, & ideo magis inclinentur ad ſuperficiem *bc* ſecundi Priſmatis, *abc*, quàm cæteri; poterit objici,

De Radiorum

quòd eâ de cauſâ primò omnium reflectuntur. Quamobrem (in fig. 22.) duo priſmata ſtatuantur non parallela ſibi invicem, ſed in ſitu tranſverſo; ut omnicolores radii quaſi ad eoſdem angulos incidant in præfatam ſuperficiem *bc*; quo poſito, poſſis obſervare, convertendo priſma *abc* circa axem ejus ſecundum ordinem literarum *abca*, quòd radii purpuriformes primò omnium reflectuntur, & ultimò rubriformes, coloribus ad *p* continuò tranſlatis, prout à *t* diſpareant.

Exper. XVI.

78. Sunt & alii præterea modi, quibus experiri liceat, quòd ex radiis ſimiliter incidentibus quædam genera penitus reflecti poſſunt, dum alia partim tranſmittantur. Quemadmodum ſi EFG (fig. 23.) ſit operculum feneſtræ ad F tenebratum, & foras ſtatuatur Priſma ABC, quod lucem Solis, foramen F ingreſſuram, intercipiat, & refringat verſus *f*; ad illud *f*, pedibus ab F duodecim aut longius poſtpoſitum, ſtatuatur opacum corpus *efg*; quod lucem ſiſtat, dempto parvo foramine *f*, per quod aliqua pars lucis, nempe Violacea, longiùs trajiciatur ad *y*. Iſtud autem *f* non ſit ſemiſſe digiti latius. Deinde præ manibus ſumatur aliud Priſma *abc*, & ad radios tranſverſè poſitum ſtatuatur, à poſticâ parte foraminis *f*, circaque axem ejus convertatur, donec videas lucem Violaceam, poſtquam ab ejus baſi *bc* obliquiſſimè refracta fuerit verſus *t*, totam à *t* diſparuiſſe modò, & ad *p* reflecti. Luce Violaceâ tam obliquè ad *p* reflexâ ut ad *t* ſtatim pervaſura eſſet, modò ex angulari motu Priſmatis, ſecundum ordinem literarum *abca* facto, angulus *cyf* vel minimum augeretur; priſma iſtud *abc* in eo ſtatu figatur. Tum alterum priſma, ABC, motu circa axem ejus nunc hâc nunc illâc parùm convertatur, ut colores, quos projicit in obſtaculum *eg*, paululum attollantur; eoque pacto omnes ſucceſſivè tranſmittantur per foramen *f* in poſterius priſma *abc*: & videbis, quòd, cùm Flavedo tranſmittitur ad *y*, illi radii non omnes ad *p* reflectentur, ſed plurimi perrumpent ſuperficiem *bc*, & ad *t* pertingent; et cùm Rubor ad *y* tranſmittitur, illi radii fortiùs a lhuc perrumpent, ut ex copiâ perrumpentis lucis & minori ejus refractione conſtet. Neque mirum videatur, quòd purpuriformes radii ſint minùs potentes penetrare ſuperficiem *bc*,

quàm

quàm rubriformes; quandoquidem Priſmatibus eodem modo diſ- poſitis antehâc oſtendi, quòd majorem refractionem patientur, po- ſito ſcilicet angulo *cyf* tanto, ut omnigeni radii poſſint ſuperficiem *bc* penetrare. Jam, cùm radii, qui citiùs & faciliùs reflectuntur in experimento ad fig. 20. tradito (P), nempe purpuriformes, eti- am citiùs & faciliùs reflectantur in experimentis duobus noviſſimè recitatis; cùm eadem iiſdem radiis ſemper eveniant, liquet quòd hoc fit non ex contingentiâ, ſed ex prædiſpoſitione radiorum; & quòd antecedenter ad omnem reflectionem aut refractionem, qui- dam ad exhibendos quoſdam colores ſunt apti, & faciliùs reflexi- biles, alii verò aliis coloribus & progrediendi viribus afficiuntur. Neque aliud experimentis jam recitatis diſcrimen intereſſe vide- tur, quàm quòd in primo radii omnium formarum, prout à Sole adveniunt, confuſè mixti incidant in priſma, quod rubriformes tranſmittit & reflectit cæruliformes: in reliquis autem duobus experimentis, diſſimiles radii priùs diſcernuntur ab invicem, quàm incidant in dictum priſma.

Lucis Coloribus.

EXPER. XVII.

79. Ad hæc lubet aliud adducere modum, quo diſſimilitudo radiorum, in luce Solis mixtorum, innoteſcat, non multo diſſimi- lem ei ad fig. 20. oſtenſo, ſed conſpectui jucundiorem & æquè ſcientificum. In fig. 24. ſunto A*a*B*b*C & B*b*D*d*C duo Priſmata, ita juxta ſe poſita & colligata, ut duo ex eorum planis CB*b* conve- niant ſibi & coincidant; excepto tantùm quod nonnihil aëris, in morem tenuiſſimæ laminæ, intercedat iis; id quod eveniet ultrò, ſiquidem haud queas priſmata tam arctè conſtringere, quin tan- tum intercedet aëris, quantum propoſito ſufficiet. Porro in ma- jorem rei evidentiam convenit, ut anguli ACB & CBD ſint æquales proximè; eò ut plana A*a*C & B*bd*D fiant parallela, licet hoc non ſit omninò neceſſarium. His præmiſſis, ſtatuantur dicta priſmata juxta foramen F; ut lux ingreſſa per ea trajiciatur verſus 7, pri- mò permeans ſuperficiem A*a*C, deinde intermediam ſuperficiem B*b*C, & inde per B*bd*D prolapſa in papyrum ad 7 collocatam, quam Albedine tingit, tanquam ſi non omnino tranſiret priſmata, ſed vitrum parallelis planis, A*a*C & B*bd*D, terminatum. Præterea, cùm intermedia ſuperficies B*b*C lucem ei incidentem non omnem

(P) Id eſt, decimo quarto.

tranſmittat ad ⅂, ſed multam reflectat, quæ aliquò exibit è priſmate ABC per ſuperficiem ejus A*a*B*b*, puta verſus ϖ: ad illud ϖ ſtatuatur alia papyrus, quæ lucem hanc ſimiliter albicantem terminet. Quod ubi feceris, converte Priſma quadrangulare (ex duobus triangularibus colligatis confectum) motu lento circa axem ejus ſecundum ordinem literarum ABDCA; tandemque videbis, quòd albedo ad ϖ ac ⅂ degenerabit in colores, Flavedine primò, deinde Rubedine ad ⅂ conſpectâ, Cæruleo autem colore ad ϖ; donec, poſt intentiſſimam Rubedinem ad ⅂, color & lux omnis evaneſcat inde, & Cæruleus ad ϖ iterum tranformetur in Albedinem aliquanto lucidiorem quàm antea. Utpote dum Priſmata circa communem axem, ut dictum eſt, convertantur, radiorum, in mediam ſuperficiem B*b*C (hoc eſt in laminam aëris priſmatibus interjectam) prolapſorum, incidentia continuò fit obliquior; donec tanta ſit eorum obliquitas, ut nequeant ampliùs penetrare dictam laminam, progredique ad ⅂, ſed abinde reflectantur ad π: quod accidet, cùm angulus F*e*C (obliquitas incidentium) ſit graduum ferè quinquaginta. Radii autem purpuriformes, minimè omnium potentes penetrare dictam laminam aëream, reflectentur primò, & Albedinem, priùs reflexam ad ϖ, nonnihil tingent eorum colore; dum ex radiis præterlabentibus ad ⅂ Flavedo imperfecta, aut potius color inter Flavum & Viridem mediocris, componitur. Poſtea Cæruleus, & Viridis deinde reflexus, paulo magis tinget lucem in ϖ cum colore Cæruleo (licet admodum diluto propter exuberantiam Albedinis commixtæ) manebitque Rubor in ⅂, qui mox, per Flavedinis, hactenus commixtæ, reflectionem, fiet intenſior, donec ipſe etiam denuo reflexus Albedinem in ϖ redintegret.

80. Cæterùm ut hoc ſpecimen evadat illuſtratius, ſumatur aliud Priſma GHI, quod à poſticâ parte priſmatum ABCD ita collocetur, ut lucem *oe*⅂, per ea tranſmiſſam, refringat verſus PT, & in colores permutet; Violaceo in P, Rubeo in T, cæteriſque in intermedia loca projectis. Tum Priſmata colligata circa communem axem (ut priùs) rotentur, donec lux alba verſus ⅂ tranſmiſſa incipiat flaveſcere; & videbis, quòd color purpureus in P ſimul evaneſcet. Id quod arguit purpuriformes radios non amplius ad

priſma GHI pertingere, ſed à ſuperficie CB*b* primò omnium ad ϖ reflecti; & lucem *e*] ideo flaveſcere, quòd Purpura è miſturâ tollitur, quâ priùs Albedinem exhibuit. Ad eundem modum, ſi priſmata ABCD diutiùs rotentur, videbis reliquos colores ad P ad T ſucceſſivè diſparere, prout lux *e*] plus pluſque rubeſcit; & cùm ſit ruberrima, tum ſolam rubedinem in] manere: quòd manifeſto convincit hanc lucem *e*] non aliunde rubeſcere, quàm quòd à radiis aliorum colorum, per ſuperficiem CB*b* reflexis, ſecernitur. Lucis Coloribus.

81. Simili ratione, ſi cum priſmate quarto, KLM, refringas radios ad ϖ reflexos, & colores eo pacto productos, & in album parietem projectos, duodecim pedes aut longius diſtantem, animadvertas; videbis, quòd, cùm lux *e*] incipit viridè flaveſcere, purpura *p*, quam priſma hoc elicit è luce *e*ϖ, pluſquam cæteri colores augebitur; per acceſſum nempe purpuræ, quæ tum in P diſparuit; cæteriſque deinde coloribus in *pt* gradatim fiet acceſſus prout à PT diſparent; donec, cùm omnis color à PT diſparuit, colores ad *pt* non ampliùs augeantur; hoc autem diſcrimine, quòd Violaceus & Cæruleus ad *pt* augmentum ſuum omne paulo citiùs obtinent, quàm Rubeus aut Flavus: ſed hoc tam exile eſt, ut obſervator, niſi ſit attentus, ægrè advertat.

EXPER. XVIII.

82. Ut iſtis denique finem imponamus, lubet alium adducere modum, quo quædam genera radiorum, luce Solis intermiſta, partim tranſmitti poſſint, dum alia reflectuntur. Nempe ſi duas laminas vitreas CB (fig. 25.) planè perpolitas, & ad invicem applicatas, ſecundum planitiem earum connectas, eaſque vaſi RQ aquæ pleno immergas, extremitate ſuperficierum juxta poſitarum undique cerâ vel pice priùs obturatâ, ut aqua non interrepat & expellat aërem, qui more laminæ tenuiſſimæ, ut dictum eſt, interjacebit vitris; ſi hæc inquam fiant, poſſis efficere dictorum vitrorum talem eſſe ſitum, ut (illucente Sole) aër interjectus cæruliformes radios reflectat verſus *p*, & tranſmittat rubriformes verſus *t*, atque alias omnes apparentias modò recenſitas exhibeat.

83. Cæterum de hiſce modis experiendi notandum venit, primò, quòd Colores hîc producuntur à parallelis ſuperficiebus, quarum aliquæ recurvant radios, quantum aliæ incurvant; atque

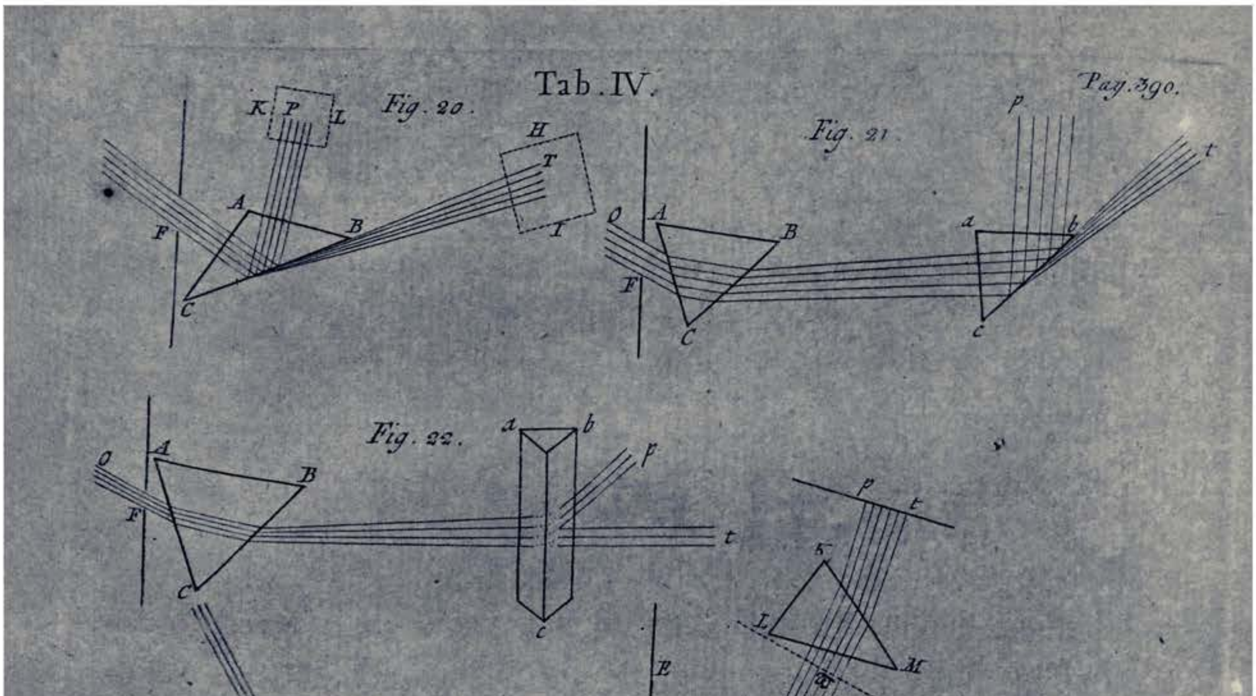
De Radiorum

adeo quæ mutuos effectus deſtruerent, ſi quos in immutandis intrinſecis diſpoſitionibus radiorum, quoad eorum colores, ut opinantur Philoſophi, producerent. Deinde quòd Lux poſtquam per iſtas ſuperficies trajiciatur, licet Alba ſit, manifeſtò tamen conſtet ex heterogeneis radiis; quandoquidem eorum aliqua genera penitus reflecti poſſunt ad *p*, dum alia ad *t* partim trajiciantur. Et eâdem ratione conſtat reflexam Albedinem ſimiliter compoſitam eſſe, ſiquidem (ut dixi) redintegrata eſt, cùm Rubor omnium ultimus reflectitur à *t*; & hæc ex eo etiamnum ſummè confirmantur, quòd à ſolâ vitrorum obliquitate, ſine aliquâ Refractionis vel Reflectionis novâ modificatione, efficiuntur.

84. Lux itaque, quamvis uniformis eſſet, quæ à Sole immediatè profluit, poſtquam tamen unquam reflexa vel refracta fuit, conſtat ex heterogeneis radiis. Et ejuſmodi eſt ea lux omnis, quæ per vitreas feneſtras trajicitur, vel quam Planetæ, Nubes, &c. ad nos reflectunt. Imo Lux omnis, à Sole aut lucernis quibuſvis derivata: ſiquidem aliqualem ſaltem refractionem ab Atmoſphærâ (ut dicunt Aſtronomi) patitur; ut taceam, quæ in Objectis, denuoque in oculi tunicis, ante viſionis actionem impreſſam, fiunt. Jam, ſi nihil aliud oſtenderam, fuiſſet aliquod prodiiſſe tenus; ſiquidem omnia Viſibilium phænomena nobis per ejuſmodi lucem exhibentur. Atqui, cùm Solis lux immediatè albere cenſeatur, & ille color non ſit ex Primitivis, ſed per miſturam generari oſtendatur; &, cùm nullum inter lucem originalem & illam, quæ à diverſicoloribus radiis componitur, ſenſibile diſcrimen intercedat; haud dubitandum eſt, quin utraque ſit ejuſdem naturæ. Imo verò certiſſimum eſt; ſiquidem (in Prop. II.) oſtenditur, quòd inhærentes diſpoſitiones, vel Formæ radiorum, quibus apti ſunt ad proprios colores exhibendos, nec deſtrui poſſunt, nec ullo modo vi ſecundariæ Refractionis mutari. Et par eſt ratio de Refractione primariâ. Concludendum eſt itaque, quòd iſtæ diſpoſitiones ſunt inſitæ radiis ab eorum origine, quamvis proprios colores, antequam heterogenei ab invicem virtute Refractionis ſecernantur, exhibere nequeant.

85. Cæterùm de eo quod dixi lucis colorem Album eſſe, & tamen Sol aliquantulum flaveſcere videtur; notandum eſt, quòd cæruliformes radii ab Atmoſphærâ præ cæteris conturbantur (ut

cæruleus


Tab. IV.
Pag. 390.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23
Fig. 24.
Fig. 25.

cæruleus ejus color innuit) & inde quòd è directis ſolaribus radiis flaviformes prævalere ſolent; & efficere, ut Sol flaveſcat, qui ſecus fortaſſe appareret albus. Et ad hunc effectum atmoſphæra circa Solem fortè conglobata poteſt etiam conducere. At non eo inficias, quin aliquod radiorum genus in originali luce ſæpiſſimè redundet, quandoquidem flammarum & ſiderum diverſi ſunt colores. LUCIS COLORIBUS.

86. De Lucis & Albedinis compoſitione hæc ſatis. Quòd autem Nigredo ex omnibus coloribus ſimiliter compoſita ſit, & in ſolo lucis defectu ab Albedine differat, ex eo manifeſtum eſt, quòd nigrorum, in radiis ſolaribus intra cubiculum (aliàs obtenebratum) intromiſſis poſitorum, termini omnigenis coloribus tincti apparent, ſi priſmate juxta oculum interpoſito inſpiciantur; quòd ſingulos priſmatis colores, ſeorſim incidentes, pari intentione reflectant, idque longè debiliori quàm alba corpora; & quòd alba defectu lucis nigreſcere videntur, ita ut corpus, quod revera album eſt, in debiliori luce nigrius apparere poſſit.

87. Denique de Cinereis cæteriſque non Primitivis coloribus Propoſitio manifeſta eſt; ſiquidem Cinereos ex Albo & Nigro, cæteroſque omnes ex Rubro, Flavo, & Cæruleo componere nórunt Pictores.

PROP. IV.

Primitivi colores per compoſitionem colorum ſibimet utrinque confinium exhiberi poſſunt.

88. Hoc variis modis (perinde ut in Albedinis compoſitione, ſiſtendo aliquos è coloribus antequam compoſitionem ingrediantur) tentari poteſt; & ipſe aliquos expertus ſum, quibus conſtitit Luteum à Croceo & ſubflavo, Porraceum à ſubflavo & Thalaſſino (vel etiam minus perfectè à Luteo & Cyaneo) & Cyaneum à Thalaſſino & Indico, alioſque omnes colores à coloribus hinc & inde conterminis componi poſſe. Quinetiam Indicus cum Rubei extremitate contemperatus purpuraſcebat; & Minius cum extremâ Purpurâ paululum conſperſus Coccineus evaſit; tanquam ſi inter colorum extremitates intercederet affinitas, qualis eſt in ſonis inter Octavæ terminos.

89. Iidem colores à coloratis Pulveribus componi poſſunt, ſed minus perfectè ut opinor; propterea quòd ipſi componentes ex aliis coloribus, quorum aliqui ſunt diſſimiliores, componuntur.

90. Cæterùm, ne nimius hîc ſim, breviter dicam, quo pacto Priſmatici Colores, in hos effectus producendos, optimè miſceri poſſunt. Nempe Priſma GDE (fig. 26.) ex pellucidiſſimis & perpolitis lamellis vitreis, in vaſculum aquæ plenum coaptatis, efficiatur; quo radiorum, in colores per divergentiam diſcretorum, duo quælibet genera, juxta diverſos angulos, D & E, ſat acutos & æquales tranſmiſſa, ad invicem verſus H cogantur.

PROP. V.

Corporum naturalium Colores è genere Radiorum derivantur, quos maximè reflectunt.

91. Hoc è præmonſtratis tantâ neceſſitate & evidentiâ conſequitur, ut ſupervacaneum eſſe videatur, me aliquid de induſtriâ hîc in probationem ejus moliri. Utpote cùm oſtenſum ſit, quòd nullius generis uniformium radiorum color, per reflectionem à corpore Phyſico mutari poſſit, ſed unumquodque colore radiorum tinctum appareret, quibuſcum illuminatur. Si corpus, cujuſcunque ſubdialis coloris, à Solis rubriformibus radiis in tenebroſo cubiculo illuminetur, rubeſcit; ſi flaviformibus illuminetur, flaveſcit; ſi viridiformibus, vireſcit; & ſic præterea.

92. Sed in hujus rei majorem evidentiam obſervandum eſt inſuper, quòd unumquodque corpus proprium colorem præ cæteris, ſeorſim incidentibus, copioſè reflectit. Sic Cinnabaris in luce Rubeâ maximè reſplendet, in Viridi minùs, & adhuc minùs in Cæruleâ. Sic Indicum in Violaceâ & Cæruleâ luce maximè reſplendet, & ſplendor ejus gradatim deminuitur, prout in Rubeam lucem per gradus intermedios continuò transfertur. Sic Porrus lucem Viridem plus quàm Rubeam aut Purpuream reflectere conſpicitur, & ſic in aliis. Et quo corpora ſub dio ſunt intenſiorum & magis ſpecificorum colorum, eo minùs in alienâ luce reſplendent.

93. Quamobrem, ut hæc faciliùs & magis cum evidentiâ pertentes, corpora ſeligere oportet intenſis coloribus, & quàm poteris maximè

maximè ſimplicibus prædita; id quod cognoſces, ſi, priſmate adhibito, ſeligas, quæ ad extremitates, nigredini conterminas, diſtinctiora apparent, & minùs variegata. Præterea colores Priſmatum, quos in hæc corpora projicis, debent eſſe ab invicem per plures refractiones optimè diſcreti. Nam, ſi colores per unici tantùm Priſmatis, juxta lucis ingreſſum poſiti, refractionem ſecernantur, non color lucis incidentis, ſed alius quidem, inter corporis, in aprico conſpecti, & lucis hujus incidentis colorem intermedius generabitur. Quemadmodum, ſi hujuſmodi lux Flava in Cæruleum corpus incidat, corpus illud non flaveſcet, ſed virebit potius: propterea quòd plures è viridiformibus radiis, in hâc flavâ luce latitantibus, quàm è flaviformibus reflectere aptum ſit; & ſic Rubeum corpus in Viridi luce flaveſcere poteſt, & in Cæruleâ luce vireſcere, ſi modò lux illa ab aliis commiſtis coloribus non bene purgetur. Et ob hanc cauſam ſummè cavendum eſt in faciendis hiſce experimentis, ut cubiculum fiat obſcuriſſimum, ne lux erratica cum Priſmatico colore commiſceatur.

Lucis Coloribus.

94. Denique, quo coloris cujuſvis, à corporibus ſub dio diverſè coloratis reflexi, quantitas innoteſcat meliùs, corpora illa in eâdem lucis quâlibet ſpecie, juxta poſita, confer; & videbis unumquodque in luce proprii coloris præ cæteris reſplendere. Sic Indicum in Cæruleâ vel Purpureâ luce plus quàm Cinnabaris reſplendet, & Minius in Rubeâ. Aut ſi fortè (propter alterutrius coloris imperfectionem & obſcuritatem) ambo æqualiter in luce Violaceâ reſplendere contingat, tum in Rubeâ luce Cinnabaris fiet longè illuſtrior, aut contrà longè debilior in luce Violaceâ, ſi æqualiter reſplendeant in Rubeâ. Cinnabaris itaque plures è rubriformibus quàm aliis quibuſlibet radiis reflectit, & proinde rubet. Indicum verò plures è cæruliformibus & purpuriformibus reflectit, & proinde fit intermedii coloris. Et ad eundem modum ſi in Albis corporibus fiat experimentum, conſtabit, quod omnigenos reflectant æqualiter, & ſic in aliis.

95. Antequam huic de coloribus phyſicorum corporum Propoſitioni finem impono, placet annotare de quibuſdam apparentiis, quantâ neceſſitate conſequuntur è noſtris principiis, quæ aliâs miræ viderentur & explicatu difficillimæ. Et imprimis, quia corpora evadunt colorata, reflectendo quædam genera radiorum

De Radiorum

& intromittendo cætera, ſi aliquatenus tranſpareant; concludendum eſſe videtur, quòd colores maximè tranſmittantur, qui minimè reflectuntur, & inde quòd alius ſit eorum color cùm tranſpiciuntur, atque alius cùm cernantur luce reflexâ. Et hoc quàm bene convenit cum experientiâ, videre eſt in Libro Boylei de Coloribus conſcripto. Scilicet infuſio ligni Nephritici, quando diverſâ luce tranſpicitur, Rubea vel Flava appareat, & Cærulea cùm cernitur ad plagas lucis incidentis. E contra verò Aurum Foliatum apparet Flavum, & tranſparet Cæruleum. Sic vitri fragmenta, per totam profunditatem colorata, qualia in antiquis templorum feneſtris reperiuntur, varios plerumque colores pro poſitione ſpectatoris exhibent. Et craſſiorum laminarum vitri pellucidiſſimi (qualia ad fabricanda Teleſcopia adhibentur) cùm obverſas oras aſpexi, Cæruleum vidi reflexum; & Flavum tranſmiſſum, cùm perſpexi: Cæruleus autem maximè apparuit, cùm illuſtrabatur jubare in obſcuratum cubiculum immiſſo, & à lente concavâ diſtracto, ne nimiâ luce color perfunderetur. Neque ullus dubito, quin plurima exiſtant hujus rei exempla, ſi quis operæ pretium duxerit in variis liquoribus, aliiſque corporibus tranſparenter coloratis, examen inſtituere; interea cavendo, ne lux è pluribus plagis ſimul incidat.

96. Quòd autem iſthoc non ſemper eveniat (quemadmodum in eâdem infuſione ligni Nephritici, cùm Cæruleus color ſalibus acidis deſtruitur, & in aliis pleriſque, quæ undique ſunt ejuſdem coloris) ratio eſt, quòd corporibus non ſolum inſit poteſtas reflectendi vel tranſmittendi radios, ſed etiam ſuffocandi, & in ſe terminandi. Sic aliqua obſtruunt & retinent omnigenos radios, eoque pacto fiunt undique nigra; alia reflectunt quoſdam, cæteroſque ſupprimunt, ut opaca colorata; alia quoſdam ſupprimunt, cæteroſque partim reflectunt & partim tranſmittunt, ut tranſparenter colorata, quæ circumcirca ejuſdem ſunt coloris; & alia quoſdam reflectunt, cæteroſque tranſmittunt, ut in exemplis jam allatis conſtitit. Atque ita præterea.

97. Porro, quòd Liquoris colorati varia craſſities aliquando ſpeciem Coloris variare poteſt, cum noſtris principiis quàm optimè conſentit. Sic infuſio ligni Nephritici pro variâ ejus craſſitie, vel Flavum vel Rubeum colorem referre poteſt. Cujus rei rationem

nem ut intelligas, concipe, quòd liquor ille ſit aptiſſimus ad re- flectendum purpuriformes & cæruliformes radios; ineptiſſimus, ad reflectendum rubriformes; & mediocriter aptus ad reflectendum mediocres: & (in fig. 27.) poſito ABC vitro coniformi hujus infuſionis pleno, ſit FI craſſities ejus, cum Aureo colore ſplendentis; EH major craſſities, ubi incipit rubeſcere; ac DG craſſities, ubi ſit intenſioris & ſubobſcuri ruboris. Et, cùm cæruliformes & purpuriformes radii citiſſimè reflectantur, ut ex eo patet, quòd unius tantùm guttulæ craſſities ad eos colores reflectendos, & ſpectantibus, exhibendos ſufficit: ex illis pauciſſimi penetrabunt ad profunditatem FI; ſed plurimi viridiformes, & adhuc plures flaviformes unà cum rubriformibus trajicientur, ex quâ miſturâ fiet iſte color Aureus. At per profunditatem EH pauci è flaviformibus tranſibunt, & pauciores è viridiformibus; ac ſoli ferè rubriformes ad uſque profunditatem DG pervadere valebunt; quinimo ex illis etiam complures in itinere reflectentur, & inde rubor trajectus ſubobſcurus evadet.

Lucis Coloribus.

98. Ad eundem ferè modum, cùm Lux per plura corpora, diverſis coloribus pellucidè tincta, trajicitur, color ille ex adverſo videbitur, qui facillimè pertranſit omnia. Quòd ſi nullus poteſt omnia pertranſire, utcunque ſeorſim pellucida exiſtunt, conjunctim tamen evadent maximè opaca. Quemadmodum, ſi lamina AB tranſmittat ſolos rubriformes, & CD ſolos cæruliformes, cùm juxtà ponuntur, tranſmittent nullos. Cujus quidem rei exemplum habes in Micrographiâ Hookii de Cæruleo & Rubeo liquore, qui ſeorſim apparuêre, & conjunctim fuêre opaci.

99. Denique huc referri poteſt, quòd, cùm aliquis è coloribus Priſmaticis per corpus tranſparenter coloratum trajicitur, intermedius color emergit. Sic Viriditate v. g. in vitrum tranſparenter Rubeum incidente, flaviformes radii, qui in illâ Viriditate commiſti latent, præ cæteris vitrum fortaſſe pervadent; efficientque, ut lux emergens flaveſcat.

Sed videor officii limites exceſſiſſe, in campum Phyſicum nimis expatiatus. Viſum quidem fuerit hæc attigiſſe, ut univerſa rerum conſenſio pateret; ſed ſiſto gradum, ac tandem, coronidis loco Inſtrumentum quoddam haud inelegans deſcribam, quo præfata omnia ſummâ cum evidentiâ tentari poſſunt.

De Radiorum

100. Sit ABC*abc* (fig. 28.) Priſma, quòd radios, per foramen F in obſcuratum cubiculum tranſmiſſos, refringat verſus lentem MN, ut colores, quos efficit in *p*, *q*, *r*, *s*, *t* per lentem deinde tranjiciantur ad X, & ibidem commiſceantur in Albedinem componendam, ſicut in præcedentibus oſtendi. Deinde aliud Priſma, DEG*ged*, priori parallelum ad locum X, ubi Albedo redintegrata eſt, ſtatuatur; quod lucem verſus Y refringat. Hujus autem priſmatis verticalis angulus, G*g*, ſit æqualis angulo verticali, C*c*, priſmatis anterioris, aut eo fortè minor, & ſimiliter poſitus; ut incidentes radios in parallelìſmum reducat, quos priſma anterius diſperſit.

101. His poſitis, obſervabis an lux Y (pedes aliquot diſtans trajecta) æquè alba maneat ac fuerit in X; vel ſenſim abeat in colores. Si penitus appareat Alba, tunc priſmata cum lente rectè diſpoſuiſti; ſin aliqui colores ad Y cernantur, priſma DEG circa ſuum axem eo modo parùm converti debet, ut colores minuantur; &, cùm penitus evanuêre, & lux in totum albeſcit, ſiſte Priſma. Quòd ſi nequeas hoc modo efficere, quin lux, inter tranſeundum ab X ad Y, ex aliquâ ſuâ parte tranſmigret in colores; lentem MN paulo longiùs à priſmate ABC transfer, & loco X rurſus invento, ubi Colores in Albedinem accuratiſſimè convergunt, in eo ſtatue priſma DEF ut priùs; & rurſus experire, an poſſis lucem ſine coloribus ad Y projicere; & cùm eo uſque mutaveris poſitiones priſmatum & lentis, dum effeceris lucem ad Y trajectam, quàm minimè poſſis coloratam, priſmata cum lente in eo ſitu figantur; idque vel ope trabis, ut in ſchemate deſcribitur, vel tubi aut inſtrumenti cujuſvis in eum finem fabricati.

102. Cùm habeas hanc machinam è priſmatibus & lente, ut dictum eſt, compoſitam, ope lucis per eam tranſmiſſæ cuncta poſſis experiri, quæ hactenus fuerunt tradita. Hæc enim lux XY jubari à Sole directo perſimilis eſt, & eaſdem omnes apparentias exhibet, ac ſi à foramine F rectâ promanâſſet, nullum omnino refractionem paſſa; adeoque ejuſdem eſſe conſtitutionis facilè credamus. Et tamen, cùm in ſua principia componentia, hoc eſt in radios diverſorum generum, apud lentem MN diſcreta fuerit, facilè erit modos examini ſubjicere, quibus poſthac in colores converti poteſt, idque tantùm ſiſtendo hoc vel illud radiorum genus apud

apud MN, ut conſtitutio lucis XY, quoad ejus converſionem in colores, pateat. LUCIS COLORIBUS.

103. Quemadmodum, ſi deſideretur, ut ſenſui planiſſimè pateat, quòd Priſma convertit lucem in colores, non tranſmutando proprietates ejus intrinſecas, ſed ſegregando tantùm radios, ad excitandum varia colorum phantaſmata diſpoſitos, ex quibus lux omnis albens conſtituitur. Nihil aliud agendum eſt, quàm ut priſma aliquod HIK ita ſtatuatur, ut lucem XY excipiat, & refringendo tranſmutet in colores P, Q, R, S, T in papyrum aliquam procidentes. Deinde, ſi colorem quemlibet apud lentem MN interpoſito obſtaculo ſiſtas, videbis eundem colorem à papyro LV deficere. Sic Purpuram *p* obſtruendo, diſparebit Purpura P, cæteris coloribus non omninò mutatis; (dempto fortè Cæruleo, quatenus aliquid Purpuræ commixtum habeat). Sic Viridem *r* intercipiendo, Viridis R evaneſcit, & ſic de aliis. Atque ita videre eſt, quòd iidem colores apud papyrum LV & apud lentem MN pertinent ad eoſdem radios; iiſque non communicantur à Refractione priſmatis HIK, ſiquidem præexiſtebant ſegregati quidem ad lentem MN, & congregati in luce XY.

104. Ad eundem modum, ſi cupias experimenta penitus rimari, quibus aliqua genera radiorum omninò reflecti poſſint, dum alia, licet ſimiliter incidentia, partim tranſmittantur: priſma HIK circa axem ejus converte, donec altera pars colorum (Violacea nempe & Cærulea) poſtquam obliquiſſimè refracta fuerit verſus LV, abinde penitus diſpareat verſus π deflexa; parte tamen alterâ ad LV pervadente. Deinde, ſi dimidium colorum, rubedinem verſus, intercipias ad MN, Rubor & Flavus diſparebunt ad LV, & lux ad π reflexa fiet admodum Cærulea. Sin alterum dimidium, Purpuram verſus, intercipias; Rubor apud LV non mutabitur, ſed lux in π, propter ablatum Purpureum & Cæruleum, flaveſcet aut rubeſcet. Id quod indicat purpuriformia & cæruliformia radiorum genera penitus ad π reflecti, dum cætera partim refranguntur ad LV. Præterea, ſi corpus aliquod coloratum, v. g. Cinnabaris, hâc luce XY illuminetur, ſub proprio colore perinde apparebit, quaſi in luce ſubdiali conſtitutum aſpiceres. Quòd ſi cæruliformes & viridiformes radios, juxta lentem prælapſuros, intercipias, Rubor ejus intendetur: at cùm rubriformes radios intercipis, Cinnabaris

De Radiorum Lucis Coloribus.

nabaris non amplius rubebit, ſed Flavedinem aut Viriditatem, aliumve quemvis colorem, pro ſpecie radiorum, quos prætermittis, induet. Nec ſecus alia Colorum phænomena, quæ priſmata ab immediatâ Solis luce eliciunt, ope lucis hujus XY poteris experiri, & intercipiendo quodvis radiorum genus apud MN, eorum cauſas intueri.

105. Si quis autem velit Inſtrumentum, quale jam deſcripſimus, ad experimenta hujuſmodi inſtituenda conficere, lentem adhibeat latam tres digitos & ampliùs; quæ radios parallelos ad focum duos pedes circiter diſtantem congregat: atque ita priſmata diſtabunt octo pedibus, & conficient inſtrumentum ſatis magnum, quo omnia ſtrictius examini ſubjiciantur. Quod ad poſitionem lentis attinet, ſi Priſmatum anguli verticales, ACB & DGE, ſunt æquales, puta 60 vel 70 graduum, ipſa æqualiter ab utriſque diſtabit. Sin alter angulus ſit major altero, lens illi priſmati vicinior collocetur, cujus angulus verticalis, exiſtit major. Et nota, quòd jubar XY per ſpatium eo latius diffunditur, quo lens ſtatuitur anteriori priſmati ABC vicinior. Atque adeo, ſiquando opus ſit amplo jubare, debes tantùm efficere, ut lens ſit aliquanto vicinior anteriori priſmati quàm poſteriori; & adhibere priſma poſterius, cujus angulus verticalis ſit tanto ferè minor quàm angulus verticalis anterioris. Denique, ſi velis, ut colores, in lentem illam procidentes, ſint magis directi & ab invicem diſtracti, quàm more jam deſcripto contingat, eâ nempe de cauſâ, ut ſingula radiorum genera pro lubitu diſtinctiùs, ſive magis ſejunctim, intercipiantur, id quod in experimentis nonnullis neceſſarium duco: nihil aliud agendum eſt, quàm ut Lux per duo parva foramina F & *f*, ab invicem longe diſtantia, priùs trajiciatur, quàm incidat in Priſmata: vel ut alia lens non procul ab interiori priſmate collocetur, quæ apta ſit, ut lucem, à longinquo foramine F divergentem, congregat ad alteram ſubſequentem lentem MN. Cæterùm hoc inſtrumentum ſic rectè diſponere invenio moleſtiſſimum eſſe, ut & effectus ejus haud ita diſtinctos & ſenſui patentes ac in præcedentibus; ubi per pauciores refractiones & majora vitrorum intervalla oſtendebantur. Et ea propter auditores imprimis illa ſimpliciora & faciliora experimenta examini conſultiùs ſubjicient.

SECTIO

SECTIO SECUNDA.

De variis Colorum Phænomenis.

De Varіis Colorum Phænomenis.

De Phænomenis Lucis per Priſma ad Parietem trajectæ.

106. Hucuſque fundamenta ſtruxi, quibus Colorum, quocunque modo effectorum, phænomena explicari poſſunt; effectuum verò, quos ſuprà minùs attigi, jam cauſas particulares & immediatas, non Geometrarum, quibus ſcio ſupervacaneum videatur, ſed aliorum gratiâ ſigillatim deſcribam. Malo enim hîc aliqua, quæ pleriſque ſuperflua fortaſſe videbuntur, interſerere, quàm quicquam alicujus momenti omittere, quod incautis, & prejudicio laborantibus, difficultatem ſubminiſtrare poſſit.

Et imprimis circa Priſmatis vulgo notos effectus, quorum cauſam abundè ſatis retexi, circumſtantiæ nonnullæ ſuperſunt explicandæ: utpote cur Primitivi Colores non omnes eliciuntur, cùm lux (cujus radios, ab origine heterogeneos, Priſma per inæquales refractiones diſpergit) non tranſit per anguſtum foramen, ſicut paſſim in præcedentibus ſuppoſui, ſed ex unicâ tantùm parte limitatur. Verbi gratiâ, ſi corpus aliquod opacum FG (fig. 29.) Soli interponatur & Priſmati, juxta baſem ejus AB, quòd umbram projiceat in MP, colores efficiat in ſpatio PT, & lucem permittat in ipſum NT influere: in PT, confinio Lucis & Umbræ, nulli colores generabuntur præter Purpureum & Cæruleum cum variis eorum gradibus. Et ratio eſt, quòd ex radiis omnium formarum, qui tranſeunt per extremitatem dicti corporis opaci FG, ſoli purpuriformes propter maximam eorum refractionem poſſunt ad P uſque deflecti, unde color Purpureus ibi conſpicitur. Deinde cæruliformes, cùm paulo minùs refrangibiles exiſtant, incident in totum ſpatium NQ, non potentes ulterius verſus M deflecti quàm ad Q. Atque ita duæ radiorum ſpecies eæque ſolæ incident in Q, & colorem ex Purpureo & Cæruleo compoſitum exhibebunt. Præterea viridiformes, minùs adhuc refrangibiles, in ſpatio NR non ultra extendentur quàm ad R. Flaviformes autem terminabuntur in S. Quare tres tantùm ſpecies colorum miſcebuntur ad R, & color ex iis omnibus, nempe ex Purpureo, Cæruleo & Viridi, generabitur.

De Variis

nerabitur. At cùm Purpureus & Viridis commixti producant Cæruleum (ut facile eſt ex ante dictis experiri) liquet colorem ad R non fore alium quàm Cæruleum. Denique, cùm radii rubriformes minimè omnium refringantur, ut in ſpatium NT incidentes non magis deflectantur verſus N quàm ad T; liquet quòd in dicto ſpatio NT fiet miſtura colorum omnium, & proinde albeſcet; ſed in ipſo S (ubi color omnis dempto rubeo miſcetur) Cæruleus ad Viriditatem nonnihil vergens apparebit, ſed maximè dilutus, propterea quòd ſolus Rubor ex Albedinis compoſitione deſit.

107. Porro, ſi corpus opacum, *fg*, Soli interponatur & Priſmati, juxta verticem ejus C, ſicut videre eſt in ſchemate 30: inter obſcuratum ſpatium, NT, & lucidum PM, cernes alios duos colores, Rubeum in T & Flavum in R, idque propter jam dictas rationes. Quippe radii, prout apti ſunt ad hos ordine colores, Rubeum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generandos, intenduntur per ſpatia MT, MS, MR, MQ & MP; cùm Soli rubriformes extenduntur uſque ad T, cæteris propter majorem refractionem citiùs terminatis, neceſſe eſt, ut iſte color in T ſit Rubeus. Item, cùm tria radiorum genera in R incidant, color ex iſtis, nempe Rubeo, Flavo & Viridi, compoſitus ibidem cernetur. Rubeus autem & Viridis Flavum conſtituunt, atque adeo Flavus apparebit in R. Præterea, cùm omnium formarum radii miſceantur in P, & poſtea perpetuò verſus M, ſpatium illud PM apparebit Album. Nec ſecus conſtat, quòd citreus in S, & in Q Flavus ad viriditatem vergens, apparebit; ſed adeo dilutus tamen & Cæruleo redundans, ut nomen Viriditatis non mereatur.

108. Tertio, ſi opaca duo corpora GF & *gf* (fig. 31.) Soli & Priſmati interponantur, ut radii inter utrumque, quaſi per oblongam rimam priſmati parallelam, tranſeant, atque diſtantia F*f* ſit ſatis magna, pro utroque termino F & *f* generabuntur colores; Purpureus nempe ad P, & Cæruleus ad R, per terminum F; atque Flavus ad *r*, & Rubeus ad *t*, per terminum *f*; ſicut modò explicatum fuit: eritque T*p* ſpatium album utriſque coloribus interjectum. Jam, ſi obſtacula GF & *gf* ad ſe invicem paululum admoveantur, ut intermedium ſpatium F*f* evadat anguſtius, iſto pacto ſpatium album quoque T*p* fiet anguſtius, donec tandem evaneſcat & colores utrinque coeant. Si ſpatium F*f* magis adhuc

coarctetur,

coarctetur, Viriditas in medio colorum emerget vice Albedinis, quæ jam evanuit, quæ quidem Viriditas non antea apparuit, propter commiſturam radiorum heterogeneorum, quibus involuta latuit; jam verò heterogeneis iſtis per obſtacula duo, ſibi propiùs admota, alternè interceptis, Viriditas ea paulatim detegitur, patet, & evadit perfectior; donec, cùm dictum F*f* ſatis anguſtum eſt, ab omni ferè miſturâ liberatur & eruitur, propriâque ſpecie non minùs quàm cæteri colores elucet. Et hinc in tranſitu colligitur, quòd Viriditas inter colores medietatem exactè obtinet, non magis ad Rubeum vergens quàm ad Violaceum, neque ad Flavum quàm Cæruleum; hoc eſt, in ſpecie coloris, & reſpectu multitudinis radiorum, ad colores utrinque pertinentium. Nam in gradu refrangibilitatis minùs differt à parte Rubeâ Flavâque, & in aliâ quâdam proprietate (cui jam explicandæ non eſt locus) minus differt à parte Purpureâ & Cæruleâ. COLORUM PHÆNOMENIS.

109. Præterea, cùm Albedo T*p* propter anguſtiam pervii ſpatii F*f* incipit evaneſcere, colores etiam contractiores paulatim apparebunt; ita ut, cùm iſtud F*f* fit valdè anguſtum, Flavus ad Rubeum & Cæruleus ad Violaceum quaſi duplo vicinior evadat, quàm cùm amplitudo ejus permiſit Albedinem in medio colorum produci, & ut quinque colores (Viriditate jam internatâ) non occupent plus ſpatii quàm eorum duo priùs occupavêre. Cujus rei ratio ex ſchematum inſpectione patebit animadvertenti, quòd Flavus ad *r*, & Cæruleus ad R, ex heterogeneis radiis compoſitus, mutatur in ferè uniformem Flavum ad loca S & *s* incidentem, & in ferè uniformem Cæruleum ad loca Q & *q* ſimiliter incidentem, heterogeneis radiis è miſturâ per anguſtiam ſpatii F*f* magnâ ex parte ſublatis.

110. Quarto, ſi Lux terminetur obſtaculo G*g*, cujus extremitas perpendiculariter tranſverſa eſt ad longitudinem priſmatis, Colores omnino nulli virtute termini illius generabuntur. Etenim ponamus parallelos radios, OF & O*f*, cæteroſque (fig. 32.) juxta extremitatem dictam G*g* in Priſma ABC prolapſos, ibidemque refractos eſſe ad PT & *pt*, atque MN eſſe umbram ipſius G*g*. Jam licet radii purpuriformes, FP & *fp*, magis refringantur quàm rubriformes, FT & *ft*; tamen iſtâ refractione ſecundum terminum umbræ factâ, ita ut ex dictis radiis multi magis deflectant verſus

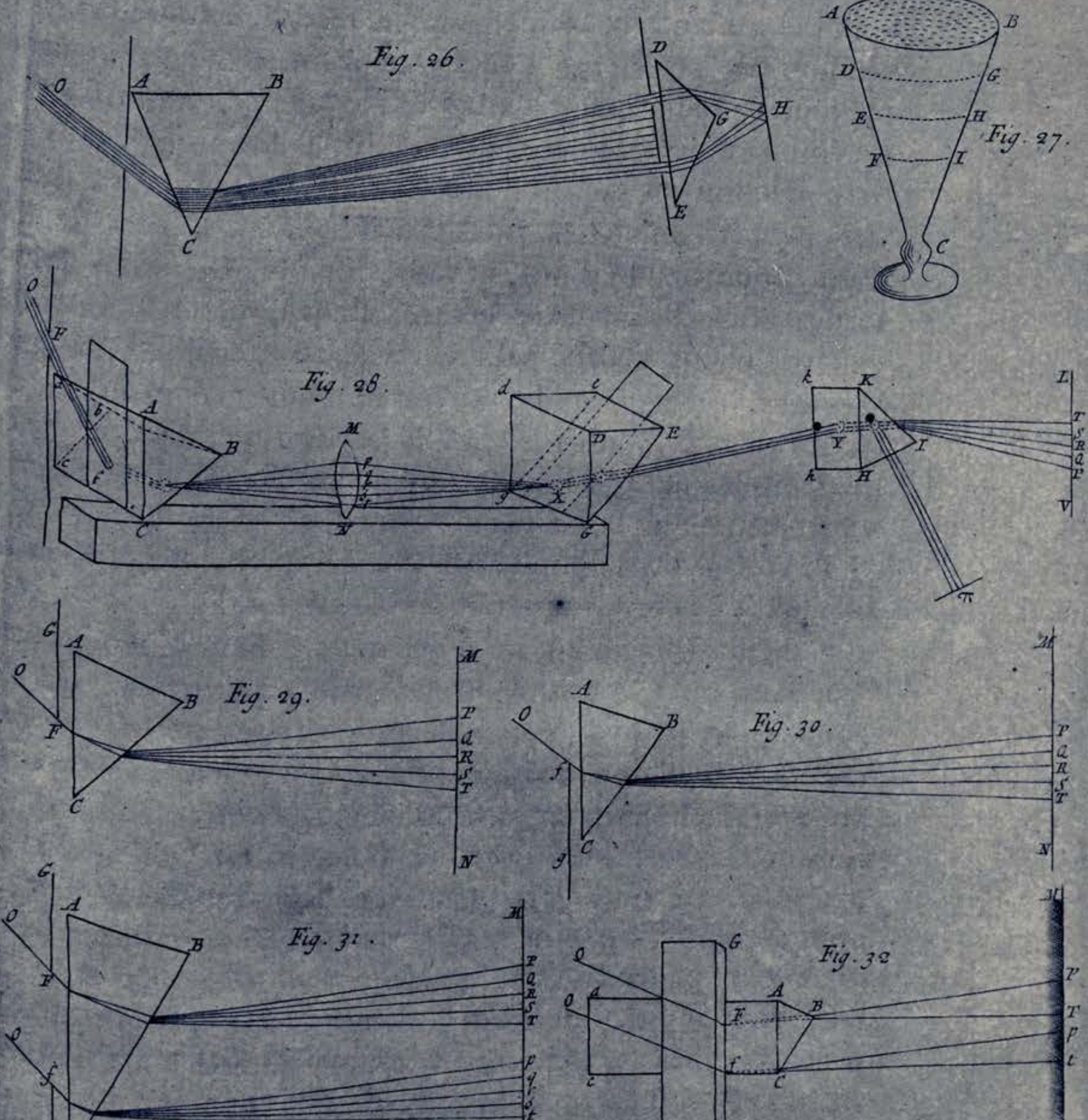
De Variis

umbram quàm cæteri; palam eſt, quòd ubicunque purpuriformes incidunt, rubriformes etiam incident in eundem locum, & è contrà. Quod idem de radiis intermediis pari modo concipiatur. Et ſic radiis omnium ſpecierum ubique per extremitatem umbræ commixtis, umbra benè definietur ſine aliquo colore (præter Album vel Fuſcum ex luce & umbrâ mixtis) conſpecto. Sed cavendum eſt, ne colores, per limites priſmatis A*a* vel C*c* generati, habeantur pro generatis à limite G*g*. Quamobrem priſmata, quæ ex vitro in totum fiunt, ad examen hujus & proximè præcedentis commodè inſtituendum, nimis ſunt exigua; propterea quòd Colores per extremitatem verticis & baſis producti, interjectum ſpatium album haud relinquent ſatis amplum, in quo generatio colorum prædictis modis probetur. Itaque, ut priſma conficiatur ex vitris planis & benè politis, qualia ad Specula conſpicienda adhibentur, moneo; quibus in morem cunei connexis, & in vaſculum dein priſmiforme completis, ut ſuprà dictum, vaſculum iſtud impleatur aquâ limpidiſſimâ, & occludatur; & ſic priſmata ad arbitrium ampla conficias.

111. Quinto, ut omnia jam uno comprehendam ſpecimine, ſit G*g* (fig. 33.) corpus opacum orbiculari foramine, F*f*, unum duoſve digitos lato, pertuſum; per quod Lux in Priſma trajiciatur: ubi, cùm refracta fuerit, projicitur in papyrum, vel quodvis album corpus MN, quaſi ſemiſſe pedis à priſmate poſtpoſitum: & videbis illuminatum ſpatium, PYTZ, rotundum ad modum foraminis F*f*; album in ejus medietate; & duobus ſemilunulis colorum terminatum, Purpureo & Cæruleo ad P, Flavo autem & Rubeo ad T; qui colores paulatim deficiunt verſus Y & Z, ubi nulli omninò conſpiciuntur. Præterea, ſi papyrum ad majorem diſtantiam paulatim diſtuleris, velut ad *mn*; videbis colores diſtendi & augeri, & intermediam Albedinem uſque comminui, dum prorſus evaneſcat; totumque ſpatium coloribus Rubeo, Flavo, Cæruleo & Purpureo tinctum appareat; & papyrum longius differendo, Viriditas è medio emerget, & creſcet tum amplitudine ſpatii, tum perfectione ſpeciei, totumque ſpatium coloratum diſtrahetur in oblongam formam. Quorum omnium rationes ex ſupradictis depromantur.

112. Adhæc,

Tab. V.



112. Adhæc, ſi Lux obſtaculo ad quamvis diſtantiam poſt Priſma collocato terminetur, conſimilis erit Colorum generatio. Sit v. g. obſtaculum G*g* (fig. 34.) perforatum in F, & ad diſtantiam pedis unius, aut ampliùs, poſt Priſma ABC collocatum. Priſma autem ſatis amplum adhibeatur (quale ex laminis vitreis, ut ſuprà, poſſis efficere) ne lux omnis priùs abeat in colores, quàm attingat foramen F; & lux illa, poſtquam tranſiit per F, non ſecus convertetur in colores apud P, Q, R, S, T, quàm contigit in præcedentibus. Scilicet inſpicienti ſchema patebit, quomodo radii diverſorum generum, inæqualiter refracti, convergant à diverſis partibus priſmatis ad iſtud F, ubi (ut & hinc inde verſus G & *g*) componunt Albedinem; ſed inibi decuſſantes divergunt poſtea, diverſique Colores in diverſa ſpatia P, Q, R, S, T tendunt. Et hinc, cùm radii repagulo quolibet H ex utrâvis parte priſmatis intercipiuntur, è coloribus P, Q, R, S, T aliqui tollentur. Si radios nempe vertici C vicinos intercipias, tolles Purpureum P; vel tolles Rubeum T, ſi intercipias eos baſi AB vicinos. Et ſic de aliis; ita ut quoſlibet pro arbitrio poſſis tollere, vel efficere, ut quilibet ſolus appareat.

COLORUM PHÆNOMENIS.

113. Denique, ſi Lux ex unicâ tantùm parte pone Priſma limitetur, vel ſi duo ſtatuantur limites, iique vel ad eaſdem vel ad oppoſitas partes priſmatis, vel quocunque alio modo Lux terminetur; modus, quo Colores exinde generantur, ex antedictis facilè patebit, ut jacturam temporis fecero de hâc re plura verba facturus. Quinetiam, ſi duo vel plura priſmata quocunque modo inter ſe diſponantur, peritus Optices facile explorabit cauſam.

114. Cæterùm de modo tollendi quoſlibet colores in fig. 34. per interpoſitionem obſtaculi H, hîc obiter notandum venit, quantum iſta circumſtantia adverſatur hypotheſibus Philoſophorum, quæ de coloribus huc uſque fuerunt excogitatæ. Ex illis enim poſitis Refracta Lux ad eas ſemper partes cum Cæruleo & Violaceo terminanda eſt, verſus quas fit refractio; quandoquidem gyrationes Globulorum ex opinione Carteſii, vel partes anteriores pulſuum Ætheris obliquè vibrantis, ex hypotheſi Hookii, per viciniam quieſcentis Medii ad eas ſemper partes impediuntur, & hebeſcunt. Et tamen hîc videre eſt, quòd admoto obſtaculo H, ut radios vertici Priſmatis vicinos intercidat, poſſis Violaceum & Cæ-

DE VARIIS ruleum tollere; & efficere, ut Viridis vel Flavus aut etiam Ruber, ad eas partes maneant extimus, verſus quas refractio peragitur. Nec hypotheſis eorum tutior eſt, qui ſupponunt colores ex Lucis & Umbræ miſturâ generari; nam eadem videtur eſſe in eorum confinio miſtura, ſive aliqui ex radiis ante refractionem limite H intercipantur, ſive omnes per priſma liberè tranſeant.

115. Hujuſmodi etiam hypotheſes ex aliis experimentis paſſim occurrentibus everti poſſent, modò id inſtituto meo neceſſarium ducerem. Quemadmodum ex illis ubi lucem partim reflecti poſſe, & partim tranſmitti docebam; nam lux tranſmiſſa dabat Flavum Rubeumque, idque in meditullio ejus, ubi à nullo quieſcente Medio, vel tenebris, terminabatur. Sic etiam maximè valet, quòd oſtendi Colorem lucis, ex uniformibus radiis conſtantis, non poſſe per quaſlibet Refractiones mutari. Cæterùm non opus eſt, ut hypotheſes refutem, quæ ex inventâ tandem veritate ſuâ ſponte corruent.

116. Phænomenis jam antè explicatis affinia ſunt ſequentia, quæ circa compoſitionem Albedinis verſantur. Priſmata duo, ABC & *abc* (fig. 35.) quorum anguli verticales, ACB & *acb*, æquentur, ita parallelis axibus diſpone, ut alterius linea verticalis, C, cum *b*, extremitate baſis alterius, conveniat; planis BC & *bc* in directum jacentibus. Quo facto, ſi Sol tranſluceat ea in papyrum MN, octo vel duodecim digitos poſtpoſitam, Colores quidem generabuntur ad M & N, per exteriores priſmatum terminos B & *c*, non autem per interiores C & *b*; ſed medium ſpatium PT totum apparebit album. Sin alterutrum priſma tollas; alterius extremitas, C vel *b*, generabit colores ad PT: ac dein, ſi reſtituas, Albedo etiam reſtituetur. Scilicet Albedo iſta componitur ex coloribus ab extremitate, C vel *b*, priſmatis utriuſque prolapſis; id quòd facile conſtet ex præfatis. Nam radii purpuriformes, ab utroque priſmate refracti, limitantur in eodem puncto P; ita ut ab uno priſmate manantes incidant in PM, ab altero in PN, & ab utroque ſimul in totum MN, non ſecus ac ſi omnes ab unico priſmate veniſſent. Eodem modo Cæruliformes extenduntur per totum ſpatium MN, & eorum terminus communis eſt Q, prout manant à diverſis priſmatibus; & ſic de cæteris. Quare omnigeni radii commiſcentur in unâquâque parte ſpatii PT, & Albedinem ideo component. Sin

alterutrum

alterutrum Priſma tollas, puta ABC, vel Lucem ei potius occludas; tum radiis rubriformibus ab MT, flaviformibus ab MS, viridiformibus ab MR, cæruliformibus ab MQ & purpuriformibus ab MP ſublatis, manebunt rubriformes in NT, flaviformes in NS, viridiformes in NR, cæruliformes in NQ & purpuriformes in NP: adeoque Purpureus apparebit in P, & Cæruleus in R, ut oſtendimus antè. Et ſimili ratione, ſi lux occludatur alteri priſmati *abc*, ne permeet, Rubor apparebit in T, & Flavedo in R. COLORUM PHÆNOMENIS.

117. In iſtis autem experiendis requiritur, ut anguli ACB & *acb* ſint æquales; id quod tentabis, ſi Priſmata ſecundum longitudinem eorum ita connectas, ut duo ex planis dictos angulos comprehendentibus, puta BC & *bc* (fig. 36) fiant contigua, & reliqua duo AC & *ac* ſibi oppoſita. Quo facto, ſi radii ſolis ingreſſi foramen F pergunt ad eundem locum S, cùm trajiciuntur per dicta priſmata perpendiculariter ad eorum latera AC & *ac*, atque cùm liberè progrediuntur nullo interjecto obſtaculo; tum plana AC & *ac* ſunt parallela, & anguli ACB & *acb* æquales: ſin iſtud non eveniat, ſunt inæquales. In quo caſu notetur præterea, quòd inclinando plana BC & *bc* (fig. 35.) vel ab invicem reclinando, poſſis Albedinem in PT haud ſecus componere, ac ſi dicti anguli fuiſſent æquales, & plana BC & *bc* in directum jacentia.

118. Quinetiam poſſis hoc idem cum unico tantùm Priſmate perficere, dummodo ſatis magnum ſit; puta cujus refringentia latera AC & BC (fig. 37.) ſint ſex vel octo digitos lata. Etenim ſint FG & *fg* duo corpora opaca, plana, rectangula & ad Priſmatis planum, AC*ca*, ſecundum planitiem ejus ſic applicata, ut eorum angularia puncta, G & *g*, juxta plani iſtius centrum ſe mutuò contingant, & latera concurrentia (quorum FG & *fg* ſint ad axem priſmatis parallela) ex adverſo jaceant in directum. Quo facto, ſi Lux refracta projiciatur in papyrum MNX pedes quaſi duos diſtantem, obſtaculum FG projiciet umbram in MH; Purpuram efficiet in PHIQ, ac Cæruleum colorem in QILT, & permittet lucem in LN. Dico jam, ſi Speculo aliquo, $\mu\nu$x, colores, ex alterutrâ parte lineæ HL, velut HL*pt*, ita reflectantur, ut incidant in papyrum ad eundem locum cum coloribus HLPT ex alterâ parte, color omnis evaneſcet, totumque HL*pt* apparebit album. Nam purpuriformes radii à priſmate ad PHIQ directè tendunt; & cætera

quatuor

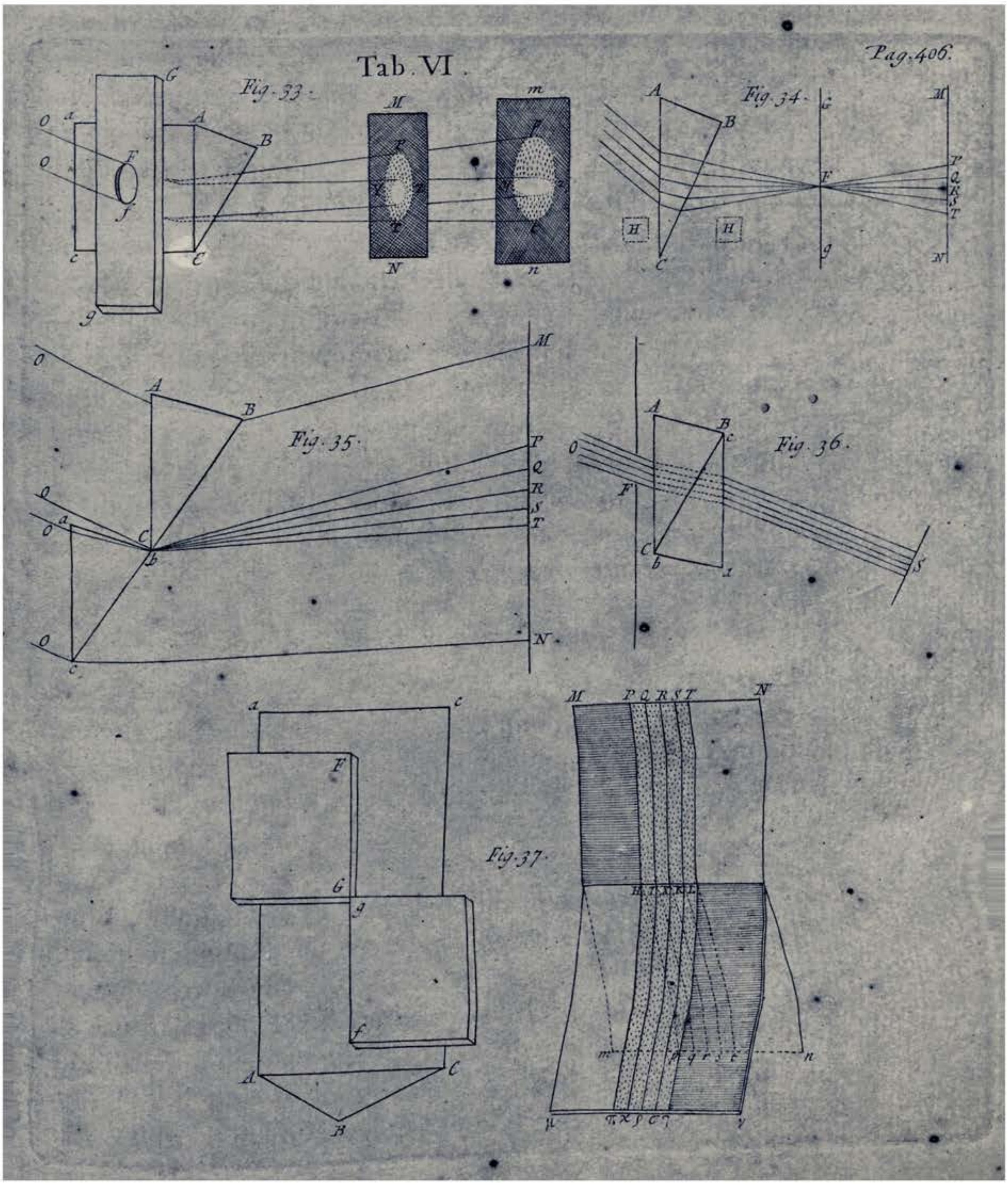
quatuor radiorum genera ad eundem locum reflectuntur à ſpeculo, incidentes puta in HIπχ. Item purpuriformes & cæruliformes directè tendunt ad QIXR; & cætera tria genera illuc reflectuntur ab IXϱχ; & ſic de reliquis: adeo ut omnes omnium generum radii paſſim per ſpatium PHLT miſceantur, ibidemque componant Albedinem. Sed notandum eſt, quòd, cùm lux reflexione ſemper debilitatur, radiis quamplurimis inter reflectendum amiſſis, exinde forſan eveniat, quòd lux directa nonnihil prævalebit reflexæ, & color ejus dominabitur; niſi compenſatio fiet, ita papyrum inclinando, ut directa lux paulo obliquiùs in eam incidat quàm reflexa, de quâ re facile judicium feras ex perfectione Albedinis emergentis.

119. Antequam ad aliud experimentorum genus tranſeo, neceſſarium erit, ut formam Imaginis Coloratæ, quam Lux, per arctum orbiculare foramen in tenebroſum cubiculum influens, & per priſma deinde tranſmiſſa affingit, paulo magis articulatim inſpiciamus; & ſingulorum ejus colorum dimenſiones ac diſtantias ab invicem, nec non Refrangibilitatis gradus ſingulis radiorum generibus competentes ſedulò rimemur.

EXPER. XIX.

120. Oſtendebatur ſub initio, quòd, ubi Priſma (cujus angulus verticalis erat quaſi 63 grad.) imaginem ad diſtantiam 22 pedum projiciebat, longitudo ejus erat $13\frac{1}{4}$ dig. & latitudo $2\frac{5}{8}$ dig. Adeoque centra extimorum circulorum, ex quibus in longum diſpoſitis imago illa conſtitit, diſtabant $10\frac{5}{8}$ dig. Jam ad hanc diſtantiam, ſive diſtractam longitudinem imaginis, cæteras ejus dimenſiones referre convenit; propterea quòd ad abſolutam ejus longitudinem (quæ à magnitudine componentium circulorum dependet) non habent certam relationem. Quo autem dimenſiones ejus majori ἀκριβείᾳ inveſtigarem, loca ubi Colores in ſuo genere perfectiſſimi, eorumque confinia in tranſverſam papyrum incidebant, calamo ſcriptorio notabam; & obſervationibus hujuſmodi ſæpiùs repetitis & inter ſe collatis, has tandem concluſiones ſigillatim perdidici.

I. Cæruleus & Violaceus ex unâ parte, & Viridis ac Rubeus ex alterâ imaginem bipartiebantur; adeo ut Viridis & Cærulei confinium


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.

confinium (quod Thalaſſinum appellare poſſim) meditulium ejus occuparet. COLORUM PHÆNOMENIS.

II. Locus ubi Porracea, ſive floridiſſima Viriditas apparuit, diviſit imaginis diſtractam longitudinem in ratione 3 ad 5; utpote longitudine illâ in 8 partes diviſâ, Viriditas illa tribus partibus à Rubeo termino diſtabat, & quinque partibus à Purpureo.

III. Spatium, per quòd Viriditas omnis aduſque Cærulei & Flavi confinium diſtendebatur, fuit quaſi ſexta pars totius diſtractæ longitudinis.

IV. Cærulei & Purpurei confinium, ſive Indicus perfectiſſimus, à confinio Rubei Flavique, ſive à perfectiſſimo Citrino, quaſi $\frac{7}{12}$ partibus totius diſtractæ longitudinis diſtabat.

V. Denique hæc Indici & Citrini diſtantia per confinium Viridis & Cærulei in ratione 2 ad 3 dividebatur; ita ſcilicet ut confinium iſtud, ſive meditullium Imaginis, ab Indico $\frac{14}{60}$ partibus totius diſtractæ longitudinis diſtaret, & $\frac{21}{60}$ partibus à Citrino.

121. Cum iſthæc quantâ potui diligentiâ obſervâſſem, non proprio tantùm ſenſu confiſus, ſed (propter ſummam difficultatem præciſè diſtinguendi confinia colorum, & loca maximæ perfectionis) aliorum judiciis fretus; imaginis dimenſiones juxta hæc inventa delineavi, quemadmodum videre eſt in fig. 38. Scilicet centris X & Y $10\frac{1}{4}$ unciis diſtantibus, & ſemidiametris $1\frac{5}{16}$ unciis, ſemicirculos duos, APC & BTD, è regione deſcripſi, & rectis, AB & CD, tangentibus connexui.

Deinde lineâ XY (quam ſuprà denominavi diſtractam longitudinem imaginis) in 60 partes æquales diviſâ, ſumſi LY=9, IY=20, HY=30, & FY=44 partes ejuſmodi. Et perpendiculis ad iſta puncta erectis, imaginem in quinque partes, coloribus quinque inſignioribus competentes, diſtinxi; parte PF referente expanſionem Violacei, & FH expanſionem Cærulei, & ſic deinceps. Quo facto coloratam lucem in hanc figuram projeci; ut conſtaret denue, an Color quilibet intra limites ſic aſſignatos contineretur: & cùm tota imago totam occupabat figuram, ſinguli etiam colores cum ſingulis partibus quàm optimè conveniebant. Interea verò in ſpatiis iſtis loca obſervabam, qualia in hoc ſchemate punctim notantur, ubi ſinguli Colores ſaturi & in ſuo genere illuſtriſſimi apparuêre.

Jam horum locorum & limitum, Colores diſterminantium, intervalla non alia fore manifeſtum eſt, etiamſi circulos, ex quibus imago conflatur, per methodos ſæpiùs recenſitas, centris non mutatis, quantumvis minueres. Eâ ſcilicet de cauſâ, ut heterogenei plus ſegregarentur, & Colores evaderent ſimpliciores. Quippe, cùm in ipſiſſimis rectilineis terminis, AB & CD, colores ſint abſolutè ſimplices; & Colores in mediâ imagine, prope lineam XY, cum iſtis, quibus interjacent, marginalibus congeneri appareant; ratio etiam ſuadet, quòd heterogeneorum miſtura non ſenſibiliter mutet locum alicujus Coloris; ſiquidem hinc & inde venientes ſe mutuò contemperant. Sic radii viridiformes & purpuriformes, per Cæruleum ſparſi, æquipollent; & ideo non dimovent aut conturbant Colorem illum, ut ſoli (quamvis nulli purpuriformes intermiſcerentur) ibidem componerent & exhiberent. Sed hic excipienda ſunt ſpatia circulis terminalibus, AC & BD, comprehenſa; ubi contemperamentum illud, ex parte exteriori, gradatim deficit, & ideo faturi Ruboris, qui ſolus è præfinitis in circulum terminalem ſe extendit, poſitionem in imagine è parte marginali, ubi tranſibit circulum, expedivi, ut indicat fig. 39. In his autem ſi quid hæſites, poſſis experimenta de novo inſtituere, contrahendo imaginis latitudinem, ut circuli, cæteris partibus, minores, evadant, & nullus dubito, quin omnia quadraverint.

122. Cæterùm, quamvis colorum confinia in lineas ad F, M, I & L erectas incidebant, tamen loca, ubi ſaturi & intenſi apparuêre, non omnia conſtitere in medio interjecti ſpatii. Nam Cæruleus, qui in ſuâ ſpecie illuſtriſſimus erat, & nullatenus purpuraſcens, propiùs ad F cadebat quàm ad X; et pleniſſima Flavedo videbatur eſſe aliquantulum propior ad H quàm ad I. Atque ita Rubedo & Purpura propiùs ad centra X & Y quàm ad alteros limites intenſæ apparuerunt; ſolaque Viriditas in medio limitum F & H effloruit. Unde conſtat ratio, quòd, etſi Flavus & Cæruleus commixtione Viridem componunt, Rubeus tamen & Viridis, propter majus intervallum, non benè componunt Flavum, nec Viridis & Purpureus Cæruleum. Cùm igitur Colores, juxta medium conſtipatiores ſunt, ita ut inter Flavum & Rubeum, juxtà & inter Cæruleum & Purpureum, quaſi triente majus interſit intervallum quàm inter Viridem & Flavum, vel Cæruleum ſibi hinc

& inde conterminum; quo Imago elegantiùs in partes inter ſe proportionatas diſtinguatur, in numerum quinque inſigniorum colorum duos alios, Citreum ſcilicet inter Rubeum & Flavum, ac Indicum inter Cæruleum ac Violaceum, aſciſcere convenit; idque potiſſimè quòd, poſt quinque inſigniores, illi duo eminere videntur; ſpatiaque, ubi interſerantur, pro ſpeciei perfectione ſatis ampla obtinent; & ſic exteriorum Colorum redundans expanſio præſcindetur, omneſque ad quantitatem Viriditatis politiori ſymmetriâ proportionati evadent. COLORUM PHÆNOMENIS.

EXPER. XX.

123. His itaque intertexis coloribus, obſervationes denuo inſtituebam; &, ut breviter dicam, omnia comparuêre juxtà ac ſi partes Imaginis, quas colores occupant, proportionales eſſent chordæ ſic diviſæ, ut ſingulos gradus in Octavâ reſonare faciat. Quòd cùm tandem deprehendi, figuram Imaginis in partes perinde diviſi, ut videre eſt in ſchem. 39. Atque iterum tentavi, quàm benè cum his partibus Colores convenirent. Scilicet Imaginis diſtractâ longitudine XY productâ ad Z, ut YZ ſit æqualis XY, finge XZ chordam eſſe; quam in XY ita dividere oportet, quaſi ſingula ſegmenta, ad uſque Z protenſa, ſingulos octavæ gradus (*ſol*, *la*, *fa*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *ſol*) edere deberent. Id quòd fiet biſecando XY in H, & triſecando in G & I; rurſuſque triſecando XI in E, & capiendo KY quintam, & MY octavam partem totius XY. Et ſemitonia, EG & KM, Indicum & Citrium referent, cæterique quinque toni, XE, FG, GH, HI, IK, cæteros quinque præcellentes Colores; quorum ſinguli, cùm tota colorum congeries in totam figuram adæquatè incidit, intra has ſingulas reſpective partes comprehenſi fuerint. Inque meditulliis harum partium circiter, Color quilibet in propriâ ſpecie illuſtriſſimus & intenſiſſimus apparuit; etiam Purpura & Rubedo, quamvis ultra, verſus P ac T, marceſcente luce exundârunt.

124. Cæterùm hæc non adeo præciſè obſervare potui, quin ut fateri cogar, ea poſſe paulo aliter fortaſſe conſtitui. Quemadmodum, ſi inter XZ & YZ ſumantur undecim mediæ proportionales, quarum EZ ſecunda ſit, FZ tertia, GZ quinta, HZ ſeptima, IZ nona, & KZ decima; hæc etiam Imaginis diſtributio cum Co-

 lorum

De Variis

lorum expanſionibus ſat benè convenire videbitur. Nam differentiæ adeo minutæ, quales inter hanc & ſuperiorem diſtributionem intercedunt, acutiſſimo ſenſu judice vix comparaturos errores efficere poſſunt.

125. Quantum verò diſtributiones iſtæ differunt, ex adjunctis numeris patebit; quorum ſuperiores ad chordam 720 partium, ratione Muſicâ diviſam, reſpiciunt; & inferiores, ad eandem chordam quàm proximè diviſam ratione Geometricâ.

360. 320. 300. 270. 240. 216. $202\frac{1}{2}$. 180. { Chorda Muſicè diviſa.

360. 321. 303. 270. 240. 214. 202. 180. { Chorda Geometricè diviſa.

Superiorem verò diſtributionem potius adhibui, non tantùm quòd cum phænomenis optimè convenit, ſed quòd fortaſſe aliquid circa Colorum harmonias, qualium pictores non penitus ignari ſunt, ſed ipſe nondum ſatis perſpectas habeo, ſonorum concordantiis fortaſſe analogas, involvat. Quemadmodum veriſimilius videbitur animadvertenti affinitatem, quæ eſt inter extimam Purpuram ac Rubedinem, Colorum extremitates, qualis inter Octavæ terminos, qui pro uniſonis quodammodo haberi poſſunt, reperitur.

126. Ex his demum proportiones ſinuum Refractionis, cuique radiorum generi competentium, ratione mechanicâ, determinantur; utpote ad Vitrum Aeri contiguum, cùm ſinus radiorum hinc & inde extimorum ſint ut 68 ad 69, divide intermediam unitatem in ratione partium hujus imaginis; & orientur 68, $68\frac{1}{8}$, $68\frac{1}{5}$, $68\frac{1}{3}$, $68\frac{1}{2}$, $68\frac{2}{3}$, $68\frac{7}{9}$, 69, pro ſinubus ad confinia terminoſque ſingulorum ſeptem Colorum pertinentibus, reſpectu communis ſinûs incidentiæ $44\frac{1}{4}$, cùm refractio fit è Vitro. Cùm verò fit in Vitrum, pro ſinubus iſtis adhibe numeros 68, $68\frac{2}{9}$, $68\frac{1}{3}$, $68\frac{1}{2}$, $68\frac{2}{3}$, $68\frac{4}{5}$, $68\frac{7}{8}$, 69, exiſtente communi ſinu incidentiæ 106. Et pro ſinubus ad radios, ubi Colores ſunt in propriis ſpeciebus perfectiſſimi, pertinentibus, numeri inter hos numeros intermedii adhiberi poſſunt.

127. Sic ad Aquam Aeri conterminam, ubi extremi ſinus refractionis ſunt ut 90 ad 91, ſinus intermedios, per conſimilem unitatis intermediæ diſſectionem (ſtatuendo ſcilicet eſſe 90, $90\frac{1}{8}$, $90\frac{1}{5}$, &c. vel 90, $90\frac{2}{9}$, $90\frac{1}{3}$, &c.) elicere poſſis. Aſt hic memento

determinationes

determinationes haſce non eſſe præciſè geometricas, ſed tam proximè tamen accuratas quàm exigunt hujuſmodi res practicæ; & quidquam ampliùs moliri, præter computandi tædium, affectatam & inanem curioſitatem argueret. COLORUM PHÆNOMENIS.

128. Sunt & aliæ circa hos Colores circumſtantiæ, quas jam determinare potuiſſem; quemadmodum variæ eorum Formæ, & Expanſiones, pro variis poſitionibus Priſmatis circa axem convolventis; vel pro variâ materiâ refractivâ, ex quâ Priſma fabricatur, quâve circundatur; vel etiam pro variâ magnitudine ejus anguli verticalis. Sed ea omnia ex oſtenſis in parte priori, conferendo cùm jam explicatis, ſat manifeſtantur; ut & effectus, quantum ſcio, omnes, quos vel unicâ tantùm refractione, vel utcunque pluribus, & quâvis terminatione Lucis elicere liceat.

SECTIO TERTIA.

De phænomenis Lucis per Priſma in Oculum tranſmiſſæ.

129. Poſt explicata Colorum à parietibus aliiſve Objectis reflexorum phænomena, ordo poſtulat, ut ad affines Objectorum trans Priſmata, prope oculum interpoſita, conſpicuorum apparentias explicandas jam animum adjiciam. Et, cùm doctrinam, in quinque Propoſitionibus ſuprà traditam, per prioris generis experimenta ſolummodo probaverim, & hoc experimentorum genus, eo quòd non ſit adeo ſimplex, conſultò reticuerim, explicationem ejus jam fusè tradere non pigebit.

Hic ideo imprimis recordari oportet, quòd Objectorum, mediante refractione viſorum, imagines non in propriis locis, ſed aliis quibuſdam videntur, à quibus viz. refracti radii rectâ ad oculum tendunt: atque adeo, ſi ita refringantur, ut, qui fluunt ab iiſdem partibus Objecti, à diverſis locis directè ad oculum veniant, Objectum illud in totidem locis apparebit. Sit e. g. x (fig. 40.) Objectum; O, oculus; & BC, lens interpoſita; quæ pluribus planis ſuperficiebus CD, DE, EF, &c. terminetur, ſicut ad Objecta multiplicia reddenda fabricari ſolet. Dein ſuppone hæc plana radios in ſeſe incidentes ita refringere, ut oculum petant quaſi à loco x venientes qui incidunt in planum DE; vel à loco y venientes, qui incidunt in planum EF, & ſic porro; & manifeſtum eſt, tum ratione

 tione

De Phænomenis Lucis per tione tum experientiâ ſuadente, quòd idem Objectum x in diverſis locis, *x* & *y*, ad inſtar plurium videbitur.

130. Ad eundem modum, ſtantibus jam poſitis, niſi quòd vice polygoni BC Priſma ABC (fig. 41.) ſubſtituatur; cùm è præmonſtratis conſtat, quòd è radiis, verſus oculum refractis, purpuriformes, propter maximam refrangibilitatem, longiſſimè à lineâ rectâ oculum & objectum interjacente divaricant; ſuppone, quòd purpuriformes (q) oculum petant quaſi venientes à P, & quòd rubriformes oculum petant quaſi venientes à T, cæterique in locis intermediis, pro gradu refrangibilitatis, fluant; & manifeſtum eſt, quòd Objecti, ſi ope purpuriformium radiorum ſolummodo conſpiceretur, imago foret ad P, idque Cærulei coloris; ſin radiis ſolummodo rubriformibus conſpiceretur, imago ejus ad T exiſteret, idque Rubei coloris; & ad R Viridis appareret, ſi modò viridiformibus radiis conſpiceretur; & ſic præterea. Quòd ſi Objectum duo tantummodo radiorum genera ſimul emitteret, duplicem ſortiretur imaginem; ſic emiſſis rubriformibus & purpuriformibus radiis, imago altera ad T Rubea appareret, & altera ad P Purpurea. Et ſic denique, ſi omne genus radiorum ſimul emitteret, ut ſolent corpora naturalia, tunc innumeras colorum, gradatim differentium, obtineret imagines, per totum ſpatium PT ordine continuo diſpoſitas; quæ, cùm in locis non penitus diſcretis formarentur, ſe mutuò obliterarent, efficerentque, ut nil niſi confuſa colorum ſeries appareret.

131. Hoc pacto quidem colores omnigenos generari oportet, cùm Objecti lucidi, nigredine vel tenebris terminati, perexigua eſt apparens magnitudo; qualis eſt Solis vel Lunæ aliorumve ſiderum, aut foraminis in feneſtrâ lucem à nubibus in obſcurum cubiculum intromittentis. Quòd ſi expanſius Objectum intueamur, quale ad X deſignatur, terminum ejus, GH, vertici Priſmatis propriorem imprimis animadvertamus; & manifeſtum eſt, quòd imaginum ejus, ex variis radiorum generibus formatarum, purpureâ longiſſimè omnium veluti ad P divaricante, color ille apparebit extimus. Imago autem Viridis, aduſque R tranſlata, cum parte aliquâ Purpureæ imaginis, ut & intermediæ Cæruleæ, ibidem coincidet & confundetur; à quâ miſturâ Cæruleum colorem

(q) Vocem purpuriformes conjecturâ inſerui.

generari

generari oportet. Et Rubea, in T terminata, cum partibus cæterarum omnium imaginum eouſque extenſis coincidet, & colorem Objecti ibi reſtituet; Album puta, ſi modo Objectum ſit albi coloris. PRISMA IN OCULUM TRANSMISSIS.

132. Et quemadmodum juxta limitem GH Objectum Purpureo & Cæruleo fimbriatum apparebit; ſic in oppoſito limite IK per conſimile ratiocinium patebit alteros colores, Rubeum Flavumque, produci.

133. Nec ſecus, cùm ejuſdem Objecti partes aliquæ ſunt aliis utcunque lucidiores, colores varii generari debent.

134. Et quantitas anguli POT, ſub quo Colores apparent, erit maxima, cùm Priſma ſtatuitur oculo viciniſſimum; eoque minor evadet continuò, quo Priſma propius ad objectum collocatur. Quemadmodum, ſi Priſmatis, ex vitro confecti, angulus verticalis ſit 60 gr. colores ſub angulo 2°. 2′ circiter apparebunt, cùm proxime oculum diſponitur, & 1°. 1′ cùm in mediâ inter oculum & Objectum diſtantiâ ſtatuitur; & quaſi 30½ min. cùm triplo plus diſtat ab oculo quàm ab Objecto, & ſic præterea. Hìc autem ſuppono radios ad utramque ſuperficiem ejus æqualiter refringi. Nam, cùm poſitionem ad radios ex alterutrâ parte obliquiorem, convertendo circa axem, acquirit, ille angulus augebitur. Suppono etiam Objectum ſatis lucidum eſſe, ac tenebris denſiſſimis terminatum, ut colores aduſque ſummas extremitates videri poſſunt. Nam ſecus per latitudinem jam aſſignatâ minorem diſtendi videbuntur; ut ut de quantitate aliiſque colorum circumſtantiis in quibuſlibet Objectis, ſub dio conſpectis, apparentium, idque pro refractionibus utcunque factis ex his facile eſt conjicere.

Cæterùm in allatæ doctrinæ illuſtrationem Phænomena aliquot inſigniora, & minus obvia, ex abundanti jam breviter deſcribere eſt animus.

EXPER. XXI.

135. Et imprimis, accepto filo aliquo PT (fig. 42.) ejus alterum dimidium, PR, Cæruleo colore tinxi; atque alterum, RT, colore Rubeo. Dein Priſmate adhibito hoc filum intuebar; cujus à tergo, niſi locus erat tenebroſus, corpus aliquod nigerrimum ſtatuebam; vidique præfata dimidia non in directum jacentia, ſed in duas

De Phænomenis Lucis per duas lineas diſcreta, quas in *pr* & *st* habes deſignatas. Scilicet cærulei dimidii, propter majorem eorum radiorum refractionem, imago paulo longiùs tranſlata fuit. At linea tamen ſubobſcura ipſius PT refracta apparuit, cujus partes in directum jacere & à quâ colores aliquantulum proſtare viſi ſunt; id quod ex imperfectione & miſturâ in utriſque fili coloribus latente contigit. Nam quanto illuſtriores erant & ſimpliciores, ea linea tanto obſcurior evaſit, & colores *pr* & *st* clariores & magis interrupti.

136. Cæterùm cùm lux, quam filum tenue reflectit, perexigua ſit, præſtat adhibere corpus aliquod expanſius, quale per PN (fig. 43.) deſignatur; quod v. g. concipe papyrum eſſe, ex parte PRLK Cæruleam, & ex alterâ parte Rubeam. Tum, priſmate juxta oculum interpoſito, nigroque corpore aut loco tenebroſo pone hoc Objectum ſito, videbis imaginem Cæruleæ partis paulo longiùs tranſlatam eſſe, terminis *pt* & *kn* in confinio colorum, *rs* & *lm*, ut ante diffractis. Sed hîc ſummè cavendum eſt, ut papyrus cum craſſis & intenſis coloribus illinetur.

EXPER. XXII.

137. Huic affine eſt experimentum, cùm ſtatui duo priſmata ad foramina duo, quibus lucis patuit aditus in tenebroſum cubiculum; ac in eo ſitu diſpoſui, ut unius Purpura & Rubor alterius in eundem locum coirent. In quo loco fixi papyri ſegmentum circulare, & non latius dimidio vel triente latitudinis coloratarum imaginum; eapropter ut duobus illis ſolummodo coloribus illuminaretur. Quo facto papyrus pallidi cujuſdam coloris apparuit. Tum, cæteris utrinque coloribus Objecto nigro terminatis, vel, quod ſatius erat, longius projectis, ut præfata papyrus nigredine vel tenebris circumcincta appareret, tertium priſma ad oculum applicavi; & ad diſtantias abinde pro arbitratu varias me ſubmovens, unicæ illius ſubpallidæ papyri geminam vidi imaginem, Purpuream & Rubeam. Et imago Purpurea longius à papyro tranſlata erat quàm Rubea, prout major eorum radiorum Refrangibilitas exigit. Rem ſchemate 44 deſignatam habes, ubi papyri PT imagines ſunt X & Y.

138. Ad eundem modum ſi duo Pulverum genera, quorum alterum perfectè rubrum eſt, & alterum purpureum vel indicum, ſine

ſine miſturâ cyanei, viridis, aut flavi parari poſſent, Objectum aliquod perexiguum, cum miſturâ pulverum iſtorum craſſè illitum, geminam imaginem exhiberet: ſpectaculum fortè cauſas ignorantibus mirandum. Sed vereor, ut Pulveres coloribus adeo ſimplicibus præditi parari poſſint. Prisma in oculum transmissis.

139. His præterea non multum diſſimile eſt, cum colores duorum priſmatum ita in parietem trajiciuntur, ut, unius Rubore contingente Purpureum alterius, in directum jaceant, quemadmodum videre eſt ad P, τ; & mediante priſmate, parallelῶs interpoſito, intuentur. Nam imagines non ampliùs in directum jacebunt, ſed ab invicem apparebunt diſtincta, ſicut ad *mn* & $\mu\nu$ deſignantur, fig. 45.

140. Atque ita, ſi duo priſmata A ac B (fig. 46.) ſic ſtatuantur, ut eorum colores ad locum P*p* adæquatè coincidant in ordine tamen contrario; Purpurâ alterius, A, cadente ad *p*, & Rubore ad P; alterius autem, B, Purpurâ cadente ad P & Rubore ad *p*: & per tertium priſma EF imagini P*p* parallelum perſpexeris; unicæ P*p* duas decuſſantes imagines intueberis; alteram, MN, è coloribus priſmatis B productam; & alteram *mn*, è coloribus priſmatis A. Et quo longiùs ab Objecto P*p* te conferas, eo magis extremitates imaginum, M à *n* & N à *m*, diſtabunt.

141. His etiam contraria ſunt experimenta, quòd Objecta duo, ſive ſunt circelli chartacei X & Y (fig. 44. diverſis coloribus illuſtrati, ſive diverſorum priſmatum paralleli vel decuſſantes colores, ut MN & *mn* (fig. 46.) ita poſſunt mediante alio priſmate conſpici, ut in unum coaleſcere videantur.

Exper. XXIII.

142. Et præter jam recenſia perinſigne eſt hujuſmodi experimentum, quo Objecta coloribus per interpoſitionem priſmatis denudantur, quibuſcum nudo oculo tincti apparent. Inſtantiam in Solis imagine coloratâ accipe, quæ in parietem à priſmate ABC (fig. 47.) projecta, cùm cernitur mediante alio parallelo priſmate, *abc*, manibus prehenſo, cujus vertex ad plagas verſus Rubeum colorem convertitur; ſi ſpectator ſe longiùs ab imagine gradatim amoveat, percipiet colores paulatim contrahi, & ad invicem eouſque accedere, donec tandem uniti reficiant imaginem albam &

circularem.

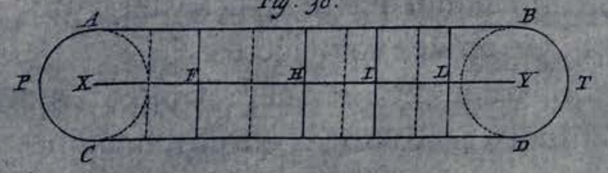
circularem. Id quod accidet, cùm ſpectatoris eadem eſt à coloribus diſtantia ac priſmatis ABC; ſi modo priſmatum anguli verticales æquentur. Et ratio ex eo manifeſta eſt, quòd oblongam illam imaginem, ex circulis, ſive circularibus imaginibus, infinitè multis, & in longum continuè diſpoſitis efformatam eſſe docuerim; quare quæ ſunt ad Purpuream extremitatem longiùs per refractionem ſecundi Priſmatis transferuntur, ut cæteras aſſequi poſſint, & ſic omnes coincidere.

143. Ad hunc modum cùm Objecta quælibet, ut QR, foras poſita confuſas & coloratas eorum imagines, ut *xſ* ad parietem per priſma tranſmittunt; ſi mediante alio priſmate inſpicias, poſſis imagines haſce coloribus denudare & efficere præterea, ut diſtinctiores appareant, quemadmodum ad *qr* (fig. 47.) videre eſt. Quoniam verò ad ſufficientem copiam lucis requiritur, ut foramen *F* ſit amplum; per ejus autem amplitudinem tranſmiſſæ imagines evadunt confuſæ; lens aliqua convexa, ut MN, prope foramen iſtud ſtatuenda eſt, quæ radios à ſingulis punctis Objecti, foras poſiti, venientes congreget in totidem aliis punctis ad parietem; & inſuper Priſmata debent eſſe admodum tranſparentia, perpolita, & ſuperficiebus accuratè planis terminata, inque ſitu quàm poteris exactè parallelo diſpoſita. Tanta quidem diligentia non requiritur, ut imagines *qr*, *s* ſine coloribus appareant; ſed ut inter tot ac tantas refractiones diſtinctæ appareant, præter accuratam fabricam vitrorum, requiritur experientis ingenium, quo omnia rectè diſponantur.

144. Hic in cumulum præterea adjici poteſt, quòd Objecta, quo ſimpliciori luce illuminantur, eo diſtinctiora per priſmata apparent; quippe cùm eorum per priſmata ſub dio viſorum confuſio ex inæquali refrangibilitate illuminantium radiorum oriatur. Et hinc eſt, quòd ſolaris imaginis ſæpiùs commemoratæ termini rectilinei, in quibus nullam eſſe heterogeneorum radiorum commiſturam indicavi, præ cæteris omnibus Objectis diſtincti, mediante Priſmate, appareant. Et ſic muſcæ, & ſimilia animalia, cùm in Rubeâ vel aliâ quâvis luce ſimplici, priſmatibus elicitâ, ſtatuantur, tranſvidentur ſolito diſtinctiores. Quinetiam oculus Engyſcopio armatus, omnia, hâc luce ſimplici illuſtrata, diſtinctiora

cernit.

Fig. 38.



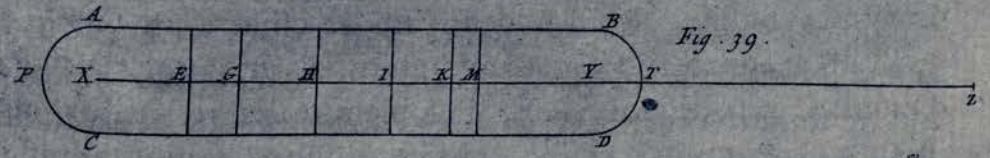


Fig. 39.

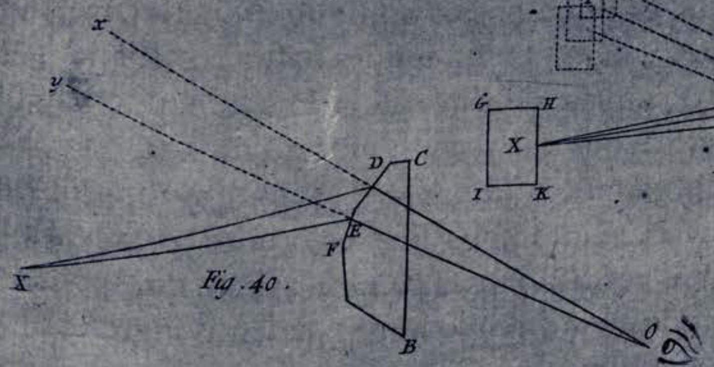


Fig. 40.

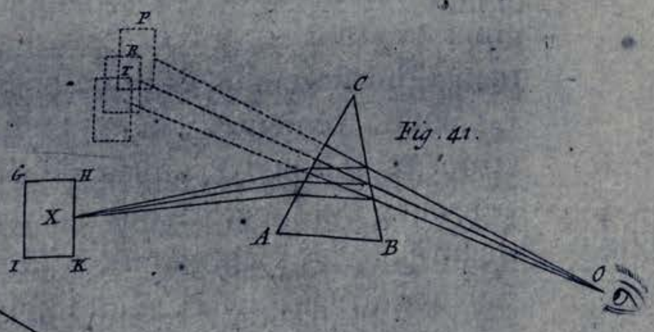


Fig. 41.

Fig. 42.

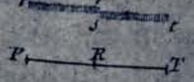
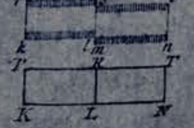


Fig. 43.



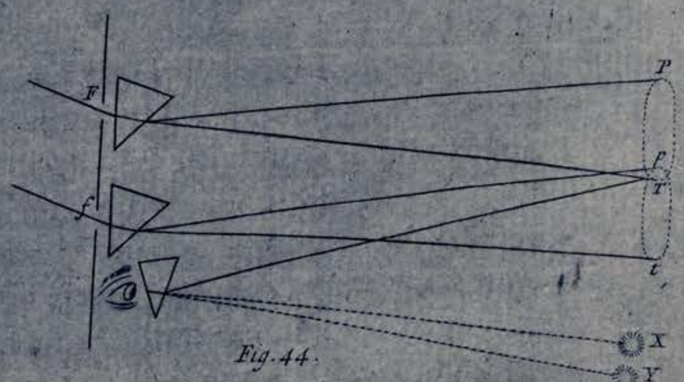


Fig. 44.

cernit. Id quod inſignem in contemplatione Inſectorum, vel texturæ aliarum rerum naturalium præ ſe uſum ferre poteſt. PER PRISMA TRANSMISSÆ.

145. In tertiâ Propoſitione ſuprà de Phænomenis quibuſdam diſſerui, ubi è radiis, ad refringentem ſuperficiem æqualiter inclinatis, aliqua genera pervaſère, dum alia penitus reflectebantur; & illis affinia quædam jam attingere opportunum duco. Eſto S ſpectatoris oculus, quo lucem à nubibus ſub dio ingreſſam planum FG (fig. 48.) reflexam à plano HI, & plano FH regreſſam excipit; & cùm Priſma commode ſtatuitur ita, ut radiorum, è medietate baſis HI verſus oculum reflexorum, angulus reflexionis ſit quaſi 50 gr. pars proximior baſis remotiori aliquantum obſcurior videbitur; & in utriuſque partis confinio fimbria, qualis DE, ſubcærulei coloris apparebit. Utpote cùm radii, qui à remotiori parte baſis ad oculum reflectuntur, obliquiùs incidant, quàm qui eò reſiliunt à parte proximiori; talis poteſt aſſignari eorum, circa medium baſis obliquitas, ut è proximioribus, propter minorem obliquitatem, aliqui perrumpere & refringi poſſint; dum remotiores, propter majorem obliquitatem, omnes ad oculum reflectuntur. Sic ad Vitrum, cujus refractionem per rationem ſinuum 42 ad 62 metimur, in plano SABC ad priſmatis longitudinem tranſverſo, poſito angulo *cts* 49°. 22′, ang. *crs* 49°. 44′, & ang. *cps* 50°. 5′; *t* erit limes refractionis rubiformium radiorum, ultra quem nulli ſuperficiem HI penetrabunt, qui propter debitam obliquitatem incidentiæ ad oculum reflecti poſſunt; & à citeriori parte *ct* complures è radiis ſic incidentibus, propter minorem obliquitatem, pervadere poſſunt & refringi; qui oculum peterent, ſi modò reflecterentur. Et ſic *r* erit limes radiorum viridiformium, & *p* limes purpuriformium. Adeoque ſuperficiei IH pars citima *cp*, propter complures radios omnis generis tranſmiſſos, obſcurior apparebit quàm pars ultima *tB*, quâ omnes, qui oculum attingere, eò reflectuntur. Et quia rubriformes à limite *t*, & viridiformes à limite *r* incipiunt ex parte pervadere, manifeſtum eſt, quòd ex illis pauciores à ſpatio *pt* ad oculum reſilient, quàm è purpuriformibus; qui non priùs incipiunt pervadere, quàm ad limitem *p*: ut & pauciores, quàm è cæruliformibus, qui ad limitem inter *p* & *r* tantùm pervadere incipiunt. Et proinde

in illo ſpatio Purpureus & Cæruleus color aliquantulum dominabitur. Deque totâ ſubcæruleâ lineâ DE conſimilis eſt diſcurſus.

146. Hæc autem linea non recta eſt, ſed in morem arcûs incurvata; propterea quòd puncta radios à baſi Priſmatis ad oculum, in angulo reflexionis dato, reſilientes reflectentia ejuſmodi Curvam conſtituunt.

147. Quod ad Refractiones in ſuperficiebus Priſmatis FG & FH factas ſpectat, nihil refert in remotiori FG quænam ſint; dummodo radii è proximiori FH perpendiculariter emergant, angulo KHG exiſtente quaſi $40\frac{1}{4}$ gr. Quòd ſi angulus ille major exiſtat, colores in lineâ DE, adjuvante refractione, paulo diſtinctiores evadunt; & minùs diſtincti, ſi ſit minor. Major etiam oculi à Priſmate diſtantia, vel (quod perinde eſt) pupillæ coarctatio, colores nonnihil perficit.

148. Ad hæc, cùm duo Priſmata, parallelis axibus & baſibus contiguis, ad invicem applicantur, & in eo ſitu colligantur, iidem omnino effectus per radios ab aëre intercluſo reflexos producantur. Sed radii tranſmiſſi contrarios exhibebunt. Eſto ACDB (fig. 49.) ſectio utriuſque Priſmatis ad eorum longitudines perpendiculariter tranſverſa, & CB contactus baſium, aut potius aër intercluſus. Quippe Priſmata vix queant tam arctè comprimi, quin ut aër nonnullus, in morem tenuiſſimæ lamellæ, maneat intercluſus. His poſitis, oculo *S*, radios à CB, lamellâ aeris interjectâ, reflexos intercipienti omnia apparebunt ut antè: at oculo *s* trajectos excipienti omnia cernentur contraria; ſpatio *tB* opaco & obſcuro exiſtente, & *cp* tranſlucido; ac eorum confinio *pt* juxta *t* Ruborem ſaturum, juxtaque *r* Citrium Flavumque exhibente; qui color uſque ad *p* gradatim diluitur, ubi in Album *pc* deſinit. Et hi colores longe intenſiores & illuſtriores apparent, quàm ſubcæruleus color ex alterâ parte ad oculum *S* reflexus. Quorum quidem omnium rationes è ſupra dictis patent; ſiquidem è radiis verſus oculum *s* tendendibus, qui incidunt in ſuperficiei partem *tB*, omnes propter nimiam obliquitatem alio reflectuntur, ſolique rubriformes ſuperficiem iſtam, à *c* uſque ad limitem *t*, viridiformes ad limitem *r*, & purpuriformes ad limitem *p* tantùm pervadere poſſunt.

149. Cæterum

149. Cæterum hîc cavendum eſt, nequa lux in ſuperficiem CB à parte D incidat, quæ vel ad oculum *s* reflexa, vel tranſmiſſa ad oculum s, colores conturbet. Et inſuper ne refractiones, à ſuperficiebus AB & CD factæ, ad effectus jam explicatos quicquam conducere videantur; præſtat ut ſuperficies iſtæ ſtatuantur parallelæ: quo mutuos effectus, ex opinione receptâ, deſtruere poſſint.

SECTIO QUARTA.

De phænomenis Lucis per Medium Refractivum parallelis planis terminatum tranſmiſſæ.

150. Tranſactis Triangularium Priſmatum phænomenis, quæ Quadrangulis per parallela plana efficiuntur, jam opportunè ſubveniunt enarranda. Id quod lubentius aggredior, cùm Philoſophi hactenus crediderunt colores nullos hoc pacto generari; exiſtimantes poſteriorem ſuperficiem effectus omnes, per contrariam refractionem, radiis auferre, quos prior inducit: & hoc pro experto habere rati, quod in Vitris feneſtrarum, aut aliis conſimilibus, nullos produci videant. At in eo decepti ſunt, quòd hujuſmodi Colorum quantitas & perfectio dependet à diſtantiâ parallelarum ſuperficierum. In laminis quidem vitreis, propter parvum ſuperficierum intervallum, Colores ſunt adeo tenues & exiles, & in ſpatio tam anguſto comprehenſi, ut effugiant ſenſus: at, cùm vitra magis craſſa adhibentur, aut potius vitrea vaſcula parallelepipeda, aquâ limpidiſſimâ plena, Colores tunc liquidò generari cernuntur.

151. Nam concipe ABCD (fig. 50.) eſſe Vitreum vel Aqueum parallelepipedum aëre circumcinctum, cujus ex oppoſitis & parallelis planis duo lineis AC & BD deſignentur. Et Sol illud per exiguum foramen F obliquè tranſluceat, ejuſque paralleli vel convenientes radii in anteriori ſuperficie ad H ita debent inæqualiter refringi, ut ab invicem deinde divergent, uſque dum incidant in poſteriorem ſuperficiem ad PT, & ibidem colores omnigenos depingant, perinde ut ſuprà ſat fusè explicui. Jam, cùm propter parallelismum ſuperficierum refringentium radii tantum à poſteriori recurventur, quantum incurvantur à priori, neceſſe eſt, ut ſibi ipſis ex aere ſecundum SH incidentibus emergant paralleli:

GENERATIO COLORUM

adeoque diſtantias ac poſitiones acquiſitas in infinitum ſervent, & elicitos colores eo uſque ſine aliquâ variatione promant. Quemadmodum ſi PH è refractis ad H ſit purpuriformis radius, & TH rubriformis; eorum denuo refracti P*p* ac T*t* incidentibus SH; adeoque ſibimetipſis paralleli emergent; & proinde Purpuram & Rubedinem, quam ad P ac T exhibuere, ad quamlibet diſtantiam *pt* immutatam transferent, & ſine quâvis uſpiam variatione conſervabunt, Purpureo à P in *p* tranſlato, Rubeo à T in *t*, cæteriſque à locis intermediis in loca correſpondentia.

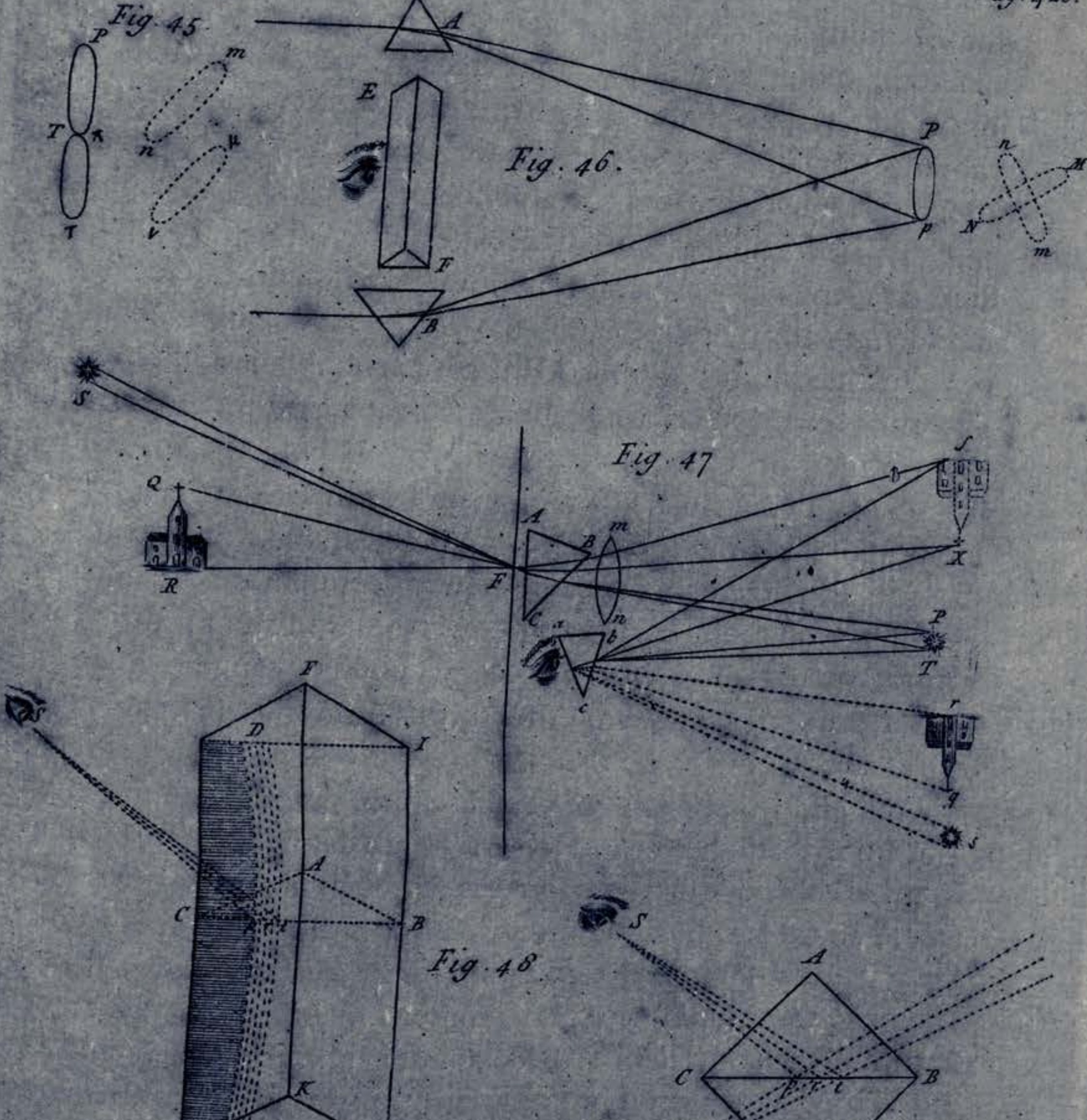
152. Hoc equidem præciſè debet evenire, ſi modò radii ſecundum eundem SF, vel parallelas lineas, in hoc Priſma inciderent; ſiquidem tunc emergent paralleli. At, cùm inclinantur ad invicem, uti de promanantibus à diverſis partibus Solaris diſci contingit, tunc etiam emergent inclinati, & eapropter mutationes quaſdam in ulteriori tranſlatione patientur. Utpote circuli, à ſingulis radiorum generibus effecti, ex quibus in longum diſpoſitis colorata Solis imago in ſuperficiem BD procidens conſtituitur, propter divergentiam radiorum, in foramine F decuſſantium, eò dilatiores evadunt, quo radii longiùs poſt emergentiam fluunt; dum eorum centra, quæ radiis à centro Solis, ſecundum eandem quampiam lineam ante refractionem, effluentibus illuminentur, eaſdem, poſt refractionem, diſtantias & poſitiones inter ſe perpetuò conſervant. Et hinc eſt, quòd ſpatium *prt* ſolari luce in tenebroſum cubiculum immiſſâ illuminatum, eò magis dilatetur, & in orbicularem formam contrahatur, quo longiùs poſt Priſma terminatur; & Viriditas in medio R, ſi qua ſit, paulatim tranſmigret in Albedinem; vel ſi nulla ſit, ſed propter anguſtiam Priſmatis hujus, aut amplitudinem foraminis lucem intromittentis, Albedo medietatem colorum occupet, eadem Albedo ſenſim dilatetur. Sed colores tamen hinc inde non diluuntur, nec in ſpatium anguſtius contrahuntur, utut minus luminoſi propter dilatationem imaginis evadant.

153. Ad hæc ſi mediante Parallelopipedo intueamur Viſibilia, coloribus non ſecus tingantur, quàm ſi priſma triangulare adhiberetur; præſertim ſi Parallelopipedum ad pertranſientes radios ſat obliquetur, ut multum refringat; & Objecta ſint admodum propinqua. Nam, ſi Objecta longinqua ſint, ſive intervallum iſtud

intercedat

Tab. VIII.

Pag. 420.



intercedat Parallelepipedum & Objecta, ſive Parallelepipedum & oculum, utcunque refractio per obliquitatem Parallelepipedi fiat magna, colores tamen non generabuntur. Sit x (fig. 51.) punctum lucidum, radios per parallelepipedi refringentia plana, AC & BD, ad oculum s emittens; & manifeſtum eſt, quòd ductâ *st*NX, quæ rubriformem radium deſignet, & *sp*MX, quæ deſignet purpuriformem, hi radii ad utramque ſuperficiem æqualiter refringentur; adeoque, triangula, *pst*, MXN, ſimilia conficient, purpuriformi radio, propter majorem refrangibilitatem, hinc & inde, apud *p* & M plus vergente à directo tramite quàm rubriformis: unde neceſſe eſt, ut ſeſe alicubi intra Priſma decuſſent, quemadmodum videre eſt ad O, iterum conficientes triangula *pot*, MON ſimilia, ſive trapezium *spot* ſimile trapezio XMON; adeoque oculum petent, tanquam ſi primariò fluxiſſent ab eodem O, & refractionem ab unicâ tantum ſuperficie AC paſſi fuiſſent. Et hinc non tantùm ſequitur, Colores generari, ſed & angulum *pst*, ſive colorum apparentem latitudinem, aliaſque circumſtantias pro quâlibet oculi poſitione determinari poſſe. Quemadmodum manifeſtius erit, ſi conferas cum experimento, quo Objecta, in aquam altè immerſa, obliquè inſpicienti coloribus nonnihil tincta videntur, propter refractionem ſtagnantis ſuperficiei. Nam AC ſuperficiem ſtagnantis aquæ, & O Objectum aliquod immerſum, quod ſpectator s intuetur, referre poteſt. Quod quidem O facilè invenies, ducendo rectam SX, quæ refringentes ſuperficies ſecet in K & L, ac dividendo in O, ut ſit SK ad LX ut SO ad OX, ſive ut KO ad OL.

A PLANIS PARALLELIS.

154. Quinimò ad hæc experienda pro Parallelepipedo vas optimè adhiberi poteſt, quod in fundo transfoditur, & vitri laminâ perpolitâ & horizonti parallelâ refarcitur, ut aquam cohibere poſſit. Nam, cùm aqua ad altitudinem pedis, aut ampliùs, infunditur, Lux, per vitri aut aquæ iſtius parallelas ſuperficies obliquè trajecta, Colores pro more explicato producet, poſſiſque ſucceſſive collocando Objecta ad X & O phænomena conferre. Id quod etiam fieri poteſt diſponendo duo vitrea Priſmata triangularia ut ACE, DBF (fig. 52.) ad diſtantiam pedis aut amplius in eo ſitu, ut eorum latera correſpondentia AC & DB & CE ad BF evadant parallela, & radii per interiores ſuperficies perpendiculariter proximè

trajiciantur.

GENERATIO COLORUM

trajiciantur. Tunc enim exteriores AC & BD refringentia plana Parallelepipedi referent. Et propter Vitri majorem quàm Aquæ vim refractivam, Colores eliciantur magis illuſtres.

155. Et hæc de Colorum à parallelis planis geneſi monuiſſe ſufficiat; niſi fortè juvet annotare diverſitatem effectuum, qui ab hiſce producuntur, & à Triangularibus Priſmatibus. Ejuſmodi ſunt 1° Quòd Colores, cùm in papyrum projiciuntur, ſplendidiores evadunt per auctam papyri longinquitatem, ſi modo Priſma ſit triangulare; ſin Parallelepipedum, hebeſcunt. 2°. Cùm Objecta per Priſmata triangularia tranſpiciuntur, Colores itidem ſplendidiores evadunt ex Objectorum auctâ longinquitate, at ſecus fit in parallelepipedis. 3°: Cùm Sol tranſlucet Priſma triangulare, Colores oriuntur terminando lucem ex utràvis parte Priſmatis: at cùm tranſlucet Parallelepipedum, Colores non oriuntur terminando lucem à poſteriori ejus parte. Cujus rei ratio eſt, quòd heterogenei radii à triangulari Priſmate divergentes fiunt, adeoque poſt emergentiam plus pluſque ſegregantur; at in parallelifmum reſtituuntur emergentes è Parallelepipedo, & non ampliùs ab invicem recedunt. Denique notum eſt, quòd Colorum, in extremam partem oculi, in Solem vel lucernam per Priſma triangulare reſpicientis, quilibet aſtans videbit ordinem ei contrarium, quem videt ipſe ſpectator. At, cùm Parallelepipedum adhibetur, idem erit ordo colorum in utroque caſu, propter decuſſationem radiorum in Parallelepipedo, ubi ſpectator tranſpicit, quemadmodum inſpicienti ſchemata manifeſtum.

156. Et ex hâc effectuum diverſitate phænomenon componitur, quo Colorum ad diverſas diſtantias diverſi fiant ordines. Utpote per vas aqueum ABCD (fig. 53.) in cujus fundo YZ refert laminam vitream, quam in ſuperioribus horizonti parallelam eſſe ſuppoſui, jubare trajecto, ſi vas ad partes Solem verſus elevetur, ut fundum ejus magis obliquetur ad perlabentem lucem, quam ſuperior ſtagnans ſuperficies; heterogenei radii, propter majorem in egreſſu refractionem, convergentes evadent, adeoque decuſſando mutabunt ſitum. Si lucem chartâ proximè egreſſam excipias, Purpura cadet infra Ruborem; & chartam longiùs differendo, in loco decuſſationis, per commiſturam, evaneſcent converſi

in

in Albedinem; ac poſtea de novo emergent in ordine contrario, ut videre eſt ad Q, R & V. A PLANIS PARALLELIS.

157. Ad aliud experimentum jam tranſeo, his quodammodo affine; quo Colores non à parallelis quidem ſuperficiebus generantur, ſed è ſuperficiebus ita inclinatis, ut, interpoſitâ reflectione, parallelarum rationem habeant. Sit SF (fig. 54.) linea coloribus omnigenis irradiata, quorum Purpurei, dum ad F ingrediuntur Priſma, refringuntur verſus H, & Rubei verſus G: abinde verò reflectuntur ad K & I, unde egredientes refringuntur denuo ad M & L. Dico jam, ſi Priſmatis anguli ABC & CAB æquentur, emergentes radii, IL & KM, paralleli erunt. Nam in triangulis FGA, IGB, cùm anguli A & B ex hypotheſi æquentur; ut & anguli FGA & IGB, propter æqualitatem incidentiæ & reflectionis; triangula erunt ſimilia, angulique AFG, BIG æquales; atque adeo æqualis erit refractio in F & I, & inde anguli CFS, CIL æquales. Et eâdem ratione patebit angulum CKM angulo eidem CFS æqualem eſſe, adeoque radios IL & KM parallelos. Jam, cùm radii IL & KM, ſecundum eandem lineam SF ſucceſſivè incidentes, non ſecus emergant paralleli quàm in præcedentibus, ubi ſuperficies refringentes erant parallelæ, eadem omnia phænomena, quæ ibi oſtenſa ſunt, huic competere certum eſt. Quemadmodum lucem Solis coloribus tingi, ſi Priſma ſatis amplum adhibeatur, ut ſpatium FGI vel FHK ſufficiat ad efficiendam ſenſibilem divergentiam radiorum, antequam per iteratam refractionem in paralleliſmum reducantur; ſed ejuſmodi Colores non perfectiores per longinquitatem obſtaculi, quo interciduntur, evadere. Item iſtos colores, ſi oculo poſtpoſito immediatè excipiantur, eo magis manifeſtos fore, quo Objectum, quod intuemur, ſit oculo propinquius, ut & eo magis, quo anguli CAB & CBA majores exiſtent; & eundem denique ordinem ſervare cùm in obverſum oculum directè mittuntur, atque cùm cernuntur ad parietem aliudve obſtaculum terminati. Hæc inquam evenire debent, ſi amplum Priſma adhibeatur (quale ex aquâ vitro circundatâ fabricari poſſit) & anguli A & B conſtituantur æquales. At in anguſtis Priſmatibus diſtantia radiorum IL & KM minor eſt, quam ut colorum ſenſibilis poſſit eſſe latitudo; & cùm anguli A & B ſunt inæquales,

perinde

Generatio Colorum.

perinde eſt, ac ſi refringentes ſuperficies in præcedentibus non ſunt parallelæ, & ſimiles ſunt effectus.

158. Quod de Coloribus dicitur, cùm unica tantùm reflectio refractionibus intervenit, facilè applicatur ad alios caſus, ubi plures interveniunt; ſed placet aliquod præterea de reflexionibus exponere, quibus generantur effectus, quos ſolæ refractiones exhibere poſſunt. Sit SF (fig. 55.) ut prius linea diverſis coloribus ſucceſſivè irradiata; qui, verſus *p*, *t*, aliaque intermedia loca pro gradibus refrangibilitatis refracti, à Priſmatis latere BC reflectantur ad M, N, ubi iterum impingentes in latus AC refringantur denuo ad PT; & colores ad PT perinde apparebunt, atque ad πτ apparerent, ſi modò radii F*p*, F*t*, &c. per duplum Priſma ABC, i. e. per Priſma, cujus angulus verticalis AC*b* ſit duplo major hujus angulo verticali ACB, rectâ fluxiſſent ad *mn*, & inde verſus πτ refringerentur. Nam pares ſunt omnes utrobique anguli, ſive à plano BC per AC verſus PT reſiliant radii, ſive longiùs per BC pergant ad πτ; utpote angulus C*t*N (=B*t*F) = C*tn*; & inde CN*t*=C*nt*, adeoque CNT=C*n*τ. Atque idem in aliis radiis intellige. Cùm autem præcipuæ Colorum ad πτ circumſtantiæ in ſuperioribus tradantur, crambem jam reponerem, ſi quid amplius de perſimilibus phænomenis ad PT inſtituerem dicere.

SECTIO QUINTA.

De phænomenis Lucis per Media Sphæricè terminata tranſmiſſæ, deque Iride.

159. Hactenus Colores refractionibus planarum ſuperficierum generatos contemplati ſumus; jam de Sphæricis ſuperficiebus agendum eſt; & imprimis de lentibus, ſeu figuris à duabus diverſarum ſphærarum portionibus comprehenſis. Ejuſmodi autem lens eſto MN (fig. 56.) per quam Lux Solaris juxta F*f* nec non undique terminata tranſmittitur. Sitque HK focus, ad quam poſtea convergat. Et, cùm radii ſimiliter incidentes non omnes ſimiliter refringantur, concipe, quòd radiorum ſecundum OF incidentium Purpuriformes refringantur ad K, Rubriformes ad H, & Viridiformes ad punctum intermedium *r*. Et pari ratione de radiis ſecundum O*f* incidentibus concipe, quòd Purpuriformes tendunt

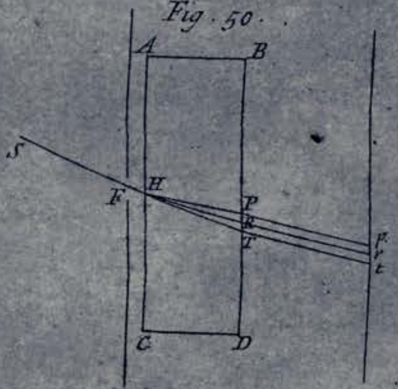


Fig. 50.

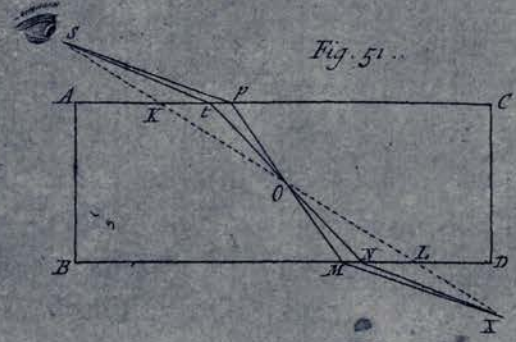


Fig. 51.

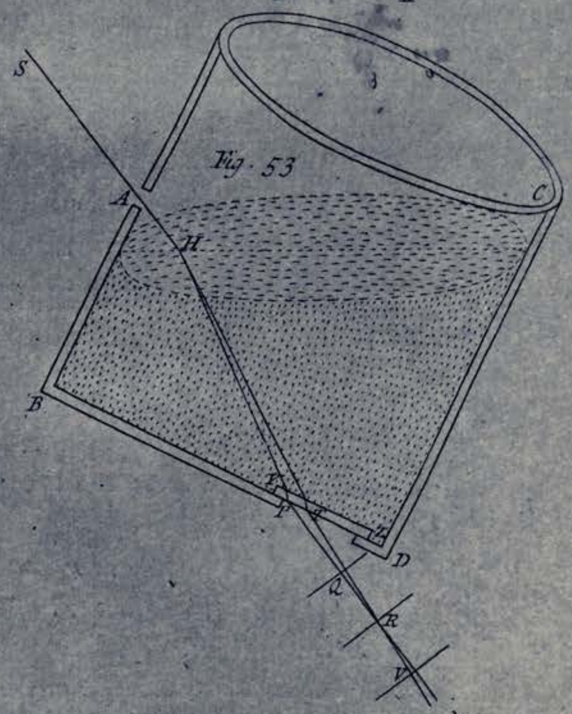


Fig. 53

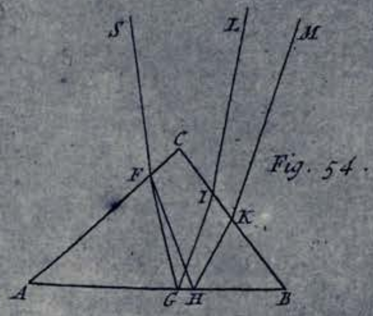


Fig. 54.

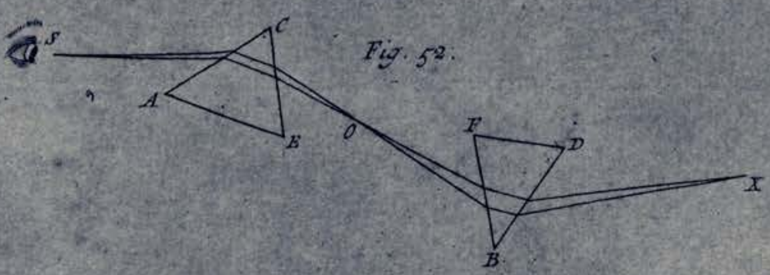


Fig. 52.

dunt ad H, Rubriformes ad K, ac Viridiformes ad *r*. Atque idem de radiis undique terminatis (juxta lentis peripheriam) concipe. ALENTIEUS.
Et patebit primò, ſi radii à papyro DL prius ferminentur, quàm ad focum HK conveniant, quòd color Rubeus in confinio lucis & umbræ deberet undique conſpici. Utpote ſi lineæ FH, F*r* & FK ipſam DL in punctis T, R & P ſecent; FH quidem in puncto T, F*r* in puncto R, & FK in puncto P: poſito ſimiliter quòd *f*H, *fr* & *f*K eandem DL in punctis π, ρ ac τ reſpectivè ſecent; & productis etiam FH & *f*K donec ſibi in *t* occurrant; ut & FK & *f*H donec occurrant in *p*, conſtabit punctum *t* longiùs diſtare à lente quàm punctum *p*, quandoquidem cadit ultra focum HK, *p* verò citra. Et proinde puncta P & π interjacent punctis T & τ. Conſtabit etiam Purpuriformes radios per totum ſpatium Pπ ſolummodo diſpergi, propterea quòd per integrum ſpatium F*f* in lentem parallelè incidentes verſus locum *p* refringantur; & ſic radii Viridiformes ſpatium Rρ occupabunt, ubi & Rubiformes ſpatium Tτ, extra quod nulli omnino ex radiis parallelè incidentibus (niſi contingenter & nulla certâ lege propter bullulas quaſdam aliaque vitia in vitro latentia refracti) poſſint divaricare. Quare ſpatium, Pπ à radiis omnium colorum illuminatum, debet albeſcere. At cùm Purpuriformes deſint à ſpatiis R & ρ, cæterorum miſtura debet exhibere Flavum. Atque ita, cùm ſoli Rubiformes extendantur ad T & τ, in locis T ac τ Rubor apparebit, & ſpatium illuminatum Pπ (quod orbiculare concipe) duobus colorum circulis, Rubeo Flavoque, tingetur. Hæc equidem eveniunt, cùm charta DL inter lentem & punctum *p* collocatur. Et colores tantò perfectiores evadunt, quo charta ſit puncto *p* propinquior. Et, cùm ſtatuitur ad ipſum *p*, Albor è medio penitus evaneſcere deberet, ſi modò radii à diverſis partibus ſolaris diſci ad lentem manantes inciderent paralleli. Quòd ſi charta paulo longiùs amoveatur, uti ad *r*, ubi Viridiformes radii concurrunt, adverſi colores ubique ad illam diſtantiam miſcebuntur, & ſe invicem ita delebunt, ut vix alius quàm albor apparebit. Si charta deinceps adhuc longiùs transferretur, puta ad *dl*, invertetur radiorum ordo, & puncta τ ac T interjacebunt punctis P & π, adeoque ſpatium Tτ ab omnibus coloribus illuminabitur, & proinde albeſcet; & in ſpatiis circa R & ρ, ad quæ Rubor non extenditur, Cæruleus componetur; &

Violaceus apparebit in extremitate ſummâ P & π. Qui quidem Colores non tantùm manifeſtiores ſunt, quàm Rubor & Flavus per interpoſitionem chartæ inter lentem & focum ut priùs emergentes; ſed perpetuò manifeſtiores evadunt, quo charta adhuc longiùs amovetur.

160. Latitudo ſpatii ſic tincti coloribus ex præmonſtratis petenda eſt, vel etiam ſic facilè determinari poteſt. Cùm differentia refractionis radiorum, in refrangibilitate maximè diſcrepantium & ſimiliter incidentium, ſit quaſi ſeptuageſima pars totius refractionis, ut ex oſtenſis patet; et, cùm angulus HFK deſignet differentiam refractionis, anguluſque F*r*f ſummam refractionum utrinque ad F & *f* factarum, hoc eſt, duplum refractionis juxta alterutrum F & *f*: angulus HFK erit quaſi ſeptuageſima pars ſemiſſis anguli F*r*f, ſive $\frac{1}{140}$ pars totius F*r*f, & proinde ſubtenſa HK quaſi $\frac{1}{140}$ pars latitudinis F*f*, per quam luci patet aditus, aut eâ fortaſſe paulo major. Denique, cùm ſit F*r*. FR : : HK. TP vel]π, dabitur intervallum TP vel]π, quod quærebatur. Si quis autem cupit, ut hæc exactiùs determinantur, computatio non eſt adeo difficilis, quin ut ipſe adhibito calamo perficiat. Quòd ad lentes utrinque concavas attinet, è jam oſtenſis facilè conſtabit eas lucem trajectam in ejus extremitate cum Cæruleo tingere. Quæ vero de lentibus utrinque convexis vel concavis dicuntur, de convexo-concavis æquipollentibus ſunt etiam intelligenda.

161. Sunt & alia phænomena, quæ de lentibus explicare poſſem. Sed cùm Oculi pars interior (Humor nempe Cryſtallinus ac Tunica Cornea) ſpeciem lentis radios ad rètinam congregantis referat, de ipſâ maluiſſem nonnulla dicere. Eorum tamen, quæ de lente jam explicui, nolo aliquid enixè repetere, cùm ad oculum facilè applicentur, utut expertu ſatis difficilia ſint; propterea quòd ægrè poſſimus efficere, ut oculi pars anterior & poſterior ad invicem ita accedant, aut ab invicem recedant, ſicut de lente & papyro lucem terminante deſcripſi. Quapropter radii ut plurimum eo modo in Retinam procidunt, quo poſui terminatos eſſe in papyrum δλ; atque adeo, propter miſturam diſſimilium, quæ ab oppoſitis partibus pupillæ adveniunt, Colores mutuò delebuntur, & convertentur in Album; ſi Objectum quod intueamur ſit album,

aut

aut in illum quemlibet colorem, quocum Objectum tingitur, ſi- De Oculo.
quidem ille tunc cæteris debet prævalere.

162. Cæterum ex hiſce detegitur modus, quo omnia, quæ nudis oculis intueamur, poſſint ita tingi Coloribus, ac ſi Priſma interponeretur, licet multo minùs manifeſtò. Idque ſi radii per alteram partem pupillæ tranſituri ab interpoſitione digiti, vel cujuſlibet obſtaculi, prope oculum intercipiantur; dum radii ingreſſuri alteram partem liberè tranſire permittantur. Hujuſce verò rei duos caſus non pigebit explicare: alterum, cùm radios intercipimus ad partes verſus Objectum lucidius; poſito nempe quòd Objecta duo, album & nigrum, juxta poſita intueamur; & alterum, cùm radios intercipimus ad partes verſus nigrius. Sit (fig. 57.) ergo LB Objectum lucidum, & BD obſcurum, quorum terminus communis ſit B; à quo radii in oculum, *dl*, juxta oppoſitas partes pupillæ, F*f*, promanantes ſint BF & B*f*; radii autem ſecundum lineam BF in oculum pergentes, pro gradu refrangibilitatis, refringantur verſus H, *r* & K. E contra verò, qui pergunt in lineâ B*f*, refringentur verſus K, *r* & H, cæteraque gradatim intermedia loca, prout de lente modò explicui. Ponamus jam, quod *eg* ſit obſtaculum, quo omnes radii prope *f* lapſuri intercipiuntur, prætermiſſis B*g*, & ejuſmodi aliis, per F ſolummodo tendentibus; & conſtabit primò, quòd ex radiis à diverſis partibus Objecti LB manantibus, qui veniunt à partibus verſus L in retinam incidunt propius ad *l*, quàm qui veniunt à partibus verſus B, ſiquidem in pupillâ decuſſant. Et ſic BD deberet radios verſus H*r* emittere. Sed cùm illud BD, propter nigredinem, nullos pene radios in oculum jaculetur, retina *ld* non ultrà verſus *d* illuminabitur, quàm ad H. Quinimo non ad H uſque illuminabitur, niſi à radiis rubriformibus; Viridiformes enim terminabuntur in *r*, & Purpuriformes in K; ſpatio *l*K à Purpuriformibus, *lr* à Viridiformibus, & *l*H à Rubriformibus illuminato. Quamobrem ſpatium *l*K, propter omnium radiorum miſturam, albeſcet ad inſtar objecti BL; ſed in exiguo ſpatio HK, quod termino B reſpondet, Colores generabuntur; Rubeus quidem ad H, propter ſolos Rubriformes radios illuc tendentes; & Flavus ad *r*, propter miſturam Viriditatis, Flavedinis ac Rubedinis. Jam, cùm omnia videantur pro more imaginum, in oculum receptarum, conſtat Objectum LB

De Oculo. juxta extremitatem ejus B non diſtinctè cerni, ſed coloribus Rubeo & Flavo tingi.

163. Ad eundem modum ſi transferatur obſtaculum *eg*, & cæteris ſtantibus Objecto interponatur & oculo ſecundum adverſas partes pupillæ, prout videre eſt ad EG; eo ut radii juxta F intercipiantur, radiique B*f* in oculum præter BG ingrediantur: conſtabit è contra, quòd ex radiis à toto BL proſilientibus Purpuriformes occupabunt ſpatium H*l*; Viridiformes ſpatium *rl*; & Rubriformes ſpatium K*l*. Quare ſpatio K*l* ut prius albeſcente, color Violaceus jam debet apparere in H, & Cæruleus in *r*, & eapropter Objecti LB extremitas B jam aliis tingitur coloribus, Violaceo & Cæruleo.

164. Et ad eundem modum ſi duo quælibet Objecta, vel ejuſdem Objecti diverſæ partes juxta poſitæ, gradu lucis differant: etſi alterum non ſit omninò nigrum, tamen Colores apparebunt in eorum communi termino; Rubeus quidem & Flavus cùm obſtaculum ad partes verſus Objectum obſcurius; Violaceus autem & Cæruleus, cùm ad partes verſus Objectum lucidius interponitur. Et ut paucis rationem denuo comprehendam, neceſſe eſt, ut radii ex unaquâvis parte pupillæ Colores producant, cùm radii ex adverſâ parte ſiſtuntur, à quorum omnium miſturâ oritur temperamentum Albedinis. An iſthæc verò phænomena vulgò obſervantur, haud ſcio. Sane non ſunt inventu nec expertu tam difficilia, nec ab iis, quæ Carteſius ſub fine capitis undecimi de Meteoris edocuit, tam aliena, quin cuiquam potuiſſent occurrere; niſi fortè quòd Colores illi propter tenuitatem vix ſint ſenſibiles. Experimentum itaque fiat per Objecta longinqua; quorum alterum ſit nigerrimum, & alterum ſatis candidum ad feriendum ſenſum, ſed non tantâ luce reſplendens, ut ſenſum obtundat, vel pupillam conſtringat. Nam hujuſmodi effectus ſunt eo magis manifeſti, quo pupilla ſit latior, & majori aperturâ radiis ingredientibus pateat.

165. Sunt & alii inſigniores effectus, Irides nempe vel Coronæ, quales Carteſius circa Candelam quondam obſervabat, & in Meteoris explicuit. Et, cùm illæ ſolent apparere, quando oculi figura aliquâ vi, extrinſecus illatâ, vitiatur; neceſſe eſt, ut à curvaturâ aliquâ vel plicâ in tunicis ejus de novo formatâ oriantur.

Cryſtallino

Cryſtallino autem vis non imprimitur, niſi mediantibus humoribus, quibus undiquè cingitur; &, cùm Fluida facillimè cedent preſſuris, humores illi vim quamlibet illatam ita per totam molem diffundent, ut Cryſtallinum vix poſſunt inæqualiter premere, neque ideo figuram ejus vitiare. Id enim experti ſunt, qui aquis altè ſubmerguntur; nam, etſi tota aquarum moles incumbat illis, preſſuram haud ſentiunt; quæ tamen foret maximè ſenſibilis, ſi corporum ſubmerſorum partes ita premerentur inæqualiter, ut figuras eorum violare conarentur. Reſtat ergo, ut ejuſmodi Coronarum ſive Iridum generatio vitioſis configurationibus Tunicæ Corneæ illatis tribuatur; idque eo magis, quòd radii maximam refractionem in exteriori ejus ſuperficie patiantur, & proinde per leviora ejus vitia à recto tramite detorqueri poſſint. Utut non pernegem, quin iis, qui laborant oculis, rugæ aliquæ, propter humorum defectum aut exceſſum, in Cryſtallini ſuperficiebus, non minùs quàm in Tunicâ Corneâ, poſſint efformari. Nec non aliæ etiam colorum cauſæ poſſunt evenire; ſed, cùm earum infinita ſit varietas, & illæ ſint eminentiores, quæ à vitioſis Tunicæ Corneæ figuris petuntur, non gravabor earum aliquod ſpecimen exhibere, unde cæterarum cauſæ facilè patebunt. DE IRIDE.

166. Notiſſimum eſt, quòd mollium partes non ſolùm preſſioni cedunt, in quas vis immediatè imprimitur, ſed & aliæ etiam partes remotæ, prout vim partium immediatè preſſarum ſuſtinent. Et ipſe nonnunquam obſervavi in laminis convexo-concavis, & ex materiâ mediocriter rigidâ confectis, quales ex coriis bubulcis in morem ſegmenti ſuperficiei ſphæricæ contundendo formari poſſunt, quòd, cùm in meditullio ſeu vertice premuntur, non ſolùm ibi cedunt tactui ſed & undique; ad inſtar vallis annularem collem, depreſſæ vertici circunductum, comprehendentis, intus flectuntur; idque citius & magis manifeſto, ſi ſint paulo rigidiores juxta verticem quàm prope peripheriam. V. G. Sit *knx* (fig. 58.) lamina ſphæricè convexo-concava, quæ circulari ejus extremitati tanquam baſi incumbens, mole aliquâ planâ, & ad baſem ejus parallelâ, AB, prematur: & manifeſtum erit, quòd hæc lamina maximè cedet preſſioni in vertice *n*, ubi ab incumbente mole primò contingitur. Sed in aliis etiam locis, ut in λ & *l*, poſſit etiam intus recedere, dum in locis intermediis, ut *m* & μ,

partes

De Iride. partes aſſurgunt. Atque hâc ratione configurationem acquiret haud diſſimilem aquæ undulanti, puteolo *n* referente centrum undarum, & ripâ *m*, *μ* referente undarum primam valle *λ*, *l* circundatam. Et ad eundem modum poſſibile eſt, ut tres vel plures valles premendo deſcendant, quorum culmina internata ſint, pluribus undis ſe invicem ſubſequentibus conſimilia. Et hujuſmodi configurationes ceſſante preſſione poſſunt aliquamdiu conſervari, gradatim tamen evaneſcentes. Nam, ut primùm preſſio ceſſat, cavitas in *n* ceſſabit fortè, & partes ibi in convexitatem aſſurgent, & gradatim fient plus pluſque convexæ, donec redeat figura, quam ante preſſionem habuere; & ſic cæterarum partium figuræ ad priſtinum ſtatum gradatim redibunt. Jam, cùm Tunica Cornea ad modum præfatum convexo-concava ſit, & mediocriter rigida, & circa medietatem ejus paulo craſſior, & proinde rigidior quàm juxta peripheriam, & ſiquando figura ejus ab externâ* preſſione vitietur, probabile ſit illam preſſionem circa meditullium ejus maximâ ex parte contingere; itaque poteſt aliquando forſan accidere, quòd, cùm premitur, non ſolùm in apice cedat preſſioni, ſed quòd in pluribus etiam circulis apici concentricis parum aſcendat, & alternis vicibus deſcendat. Et hujuſmodi rugæ concentricæ poſſunt etiam ex defectu humorum, quo tunicæ flacceſcunt, nec non ex aliis fortè cauſis accidere; & quantumvis exiguæ ſint, poſſunt tamen radios ad alias atque alias partes Retinæ refringere, & ſic efficere, ut alii atque alii colorum circuli appareant. Sed ut videamus, quo pacto ex hujuſmodi rugis colores generari debent; ponamus radios è longinquo manantes, ſive parallelos, in ſuperficiem *kκ* (fig. 59.) ita, ut dictum eſt, intortam, & in eâ refractos ſiſti deinde ab aliâ opacâ ſuperficie EF. Et, cùm hujus ſuperficiei partes depreſſiores radios ad puncta remotiora congregent, quàm partes aſcendentes ſive magis acclives; ponamus, quòd radii circa meditullium ejus *mnμ*, ubi maximè deprimitur, congregantur ad G; quòd à partibus *l* & *λ* maximâ acclivitate ſurgentibus congregantur ad I; & ſic quòd à partibus *k* & *κ*, ubi rurſus deprimitur, congregantur ad H, & quòd ab intermediis partibus congregantur ad intermedia puncta. Ductis ergo *m*G & *μ*G, *l*I & *λ*I, *k*H & *κ*H, occurrentibus ſuperficiei, ſeu obſtaculo, EF in punctis *r* & *ϱ*, *ϖ* & *p*, R & P;

nec

nec non axe GHI occurrente eidem EF in puncto *o*, ut & refringenti ſuperficiei *k*χ in puncto *n*; & poſito quòd iſta EF interjaceat punctis H & I; manifeſtum erit perpendenti refractiones hujus *k*χ, in ſingulis ejus punctis à centro *n* ſucceſſivè ad extremitates *k* vel χ, quòd radii, prout longiùs ab *n* verſus *m* per refringentem ſuperficiem trajiciuntur, incidant in obſtaculum EF longiùs ab *o* verſus *r* adusque certum terminum; puta dum ad radium *mr* deventum eſt: deinde quòd, facto regreſſu, incidant propius ad *o*, & poſtea ad alteras ejus partes pergant, donec iterum fiat elongatio maxima; velut in *p*, cùm deventum eſt ad radium *lp*: tum denuo revertuntur radiorum concurſus, idque continuo, prout ab *l* verſus *k* procedit refractio; donec tertio terminentur quemadmodum in R, occurſu radii *k*R. Ad eundem modum lux inter *n* & χ refracta terminabitur in punctis ρ, ϖ, & P. Atque etiam, ſi plures eſſent rugæ, plures forent lucis terminationes. Cæterùm de luce per ſpatium *r*ρ diffuſâ, cùm cauſa, quòd extra vagatur punctum *o* uſque ad terminos *r* & ρ, ſit ejus parva refractio prope *m* & μ; ſequitur, quòd radii minùs refrangibiles, hoc eſt Rubriformes, debent magis extravagari, & proinde terminus lucis *r* vel ρ debet Rubedine tingi. Et ſic de luce per ſpatium ϖ*p* diffuſâ, cùm cauſa, quòd extravagatur punctum *o* uſque ad terminos *p* & ϖ, ſit ejus nimia refractio prope *l* & λ; ſequitur, quòd radii magis refrangibiles, hoc eſt Purpureum & Cæruleum pingentes, debent longiùs deviare, & colores eorum in exteriori parte termini *p* & π depingere; unde in interiori ejuſdem termini parte Rubriformes radii ad ſuos etiam colores depingendos debent prævalere. Et ſimili ratione radii circa *k* & χ refracti, ſi ſint Rubriformes, tendent ad exteriorem partem termini R & P, & ad interiorem, ſi ſint Cæruliformes. Et ſic tres habebuntur irides; RP extra Rubea & intra Cærulea; *p*ϖ, extra Cærulea & intra Rubea; *r*ρ, extra Rubea, quæ etiam debet eſſe intra Cærulea; niſi fortè, quòd color ille à rubeo propter parvitatem refractionis in μ & *m*, haud ſatis cernitur, ut fiat ſenſibilis; & propterea quòd multum obſcuratur à copiâ lucis undique per *ro*ρ, locum imaginis lucidæ, quam cingunt Irides ſparſæ. Harum verò Iridum formæ & relationes inter ſe poſſunt variis modis mutari, idque non tantum è variis formis, quas ſuperficies *k*χ poſſit induere, ſed etiam

è variis

De Iride. è variis diſtantiis inter hanc $k\kappa$ & obſtaculum EF. Ut, ſi ſtatuantur paulo magis diſtantes, quàm deſignavi, circuli RP & ϖp poſſunt coincidere, & mutuos colores delere, coeuntes in albicantem circulum. Sin magis adhuc diſtent, Iris ϖp cadet extra iridem RP. Quòd ſi EF ſtatuatur ad locum I, hæc Iris $p\varpi$ evaneſcet, & poteſt etiam coincidere cum Iride $r\rho$, ſi EF paulo ultra vel citra locum I ſtatuatur. Jam verò horum omnium ad oculum facilis eſt applicatio, poſito quòd obſtaculum EF fundum ejus referat, & $k\kappa$ Tunicam Corneam ab externâ vi, aut interno aliquo vitio, perperam curvatam. Quinetiam ex his non modò generalis cauſa harum Iridum declaratur, ſed pro quibuſlibet ejuſmodi particularibus apparentiis cauſæ etiam particulares aſſignari poſſe videntur. Quemadmodum, ſi cui fax appareat unicâ tantum Iride cincta, cujus pars exterior rubet, interior verò vel alba, vel fortè nonnihil cærulea appareat; exinde concludi poſſe videtur, quòd cornea circa medietatem ejus ſit paulo depreſſior, quàm ſolet eſſe ſine aliquâ rugâ, qualem ad $l\lambda$ deſcripſi. Efficit enim illa depreſſio, ut radii ab eodem puncto Objecti venientes ad puncta longè poſt retinam conveniant; & qui proinde in retinâ ſpatium aliquod, quale eſt $\varpi \varrho$, occupabunt, cujus peripheria (ut modo oſtendi) Rubeo colore ad exteriorem ejus partem tingetur, & Albo vel dilutè Cæruleo ad interiorem. Et quò major hujuſmodi Iris appareat, eo magis ad *interiorem ejus* partem debet Cæruleo tingi. Poteſt etiam hujuſmodi Iris propter annularem rugam accidere, modò Tunicæ Corneæ figura in meditullio non ſimul vitietur.

167. Quod ſi duæ Irides appareant, illud ex utrâque cauſâ conjunctâ petendum eſt; corneâ nempe tum in medio, tum juxta peripheriam pupillæ, depreſſâ. In cujus rei illuſtrationem adhibeamus caſum, quem Carteſius de ſe ipſo in Meteoris Cap. IX. ad hunc modum deſcribit. "Cum noctu, inquit, navigarem, & totâ "illâ veſperâ caput cubito innixus, manu oculum dextrum clau"ſiſſem, altero interim verſus cœlum reſpiciens, candela ubi "eram allata eſt: & tunc aperto utroque oculo, duos circulos flam"mam coronantes aſpexi, colore tam acri & florido, quàm un"quam in arcu cœleſti me vidiſſe memini. AB (fig. 60.) eſt "maximus, qui ruber erat in A, & cæruleus in B: CD mini"mus, qui etiam ruber in C, ſed albus verſus D, ubi ad flam-

"mam

Fig. 55.

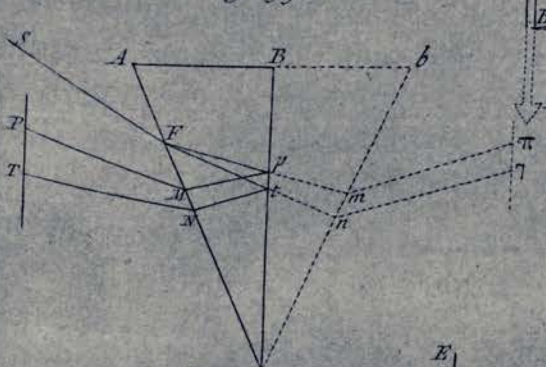


Fig. 57.

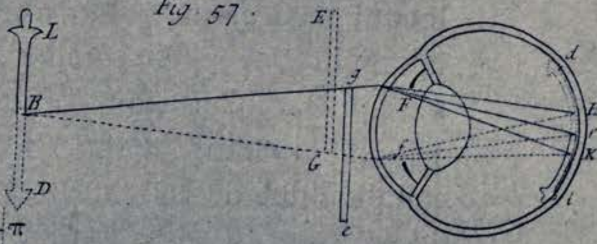


Fig. 56.

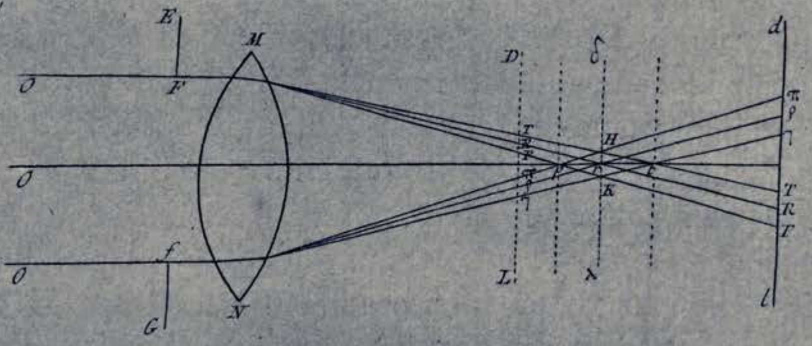


Fig. 59.

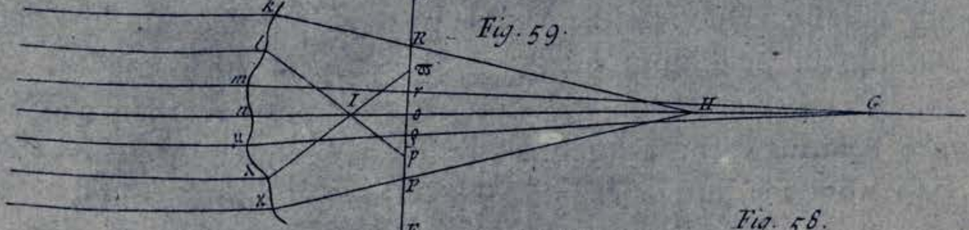
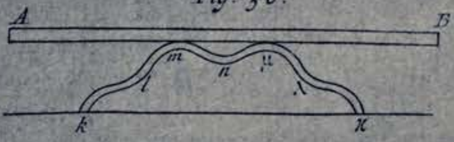


Fig. 58.



" mam uſque extendebatur. Oculo dextro poſtea iterum clauſo, De Iride.
" notavi has coronas evaneſcere; & contrà illo operto & ſiniſtro
" clauſo permanere. Unde certo cognovi illas non aliunde oriri,
" quàm ex novâ conformatione vel qualitate, quam dexter ocu-
" lus acquiſiverat, dum ipſum ita clauſum tenueram; & propter
" quam non modò maxima pars radiorum, quos ex flammâ ad-
" mittebat, ipſius imaginem in o, ubi congregabantur, pinge-
" bant: ſed etiam nonnulli ex iis ita detorquebantur, ut per to-
" tum ſpatium $r\rho$ ſpargerentur, ubi pingebant coronam cd, &
" nonnulli alii per totum ſpatium rp, ubi coronam ab etiam pin-
" gebant." Cùm itaque Carteſius hæc viderit, poſtquam per totam veſperam cubito innixus erat, rugæ, quales explicui, potuerunt imprimi; unde neceſſe erat ejuſmodi coronas apparere: & quòd tres coronæ non apparebant, illâ ſcilicet non apparente cujus partem exteriorem cæruleam eſſe deſcripſi, & partem interiorem rubeam, id ex eo venire debuit, quod radii in l & λ refracti, ex quibus hanc coronam generari deberet, haud citius quàm ad retinam convergebant, aut potius non tam cito. Non enim probabile videtur, quòd Tunicæ Corneæ pars aliqua ab externâ preſſione poſſit fieri ſolito convexior; & niſi hoc eveniat, radii illi non poſſunt citiùs quàm ad retinam convenire. Illa verò tertia corona non poteſt apparere, niſi citius (ut ad i) conveniant. Si longè ultra convergant, coronam tunc quidem deberent efficere, ſed cujus pars exterior rubeſceret, & tunc tres coronæ in exteriore eorum parte rubeæ conſpicerentur. Sed in hiſce videar nimius, præſertim cùm tanta cauſarum varietas non ſolum à Tunicâ Corneâ, ſed Humore Cryſtallino, & aliunde etiam peti poſſunt; ut haud ſit difficile plures aſſignare, quæ eoſdem quoſlibet effectus diverſis temporibus producant. Neſcio tamen, an operæ pretium ſit annotare cauſam radiorum à lucidis corporibus hinc inde, ad inſtar trabium in longum protenſarum, cùm oculis pænè clauſis aſpicimus. Nempe humiditas, quæ inter cilia & Tunicam Corneam verſatur, ſecundum extremitates ciliorum parum aſſurgit. Sicut aqua vaſi impoſita altius aſſurgit, ubi à vaſe terminatur, quàm alibi; quo pacto fit, ut aliqui radii ab hâc humiditate prius refringantur, quàm attingant Tunicam Corneam, &

 ſurſum

De Arcu ſurſum detorqueantur in confinio ſuperioris cilii, ac deorſum in confinio inferioris.

168. Supereſt jam mirum illud Cæleſtis Arcûs ſpectaculum, ad cujus explicationem Carteſius viam ſtravit. Huic enim debetur, quòd in guttis aquæ pluvialis decidentibus efformari cognoſcimus. Quemadmodum ex eo conſtat, quòd nunquam videtur niſi cœlo pluente; quòd Sole pluviam decidentem illuſtrante in vicis nonnunquam apparuit, quaſi non in cœlo collocatus, ſed in Aere vicino, ſuper oppoſitarum domuum parietibus affixus, vel potius interjectus; quòd aqua per artificium aliquod ſparſim ejaculata Iridem oſtendit; & quòd gramen rore matutino, quaſi guttulis minutiſſimis, conſperſum colores etiam Iridis exhibet. Huic etiam debetur ingenioſiſſima de Refractionibus guttæ & earum limitibus inventio, ſed cauſam phyſicam minus feliciter aggreſſus eſt. Hanc itaque ut intelligatis, concipite radium AN (fig. 61.) in globum NFG ad N incidere, & inde verſus F refringi, ubi rurſus vel refringetur verſus V, vel forte reflectitur ad G. Et ſi poſterius eveniat, tunc iterum in G vel refringitur ad R, vel reflectitur ad H, & ſic deinceps; ita ut radiis globum ingredientibus aliqui, ut NFV, ſtatim egredientur, nullam reflexionem paſſi; alii, ut FGR, poſt unam reflectionem; & alii, ut GHS, poſt duas; aliique poſt tres vel etiam plures. Jam verò, cùm guttæ pluviales reſpectu diſtantiæ ab oculo ſpectatoris, ſint admodum exiguæ, ut phyſicè pro punctis haberi poſſint, non opus eſt, ut earum magnitudines omnino conſideremus, ſed angulos tantùm, quos incidentes cum emergentibus radiis comprehendunt: nam, ubi anguli illi ſunt maximi vel minimi, emergentes radii ſunt ſolito confertiores; &, quia diverſis radiorum generibus diverſi competunt anguli maximi vel minimi, ſingula ad diverſas plagas confertiſſimè tendentia in iiſdem prævalebunt ad colores proprios exhibendos. Anguli itaque maximi vel minimi, quos ſingulorum generum emergentes radii cum incidentibus poſſunt conſtituere, determinandi ſunt, ut horum phænomenon rationes rectè percipiamus.

169. Scilicet in Corol. 1 & 2. Prop. XXXV. oſtenſum eſt emergentem radium GR ad incidentem AN maximè inclinari, cùm ſit $3RR. II - RR :: CNq. NDq$; et $I. 2R :: ND. NE$: poſito nempe I ad

ad R ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis; & ex hinc inven- CÆLESTI.
tis ND & NE, dabitur poſitione GR.

170. Sit, exempli gratiâ, pro radiis maximè refrangibilibus ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſive I ad R, ut 185 ad 138, prout in aquâ pluviali proximè comperi; & erit 57132. 15181 : : (3RR. II − RR : :) CNq. NDq; adeoque DN $= \sqrt{\frac{15181}{57132}} \times$ CN $= \frac{5155}{10000}$ CN. Unde per Tabulam Sinuum datur arcus NL 62 grad. 4 min. Præterea, cùm ſit I.2R : : ND.NE : : 185.276 : : $\frac{5155}{10000}$ CN.NE; erit NE $= \frac{7691}{10000}$ CN. Et inde etiam per Tabulam Sinuum datur arcus NF, 100 grad. 32. min. Subduc jam duplum arcûs NF ex aggregato arcûs NL & 180 grad. ſive ſemicirculi, & reſtabit 41 grad. 0 min. pro inclinatione radii RG ad radium AN, ſive pro angulo AXR; productis nempe AN & NG donec in X conveniant. Et hic angulus eſt, ſub quo intimus ſive cæruleus limbus Iridis hujus apparere debet, ſive minima ejus ſemidiameter.

171. Ad eundem modum pro radiis minimè refrangibilibus, poſito ſinu incidentiæ ad ſinum refractionis ut 182 ad 138, uti dimenſus ſum, invenietur ND $= \frac{5028}{10000}$ CN, & NE $= \frac{7533}{10000}$ CN; indeque per Tabulam ſinuum arcus NL erit 60 grad. 22 min. & arcus NF 98 grad. 38 min. Adeoque angulus AXR 43 grad. 6 min. ſub quo extimus ſive Rubeus hujus Iridis limbus apparebit. Itaque maxima ejus ſemidiameter eſt 43 grad. 6 min. A quâ ſi auferatur minima ſemidiameter, 41 grad. 0 min. emergit iridis craſſities 2 grad. 6 min. circiter, vel potius 2 grad. 37 min. additâ diametro ſolis 31 min. Sed cùm colores in extremitatibus ad utrumque limbum debiliores ſint, quàm quo propter nubium conterminarum ſplendorem videri poſſunt, ſenſibilis ejus craſſities duos gradus vix excedet.

172. Haud ſecus determinantur exterioris Iridis dimenſiones. Nam oſtenſum eſt in Corol. I & 2. Prop. XXXVI. emergentem radium HS ad incidentem AN minimè inclinari, cùm ſit 8RR. II − RR : : NCq. NDq; et I. 3R : : ND. NE. Quamobrem pro radiorum maximè refrangibilium ſinibus, I & R, ſubſtitutis numeris 185 & 138 ut ſuprà, obtinebuntur ND $= \frac{7315}{10000}$ CN, & NE $= \frac{7064}{10000}$ CN: & inde per Tabulam Sinuum arcus NL, 36 grad. 48 min. & arcus NF, 89 grad. 53 min. Atque adeo angulus AYS = 52 grad. 51 min. qui erit maxima ſemidiameter Iridis hujus. Et ſimiliter

De Arcu pro radiorum minimè refrangibilium finibus, I & R; ſubſtituendo numeros ſuprà poſitos, 183, 138, emergent ND $=\frac{3079}{10000}$ CN, & NE $=\frac{6965}{10000}$ CN. Unde per Tabulam Sinuum eliciuntur arcus NL, 35 grad. 52 min. & arcus NF, 88 grad. 18 min. Adeoque angulus AYS erit 49 grad. 2 min. Iridis nempe minima ſemidiameter. Quamobrem ſi à maximâ ſemidiametro 52 grad. 51 min. auferatur minima 49 grad. 2 min. & reſiduo addatur diameter ſolis 31 min. emerget hujus Iridis craſſities, 4 grad. 20 min. Sed propter majorem hujus quam interioris Iridis obſcuritatem, colores vix ultra craſſitiem trium graduum, vel trium & ſemiſſis, videri poſſe conjicio.

173. Jam verò, ut harum Iridum rationes conſpectui diſtinctè exhibeam, ſunto E, F & G guttæ per aerem utcunque ſparſæ; SE, SF, SG radii ſolares parallelè incidentes in guttas; EM, EN & EO radii, diverſè refrangibiles, è guttâ E poſt unam reflectionem emergentes; atque FN, FO, FP, & GO, GP, GQ conſimiles radii emergentes è guttis F ac G; nempe EO, FP, GQ maximè refrangibiles, & EM, FN, GO minimè refrangibiles, &c. Jam ſi ſpectantis oculus ad O conſiſtat, ex hypotheſi manifeſtum eſt, quòd è radiis, quos gutta E poſt unam reflexionem emittit, ſoli maximè refrangibiles, ſeu cæruliformes, quales EO, impingant in oculum; reliquis ut in EN & EM, propter minorem refractionem, prætérlabentibus. Et proinde Cæruleus color ad E conſpicietur. E radiis autem, quos gutta G poſt unam reflectionem emittit, maximè refrangibiles, quales GQ, præteribunt oculum, propterea quòd radio EO paralleli ſunt, & alterius generis radii, puta minimè refrangibiles, ſeu Rubriformes, quales GO, in eum impingent; unde Rubor apparebit in G; & ſimili diſcurſu gutta F, in medio inter E ac G poſita, radios mediocriter refrangibiles, ut FO, in oculum immittet, reliquis ut FN, FP utrinque præterlabentibus: indeque Viriditas cernetur ad F. Eadem eſt ratio guttarum omnium ad eaſdem cum his guttis apparentes diſtantias ab axe OR, qui per Solem & oculum tranſit, poſitarum; & proinde ad diſtantias illas colores undique apparebunt; hoc eſt, arcus variegatus, cujus interior limbus Cæruleo, exterior Rubro, & mediæ partes mediis coloribus tingantur; exiſtente angulo OGQ, ſive GOE, hoc eſt, latitudine arcûs, duorum circiter graduum, juxta ea, quæ jam antè

 oſtendi;

oſtendi; eſtque ſimilis diſcurſus de arcu exteriori, niſi quòd ordo colorum, propter contrariam radiorum inflexionem, contrarius evadat. Guttæ autem, quæ extra hos arcus ex unâ parte ſitæ ſunt, radios omnino nullos poſt unam vel duas reflexiones, duaſque refractiones, in oculum immittent; ex alterâ autem parte, omnigenos permiſtos; eoſque ferè inſenſibiles, & proinde nulla hujuſmodi phænomena exhibere poſſunt, ſed cœlum in illis locis colore ſolito apparebit. CÆLESTI.

174. Præter phænomena Colorum, de quibus egimus, ſunt adhuc alia haud pauca (præſertim circa Colores pertenuium lamellarum pellucidarum, quales ſunt bullarum aquoſi orbes, & aer intra vitra duo compreſſus, multarumque rerum cuticulæ pertinues) quorum cauſa & menſura abſque ratiociniis mathematicis vix poſſunt accuratè determinari; ſed in hiſce videor nimius fuiſſe, & proinde jam ad partes Matheſeos magis abſtractas me convertere decrevi.

FINIS LECTIONUM OPTICARUM.

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

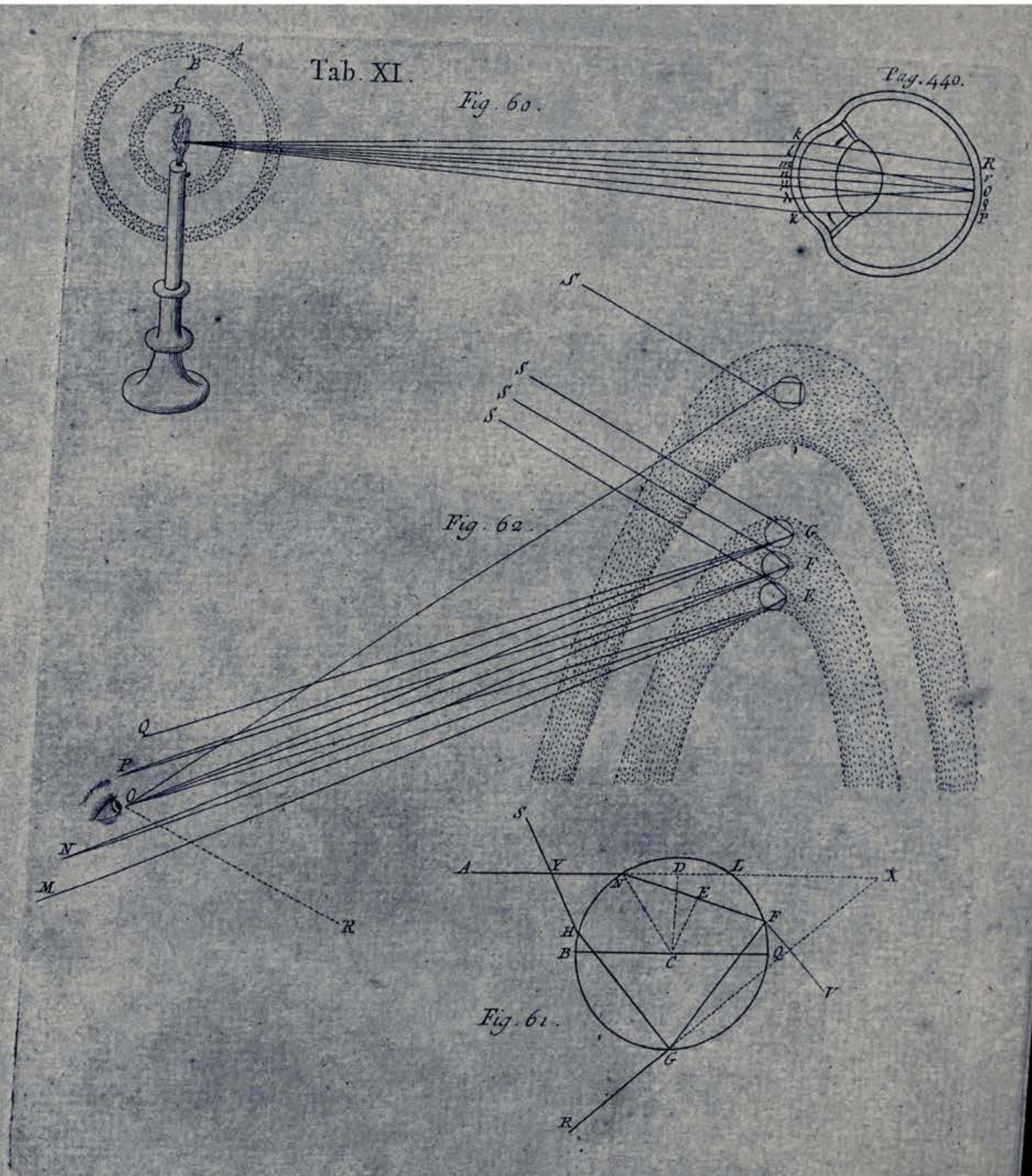
Pag. 85, lin. 23 & 28, pro 9,0827667, lege 9,0827646.
P. 109, lin. 15, pro *diametris*, lege *ſemidiametris*.
P. 281, lin. 3, pro *ad fig.* 16, lege § 31.
P. 359, lin. ult. pro *& C*, lege *&c.*
P. 371, lin. 10, pro *ille*, lege *illi*.

IN NOTIS.

Pag. 7, lin. 1, pro *Saturni Caſſino*, lege *Saturni à Caſſino*.
P. 88, lin. 4, pro 9,0827667, lege 9,0827646.
lin. 5, pro 0,09917970, lege 0,09917950.
P. 89, lin. 5, pro 0,101768369, lege 0,101768349.

IN LIBRO DE VIRIBUS CENTRALIBUS.

P. 8, lin. 23, pro Ci^2 *& area*, lege Ci^2; *& area*.
P. 12, lin. 7, pro *veniet*, lege *veniat*.
lin. 28, pro *quàm*, lege *quam*.
P. 16, lin. 23, 25, 37, 39, pro *X*, lege *x*.
lin. 39, pro *CV major*, lege *CV (fig.* 10*) major*.
P. 22, ad initium lin. 13, pro *mò*, lege *angulo qla ultimò*.
P. 38, lin. 6, pro *quadratum*, lege *quadraturam*.
P. 39, lin. 3, pro *rectam CD*, lege *rectam CD (fig.* 18.)
lin. 24, dele *(ex conſtruct.)*


Tab. XI.
Pag. 440.
Fig. 60.
Fig. 62.
Fig. 61.

SAMUELIS HORSLEII

DE

VIRIBUS CENTRALIBUS

QUÆ

RATIONEM TRIPLICATÆ DISTANTIARUM A CENTRO
CONTRARIAM INTER SE CONSTANTER SERVANT

LIBER SINGULARIS.

VOL. II.

PROBLEMA GENERALE.

CURVAM definire per quam corpus quodpiam deferatur, quod è dato puncto, ſecundam rectam poſitione datam, datâ cum velocitate emiſſum viribus deinceps incitetur, quæ datum aliquod centrum reſpiciant, et proportionem triplicatæ diſtantiarum à centro contrariam inter ſe conſtanter ſervent.

HUJUS Problematis ſunt partes duæ; prout vires centrales ex earum genere ſint quæ appetentiam centri, vel ex earum quæ fugam, corporibus inducant. Harum partium prima multifariam diſtribuenda eſt, pro vario velocitatis gradu, quâcum corpus è dato loco projectum fuerit, illius utique ratione habitâ, quam corpus quodpiam aliud, iiſdem viribus centralibus incitatum, caſu recto à diſtantiis infinitis adeptum eſſet.

PARS PRIMA.

Primum centripetæ ſint vires centrales. E dato loco V (vid. fig. 1.) ſecundum rectam VG poſitione datam, emiſſum puta corpus quoddam datâ cum velocitate. Oportet Curvam definire per quam corpus illud deferatur, ſi viribus urgeatur quæ centrum C reſpiciant, et proportionem inter ſe ſervent triplicatæ diſtantiarum à centro contrariam. Factum puta, et ſit VK curva illa quam definiendam ſuſcepimus. Velocitas quâcum corpus è loco V exierit, vel eadem erit quam corpus quodpiam aliud, urgentibus iiſdem viribus centripetis, caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum fuerit, vel minor illâ majorve erit.

PARTIS PRIMÆ CASUS PRIMUS.

Primum eadem ſit velocitas quâcum corpus per orbitam VK delatum è loco V exierit, quam corpus aliud caſu recto, à diſtantiis infinitis locum uſ-

Pars Prima. Casus Primus.

que V, adeptum fuerit. Jungatur CV, et figura ad analyſin conſtruatur, qualem ad analyſin generalem Problematis XXVIII. Libri Primi Principiorum in Notâ (r) lineavimus. In hâc figurâ (fig. 1) data recta CV deſignetur literâ a, indefinita CD literâ y. Rectæ autem CV, ſive a æqualis ſit recta VL. Jam, cùm ea ſit natura Curvæ LF, ut VL ſit ad DF ut vis centralis in loco V ad vim centralem in loco D (Prop. XXIX. Lib. I. Princip.) hoc eſt ut cubus ex CD ad cubum ex CV, idcirco erit $DF = \frac{CV^3}{CD^3} VL = \frac{a^4}{y^3}$. Erit autem $DF \times -\dot{y}$, fluxio areæ VLDF, hoc eſt $\frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y} = \overline{VLFD}$. Quare cùm ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ ſit fluens hujus fluxionis $\frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y}$, area curvæ LF, ad ordinatam mobilem DF terminata, aut æqualis erit ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$, aut eo major minorve dato. (Geometr. Flux. Th. II.) Creſcere intelligatur infinitè recta y. Area quidem curvæ LF ultimò in nihilum abierit. Area enim illa in nihilum tunc abierit, cùm punctum D ibi ſitum fuerit, ubi corporis rectâ cadentis velocitas nulla ſit; ſive ibi loci unde corpus illud rectâ cadere occepit. Illud verò à diſtantiis infinitis cecidit. Rectâ igitur CD, ſive y, infinitè creſcente, area curvæ LF, ad ordinatam mobilem DF terminatâ, ultimò in nihilum abierit. Sed et ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ (datâ utique a) ultimò in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt area curvæ LF et ſpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$. Differant enim, ſi fieri poſſit, dato; quod nota d^2 deſignet; ut ſit area curvæ $LF \pm d^2 = \frac{a^4}{2y^2}$. Jam rectâ y infinitè creſcente, et areâ curvæ LF ultimò in nihilum abeunte, ſpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$ dato d^2 vel æquale erit ultimò, vel dato d^2 auctum nihilo ultimo æquale fiet. Si primum, fiet ultimo $d^4 : a^2 = a^2 : 2y^2$, et $d : \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a : y$. Data igitur a ad rectam y datam ultimò rationem habet. Dabitur igitur rectæ y ultima quædam magnitudo, neque ultimò ea infinita erit, quam tamen infinitè creſcere poſuimus: quod eſt abſurdum. Non igitur primum illud obtinet, ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ dato eſſe ultimò æquale. Sin verò alterum, ut ſit ultimò $\frac{a^4}{2y^2} + d^2 = 0$, erit ultimò $a^4 + 2y^2d^2 = 0$, atque rurſum $y^2 + \frac{a^4}{2d^2} = 0$. Hoc eſt, quadratum ex infinitâ y, ſpatio dato $\frac{a^4}{2d^2}$ auctum, nihilo æquale erit: quod eſt abſurdum. Neutrum igitur eorum obtinebit, quorum alterum, ex eo quòd area curvæ LF à ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ dato abeſſet, neceſſariò effici oſtendimus. Non igitur dato differunt area curvæ LF ſpatiumque $\frac{a^4}{2y^2}$. Erunt igitur inter ſe æqualia.

Hinc efficietur $VQ^2 = \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{2}CV^2$.

Et $RS^2 = \frac{a^4}{2x^2} = \frac{CV^4}{2x^2}$.

Sed $ST = \frac{q^2}{y}$ (Princip. Lib. I. Sect. VIII. (Not. f.) Ergo $ST^2 = \frac{2q^4}{2y^2} = \frac{2CV^2 \times QW^2}{2y^2}$. ANALYSIS.

Hinc $RT^2 = RS^2 - ST^2 = \frac{CV^4 - 2CV^2 \times QW^2}{2y^2} = CV^2 \times \frac{CV^2 - 2QW^2}{2y^2}$.

Hoc eſt, propter $CV^2 = 2UQ^2$ (id enim oſtenſum) $RT^2 = CV^2 \times \frac{UQ^2 - QW^2}{y^2} = CV^2 \times \frac{UW^2}{y^2}$. Quare $RT = \frac{CV \times UW}{y}$.

Sed $Db = \frac{q^2}{2RT}$. Et $Dc = \frac{CV^2}{y^2} \times \frac{q^2}{2RT}$ (per formulas generales Not. f, Sect. VIII. Lib. I. Princip.) Quare $Db = \frac{q^2 \times y}{2CV \times UW}$ et $Dc = \frac{CV \times q^2}{2UW \times y}$. Hoc eſt, ſi pro q^2 ſcribatur $CV \times QW$, $Db = \frac{QW \times y}{2UW}$. $Dc = \frac{CV^2 \times QW}{2UW \times y}$. Vel denique ſi capiatur recta Q, cujus quadratum ad quadratum ex CV rationem habeat eam quam QW ad 2UW, efficietur $Dc = \frac{Q^2}{CD}$, ſive $CD \times Dc = Q^2$. Sed, propter rectas UW, QW, CV magnitudine datas, dabitur illa Q magnitudine; ac propterea quadratum ex Q magnitudine datum eſt. Rectangulum igitur $CD \times Dc$ magnitudine datum. Recta autem CD poſitione data, punctumque C datum. Ea enim poſuimus. Curva igitur *acx* ad quam eſt punctum *c* Hyperbola erit æquilatera, cujus centrum erit C, Aſymptotos recta CD, axes verò eâ magnitudine præditi, ut quadrata ex dimidiis duplo quadrati ex Q ſingulatim æqualia ſint. Datâ igitur VD, dabitur area VDc, atque huic æqualis ſector VCX, per quadraturam hyperbolæ. Datus igitur angulus VCX. Quare recta CX poſitione data. Datâ autem VD, dabitur magnitudine CD, et illi æqualis CI. Punctum igitur I dabitur in tramite corporis curvo; aſſumptiſque diſtantiis aliis alia lineæ VIK definiantur puncta. Q. E. I.

COMPOSITIO CASUS I. PARTIS I.

A centro C in rectam VG (fig. 2) demittatur ad perpendiculum recta CH. COMPOSITIO.
Capiatur CM, quæ ſit ad CV ut CH ad HV. Duarum CV, CM, capiatur CN proportione media. Centro C, ſemiaxe tranſverſo CN, ſcribatur Hyperbola æquilatera *eNf*, cujus Aſymptotæ ſint rectæ CO, CP. In harum alterutrâ, puta CO, capiatur Ca rectæ CV æqualis, & à puncto a educatur ad perpendiculum recta ab, quæ hyperbolæ in b occurrat. In eâdem Aſymptotâ, Co, capiatur quævis Cd illâ Ca minor, et à d ad perpendiculum educatur dc, quæ hyperbolæ in c occurrat, junganturque Cb, Cc. Jam centro C, radio Cv, ſcribatur circulus *vxa*, cujus capiatur ſector, *vcx*, ſectori hyperbolico bCc æqualis. Et in rectâ *cx* capiatur *ci* æqualis rectæ Cd. Curva, ad quam poſitum eſt perpetuò punctum *i*, ea erit per quam, urgentibus viribus quales poſuimus centripetas, corpus quodpiam deferetur, quod è dato loco V, ſecundum rectam VG, eâ cum velocitate fuerit emiſſum, quam corpus

PARS PRIMA. CASUS PRIMUS.

corpus aliud iiſdem viribus centripetis incitatum, rectâ cadendo à diſtantiis infinitis, in loco v adeptum fuerit.

DEMONSTRATIO.

In figurâ primâ capiatur recta CD æqualis rectæ cd in figurâ ſecundâ; CD igitur minor erit quàm CV, et circulus centro C, radio CD, deſcriptus curvam VK ſecabit. Secet in I, et maneant omnia, in figurâ illâ primâ, quæ jam antè lineavimus. Sector hyperbolicus cCb (fig. 2) trapezio hyperbolico badc æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV.) Sectori autem hyperbolico cCb ſector circularis VC*x* factus eſt æqualis. Quamobrem ſector circularis VC*x* trapezio hyperbolico badc æqualis erit. Sed et ſector circularis VCX (fig. 1) trapezio hyperbolico *a*VD*c* æqualis erat. Trapezia autem hyperbolica badc (fig. 2), *a*VD*c* (fig. 1) ſunt inter ſe æqualia. Id enim ſic oſtendo. In triangulis CVH, QUW, anguli CVH, QUW ſunt inter ſe æquales. Anguli etiam CHV, QWU inter ſe æquales, quippe qui ſunt recti. Triangula igitur inter ſe ſimilia erunt, et VH erit ad HC, ut UW ad WQ. Eſt autem 2UW ad WQ ut quadratum ex CV ad quadratum ex Q. Ita enim factum eſt. Quare UW erit ad WQ ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex Q. Rurſum (fig. 2) CV eſt ad CM ut VH ad HC; ita enim factum eſt. Sed cùm CN duarum CM, CV proportione ſit media, erit quadratum ex CV ad quadratum ex CN ut CV ad CM. Quare quadratum ex CV eſt ad quadratum ex CN ut VH ad HC. Sed oſtenſum eſt quadratum ex CV eſſe ad duplum quadrati ex Q ut UW ad WQ; necnon UW eſſe ad WQ ut VH ad HC. Quadratum igitur ex CV ad quadratum ex CN eandem quam ad duplum quadratum ex Q proportionem habet. (El. V. 11.) Quadratum igitur ex CN duplo quadrato ex Q æquale erit. (El. V. 9) Sed quadratum ex ſemiaxe hyperbolæ æquilateræ *a*D*c* (fig. 1) duplo quadrati ex Q oſtenſum eſt æquale. Eſt autem CN (fig. 2) ſemiaxis hyperbolæ æquilateræ *f*N*e*. Hyperbolarum igitur *f*N*e*, *a*D*c*, quarum utraque eſt æquilatera, harum ſemiaxes, cùm quadrata habeant æqualia, ipſi quidem inter ſe æquales erunt. Quamobrem, cùm in aſymptotâ hujus, *a*D*c*, acceptæ ſunt CV, CD illis ca, cd in aſymptotâ alterius, *f*N*e*, ſingulatim æquales, idcirco trapezia hyperbolica, badc, *a*VD*c*, ſicut modò aſſeveravimus, erunt inter ſe æqualia. Sectores igitur circulares VC*x*, VCX, qui trapeziis illis ſingulatim ſunt æquales, etiam inter ſe æquales erunt. Anguli igitur VC*x*, VCX inter ſe æquales. Rectæ autem C*i*, CI inter ſe æquales: nempe cùm illa rectæ cd, hæc verò rectæ CD æqualis; & illæ cd, CD inter ſe factæ fuerint æquales. Simili argumentatione Curvarum, V*i*, VI, radii omnes, qui cum primariis illis, CV, angulos æquales faciant, oſtendentur inter ſe æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter ſe ſimiles et æquales erunt, et in hoc Caſu Primo Partis Primæ compoſitio noſtra rectè ſe habet. Q. E. D.

De Naturâ Curvæ vi, perfectâque ejus Figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus ſpatia corpora abſolvant.

Sector hyperbolicus bCc logarithmus eſt rationis rectæ Ca ad rectam Cd. (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV. Cor.) Quare ſector circularis VC*x*,

cùm

cùm illi hyperbolico æqualis ſit, ejuſdem rationis logarithmus erit; ſive ejus quam recta cv habet ad rectam cι; nimirum cùm rectæ cv, cι illis ca, cd æquales ſint. Hinc liquet curvam v*ι*c Spiram eſſe quam vocant logarithmicam. Quòd ſi in Hyperbolæ aſymptotâ co capiatur cδ illâ ca major, eductâque à puncto δ ad perpendiculum rectâ δ*n*, quæ hyperbolæ in *n* occurrat, ſi c*n* jungatur, tum ſi ſectori hyperbolico bC*n* æqualis fiat ſector circularis vcχ, eâ vero lege, ut ſector ille vcχ ad partes rectæ vc conſtituatur earum contrarias, ad quas poſitus eſt ſector vc*x* ſectori hyperbolico bCc æqualis, ideo ſcilicet quia puncta aſymptotæ *d*, δ ad contrarias partes ſunt puncti a, punctaque item hyperbolæ c, χ ad contrarias partes puncti b; denique ſi in rectâ cχ capiatur cι rectæ cδ æqualis, punctum ι erit ad Spiram cιv, ad diſtantiam utique majorem, quàm eſt cv, à centro c productam. Atque rectam cδ perpetim augendo, Spiram vel infinitè producere licebit; quæ centrum ſuum c gyris innumeris cinget, quorum extimi longiùs ab illo diſcedunt, arctiſſimi propiùs idem accedunt, quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ. SPIRÆ LOGARITHMICÆ FIGURA.

2. Scriptâ quo diximus modo Spirâ c*ι*vι, ſi in radiis ejus *ι*c, vc, ιc productis capiantur, ad contrarias centri partes, rectæ c*h*, c*v*, c*k*, illis *ι*c, vc, ιc æquales, atque idem ſemper fiat; nova efformabitur Spira, priori per omnia ſimilis et æqualis, ſed contrariè ſinuata; nempe ut in æqualibus à communi centro c diſtantiis plagas contrarias reſpiciant. Atque hæ *Spiræ oppoſitæ* haud immeritò nominentur; quippe quibus ſimiles prorſus cognationes cum oppoſitis hyperbolis intercedant. Quo enim modo Spira prior, c*ι*vι, ex hyperbolâ *e*NF, aſymptotâ co, circuloque av*x* efformata eſt, eodem planè modo hæc alia, c*hvk*, ex hyperbolâ oppoſitâ, eâdem aſymptotâ co, eodemque circulo efformari poterit.

3. Spiræ oppoſitæ unam tantummodò figuram conſtituere cenſendæ ſunt, ſicut Hyperbolæ oppoſitæ, à quibus illæ efformatæ ſunt, unam.

4. Cùm harum Spirarum ea ſit natura, ut radii omnes à centro exeuntes æqualibus angulis ad curvam inclinentur, nullam eæ apſidem habebunt.

5. Si è puncto v, in alterâ Spirarum oppoſitarum dato, corpus aliquod ſe- De Motu in
cundum rectam vG, quæ ſpiram ibi loci contingat, emiſſum fuerit, eâ cum Spirâ Logarithmicâ.
velocitate, quam caſu recto verſus centrum c à diſtantiis infinitis adeptum eſſet, urgentibus utique viribus centripetis quæ rationem inter ſe triplicatæ diſtantiarum à centro contrariam conſtanter ſervent; corpus illud per ſpiram v*ι*c delatum gyris innumeris circum centrum c circumagetur, atque intra certum quoddam temporis ſpatium, quod quantum erit definire mox inſtituam, centrum illud propiùs quidem acceſſerit quàm pro datâ qualibet diſtantiâ; ipſum verò nunquam attinget; ſcilicet ne extra orbitam ſuam evagetur, cujus orbes infimi quidem et arctiſſimi centrum tamen intùs habent. At verò elapſo tempore illo, corpus, centrum quod tranſire ei non licuit, mirè prætergreſſum, Spiram quidem oppoſitam *hvk* invaſerit, cujus ductus ſequens, gyriſque innumeris circumactum, infinitè uſque à centro abſcedet; neque in alteram illam, quâ delatum eſt, unquam ei reverti concedetur.

6. Si manente velocitate quâcum corpus è loco v exeat, angulus acutus Velocitas.
cvG ſenſim augeatur; ultimò, cùm in rectum ille increverit, Spiræ oppoſitæ

Pars Prima. Casus Primus.

poſitæ in circulum $vxva$ migraverint; per quem utique deferetur corpus viribus, quales diximus centripetas, ſollicitatum, ſi è loco V cum velocitate illâ, quam caſus infinitus generâſſet, emiſſum fuerit, ſecundum rectam CG ſuper radio CV ad perpendiculum erectam.

7. Corporis per Spiram logarithmicam lati eadem erit in loco quovis, i, velocitas, quæ corporis, quod, urgentibus iiſdem viribus centripetis, per circulum ferretur centro C, radio Ci, ſcriptum.

8. Ad Tempora definienda, quibus corpora viribus, quales poſuimus, centripetis ſollicitata datarum ſpirarum oppoſitarum, ιvic, $cbvk$, partes datas abſolvant, opus erit, quadrare figuras quas ſpirarum illarum datæ partes claudant. Id autem hâc ratione perficio.

Quadratura Spiræ Logarithmicæ.

Jam antè obtinuimus $Db = \frac{QW \times y}{2UW}$. Cujus quidem notæ hæc eſt interpretatio. Recta Db ad rectam y (fig. 1) datam eam rationem habet quam QW ad 2UW. Linea igitur abz, ad quam eſt punctum b, recta erit poſitione data, et per centrum C tranſibit; & Spiræ ſector VCI æqualis erit quadrilatero rectilineo $aVDb$, ſive differentiæ triangulorum ſimilium CVa, CDb, quæ angulos ad V et D rectos habent. Horum autem illud CVa ad quadratum ex CV rationem eam habebit quam QW ad 4UW. Alterum autem ad quadratum ex CD, vel CI, ſimilem rationem geret. Duorum igitur differentia, ſive ſpatium $aVDb$, ſive Spiræ ſector VIC ad differentiam quadratorum ex CV, CI eandem illam rationem geret quam QW ad 4UW, ſive eam quam HC ad 4VH; nempe cùm ſit QW : UW = HC : VH (id enim jam antè oſtenſum). Hinc (in fig. 2) ſector quilibet $ViC = \frac{HC}{4VH} CV^2 - Ci^2$ & area tota Spiræ, à loco V centrum uſque, $= \frac{HC}{4VH} CV^2$. Et area $Vicb$, hoc eſt area tota ſpiræ ViC, à loco quovis V centrum uſque cum areâ oppoſitæ à centro locum uſque quemvis b, $= \frac{HC}{4VH} CV^2 + Cb^2$. Areæ vero oppoſitæ, inter loca, V, v, à centro hinc inde æqualiter remota, hæ areæ inquam ſimul ſumptæ $= \frac{HC}{2VH} CV^2$.

Tempora movendi in Spiris Logarithmicis definiuntur.

9. Hinc Tempora, quibus abſolvuntur areæ, quæ à punctis V, i initium ſumentes circa centrum deſinunt, erunt inter ſe ut quadrata è radiis VC, iC, à quibus areæ illæ initium ſumant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cùm à communi radio VC initium ſumpſerint, ad radios ejuſdem Spiræ diverſos, Ci, Cl, deſinunt, erunt inter ſe ſicut ſpatia quibus quadratum à radio VC, à quo areæ illæ communiter initium ſumant, ſuperat quadrata à radiis Ci, Cl, ad quos illæ ſingulatim deſinant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cum à communi radio VC initium ſumſerint, ad radios, Ci, Cb, ſpirarum oppoſitarum deſinunt, erunt inter ſe ut ſpatia $VCq - Ciq$, $VCq + Cbq$.

Conferuntur cum Temporibus in Circulis.

10. E loco V (fig. 3) exeant corpora duo, quorum alterum per Circulum centro C, radio CV, ſcriptum feratur, alterum per Spiras logarithmicas oppoſitas ViC, Cbv, urgentibus utique viribus quæ centrum C reſpiciant, et rationem

triplicatæ

triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervent. Spirarum alteram recta VG in puncto V contingat. Tempus, quo corpus per ſpiras latum à puncto V ad punctum *v* ſpiræ oppoſitæ, æquali diſtantiâ à centro atque alterum V remotum, pervenerit, hoc inquam tempus ad tempus converſionis integræ corporis in circulo circumacti rationem habebit, quæ componetur è rationibus quas radius circuli ad circuitum ejus, atque ad ſinum complementi anguli CVG habet. TEMPORA IN SPIRIS LOGARITHMICIS.

A centro C in rectam VG demittatur ad perpendiculum recta VH. Exponatur recta T datæ cujuſvis longitudinis. Sit alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus converſionis integræ in Circulo ad tempus tranſlationis de loco V in locum *v* per Spiras. Dico illam T ad hanc Θ rationem habere eam, quæ componitur è rationibus rectæ CV ad circuitum circuli XV*v*, qui rectam illam radium habet, ejuſdemque CV ad rectam VH. Vel quod perinde eſt, poſito circuitum circuli XV*v* rectæ P æqualem eſſe, dico T eſſe ad Θ ut quadratum ex CV ad rectangulum VH × P.

Sint enim VC*b*, VC*a* ſectores circuli ſpiræque motûs initio ſimul confecti; & habeat recta *t*, ad rectam T rationem illam, quam tempus quo conficiuntur ſectores illi ad tempus tranſlationis de loco V in *v* per ſpiras. Habebit itaque eadem *t* ad Θ rationem illam, quam tempus quo conficiuntur ſectores, VC*b*, VC*a* ad tempus converſionis integræ in circulo. Habeat autem illa *t* ad aliam rectam *v* proportionem eam quam ſector ſpiræ VC*a*, ad ſectorem circuli VC*b*. Deſignet litera A ſpatium illud, quod ſpiræ oppoſitæ inter loca, V, *v*, intùs habent. Jam ſpatium A ad aream totam circuli V*v*X rationem habet, quæ componitur è rationibus ſpatii illius A ad ſectorem VC*a*, ſectoris VC*a* ad ſectorem VC*b*, ſectoriſque VC*b* ad aream circuli. Quæ verò ſpatii A ad ſectorem VC*a* ratio, ea eſt temporis quo conficitur ſpatium A, motu corporis per ſpiras, ad tempus quo conficitur ſector VC*a*; ſive rectæ T ad rectam *t*. Quæque ſectoris VC*a* ad ſectorem VC*b* eſt ratio, ea eſt rectæ *t* ad rectam *v*. Quæque ſectoris VC*b* ad aream circuli, ea eſt temporis quo conficitur ſector VC*b* ad tempus converſionis integræ in circulo; ſive rectæ *t* ad rectam Θ. Spatium igitur A ad aream totam circuli rationem habet compoſitam è rationibus rectæ T ad *t*, rectæque *t* ad *v*, rectæque *t* ad Θ; ſive compoſitam è rationibus rectæ T ad *v* rectæque *t* ad Θ; ſive eam quæ eſt rectanguli T × *t* ad rectangulum Θ × *v*. Spatium inquam A eſt ad aream circuli V*v*X ut rectangulum T × *t* ad rectangulum Θ × *v*.

Jam verò *t* ad *v* rationem habet quam ſector ſpiræ VC*a* ad ſectorem circuli VC*b*; quæ eadem eſt, quam CH ad CV. Nam velocitates quibus corpora duo, quorum alterum per circulum, alterum per ſpiras feratur, è loco V exeant, hæ neceſſariò inter ſe æquales erunt; cùm ea utraque eſſe debeat, quam, urgentibus quales poſuimus viribus centripetis, corpora caſu recto à diſtantiis infinitis, locum uſque V, adepta fuerint. Sed propter velocitates illas inter ſe æquales, arcus naſcentes ſpiræ circulique V*a*, V*b*, primò quidem inter ſe æquales erunt. Sectoribus igitur naſcentibus VC*a*, VC*b* prima ratio, cùm ea ſit illa quæ rectangulis etiam naſcentibus V*a* × CH, V*b* × CV prima eſt, ea erit quæ rectis datis CH, CV inter ipſas intercedat. Quæ verò ſectoribus VC*a*, VC*b* naſcentibus prima fuerit ratio,

PARS PRIMA. CASUS PRIMUS.

ratio, ea quidem, dummodo ſimul conficiantur, ſemper inter eos manet. Nam utcunque alterum illorum augeri velis, tempus, quo confectus fuerit, ſimili ratione augebitur. Et pro temporis ratione alter etiam augebitur. Manet igitur ſectoribus illis quæ naſcentium prima fuit ratio, ſive rectæ CH ad rectam CV. Habet igitur, ſicut modò aſſeveravimus, recta t ad v rationem illam quam CH ad CV. Rectangulum igitur T × t ad rectangulum Θ × v, ſive ſpatium A ad circulum VvX, rationem habet eam, quam rectangulum T × CH ad rectangulum Θ × CV (per El. V. 11.) Atqui ſpatium A ad dimidium quadrati ex CV rationem habet eam, quam CH ad VH (ſecundum ea quæ ſuprà oſtendimus § 8.) Et dimidium quadratum ex CV ad aream circuli VvX rationem habet eam quam CV ad P. Nimirum cùm area circuli rectangulo ½ CV × P æqualis ſit, ſecundum ea quæ demonſtravit Archimedes. Spatium igitur A ad aream circuli VvX rationem habet compoſitam è rationibus rectæ CH ad VH, rectæque CV ad P; ſive eam, quæ eſt rectanguli CH × CV ad rectangulum VH × P. Quare rectangulum T × CH erit ad rectangulum Θ × CV ut rectangulum CH × CV ad rectangulum VH × P (El. V. 11.) Permutando T erit ad CV ut rectangulum Θ × CV ad rectangulum VH × P. Quare et rectangulum T × CV ad quadratum ex CV ut Θ × CV ad VH × P. Permutando $T : \Theta = CV^2 : VH \times P$. Q. E. D.

Hinc ſi tempus converſionis integræ in Circulo deſignetur literâ Θ, tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras illud erit, quod Algebra his notis deſignaverit $\frac{CV^2}{VH \times P}\,\Theta$. Atque hujus temporis dimidium illud erit, intra cujus ſpatium corpus è loco V egreſſum, ut per ſpiram Vc deferatur, centrum propiùs acceſſerit quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ.

11. Cùm ſit T ad Θ ut CV^2 ad VH × P, erit T ad ½ Θ ut CV^2 ad VH × ½ P. Hinc ſi talis ſit angulus CVH, cujus coſinus rationem ad radium habeat quam radius ipſe ad dimidium circuli circuitum, nimirum ut rectangulum VH × ½ P, quadrato ex CV æquale ſit; tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras, quarum radii eo angulo ad tangentes inclinentur, dimidio temporis converſionis in circulo æquale erit. Hoc eſt, idem erit de loco V in v tranſlationis tempus, ſive per ſpiras, quâ diximus ſpecie præditas, ſive per circulum corpus transferatur. Cæterùm in hâc ſpirarum ſpecie, anguli CVH amplitudinem calculi produnt, 71° — 26′ — 21″,4 quantum ferè numeris eam exigere liceat.

12. Corpus igitur è loco V egreſſum, ſi per hanc ſpiram delatum fuerit, eo temporis ſpatio, quo corpus aliud ex eodem loco ſimul egreſſum quadrantem circuli abſolverit, centrum ipſum C propiùs quàm pro datâ diſtantiâ acceſſerit.

Conferuntur Tempora in Spiris diverſâ Specie.

13. Intelligantur circum centrum commune C binæ ſpiræ logarithmicæ oppoſitæ, quæ in locis V, v ſe mutuo interſecent (fig. 4). Harum alteram in puncto V contingat recta VG, alteram Vg: et à centro C in rectas VG, Vg deducantur ad perpendiculum CH, Ch. Dico tempora tranſlationum de loco V, in v, per ſpiras diverſas, atque adeo horum temporum dimidia, ſive tempora quibus corpora è loco V ſimul egreſſa, ſi per has ſpiras deferantur, centrum C propiùs acceſſerint quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ, dico hæc

tempora

tempora inter ſe rationem habere rectarum VH, Vb contrariam; ſive contrariam ejus, quam angulorum, quibus radii ſpirarum ad Curvas inclinantur, coſinus inter ſe habent.

Erit enim tempus tranſlationis per ſpiras quas recta VG contingit, ad tempus converſionis integræ in circulo cujus radius CV, ut quadratum ex CV ad rectangulum VH × P (§ 10. hujus). Tempus item converſionis integræ in illo circulo erit ad tempus tranſlationis per ſpiras alteras, quas recta Vg contingit, ſicut rectangulum Vb × P ad quadratum ex CV. Ex æquo perturbatè, tempus tranſlationis per ſpiras primas ad tempus tranſlationis per alteras ut Vb × P ad VH × P; hoc eſt ut Vb ad VH. Q. E. D.

14. Manente jam angulo CVH, ille alter CVb quovis modo fluat. Ut ſpiræ, quæ per locum V eâ lege ductæ fuerint, ut rectam mobilem Vb in loco V contingentem ſemper habeant, ſpeciem uſque mutent. Jam cùm in omni magnitudine anguli CVb maneat illa temporum ratio, ut ſit tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras ſtabiles, quas recta poſitione data VH contingit, ad tempus tranſlationis per ſpiras mutabiles, quas contingit ſemper recta mobilis Vg, ſicut Vb ad datam VH, etiam evaneſcente angulo CVb, ratio temporis tranſlationis per ſpiras ſtabiles ad tempus tranſlationis per ſpiras mutabiles, figuram ultimam induentes, ea erit, quæ eſt ultima rectæ mutabilis Vb ad datam VH. Evaneſcente autem angulo CVb, ſpiræ mutabiles, quas recta Vb ſemper contingit, ultimò quidem in ipſam rectam Vv abeunt. Et tempus tranſlationis per has ſpiras fit ultimò tempus tranſlationis per illam rectam. Recta autem Vb ipſi VC fit ultimò æqualis. Tempus igitur quo corpus, caſu recto à diſtantiis infinitis centrum petens, à loco V centrum uſque deferretur, indeque rurſum motu continuato locum V ad contrarias centri partes æqualiter remotum attingeret, hoc inquam tempus ad tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras ſtabiles, quas recta poſitione data VG contingit, rationem habebit eam quam VH ad CV.

Tempora Caſûs recti.

15. Ponatur angulus CVH talis eſſe, qualis eſſe debet, ut tempus tranſlationis de loco V in v, per ſpiras quas recta VH contingit, idem ſit quod tempus dimidiæ converſionis in Circulo, cujus radius CV. Tempus igitur trajectionis rectæ de loco V in v, corpori utique quod à diſtantiis infinitis caſu recto centrum petierit, erit ad tempus dimidiæ converſionis in circulo illo ut coſinus anguli cujus amplitudo eſt $71°—26'—21''$,4, ad radium. Temporis item caſûs recti de loco V in centrum, nempe poſt caſum rectum à diſtantiis infinitis locum uſque V, ad tempus, quo corpus in illo circulo quadrantem circuitûs abſolveret, eadem erit ratio: nimirum coſinûs anguli $71°—26'—21''$,4 ad radium, ſive radii ad dimidium circuli ambitum.

Conferuntur cum Temporibus in Circulis.

16. Tempora quibus corpus à locis ejuſdem ſpiræ diverſis, V, i, ad diſtantiam à centro delatum fuerit omni datâ propiorem, erunt inter ſe ſicut quadrata è radiis CV, Ci per loca illa ductis (per. § 9). Tempora autem illa cum temporibus converſionum in circulis, quorum radii ſunt CV, Ci, proportione convenient (id quod ex § 10. ſatis patet). Converſionum igitur in circulis inæqualibus, circum centrum commune, Tempora rationem inter ſe ſervant radiorum duplicatam; quod cum iis conſentaneum eſt, quæ in Corollario 7. Propoſitionis IV. Libri Primi Principiorum, de Temporibus converſionum in Circulis, Newtonus generatim tradidit.

Conſenſus doctrinæ noſtræ cum Newtonianâ.

17. Tempora

Tempora caſûs recti in centrum duplicatam diſtantiarum à centro rationem ſervant.

17. Tempora caſûs recti centrum uſque è locis diverſis (poſt caſum rectum ab infinitis utique diſtantiis locum uſque ſuperiorem) cùm ad Tempora converſionis in Circulis, circum centrum commune per loca illa ductis, datam rationem gerant (per § 15.) duplicatam diſtantiarum rationem inter ſe ſervabunt.

ΨΕΥΔΑΡΙΟΝ.

18. Quid autem? Temporis caſûs recti, è loco puta v centrum uſque c, ſi ex eo juſta æſtimatio veniet, quòd evaneſcente contactûs angulo *b*vc linea recta vc ſpirarum, ſpecies uſque mutantium, ultima ſit figura; quidni Tempus etiam converſionis in Circulo ſimili ratione æſtimare liceat? Nimirum ex eo quòd ſi angulus ille *b*vc contrario modo fluat, ut jam creſcat qui ante evaneſcere ponebatur, Spiræ, quas recta mobilis v*b* in puncto v ſemper contingit, quæque ſpeciem uſque mutant, hæ ultimò quidem, cum angulus ille in rectum increverit, figuram circularem induant; ejus nempe circuli, qui centrum c, radium cv habet. Num igitur tempus, quo corpus de loco v in *v* per circulum illum transferatur, ad tempus tranſlationis de loco v in *v* per ſpiras poſitione datas, quas in dato puncto v recta vh poſitione data contingat, rationem habebit, quæ datæ vh ad rectam v*b* mutabilem ultima erit? At verò recta v*b*, cùm angulus cv*b* rectus fuerit factus, in nihilum planè abierit. Tempus igitur tranſlationis de loco v in *v* per circulum, ſi hoc modò verè æſtimatum ſit, ad Tempus tranſlationis per ſpiras majus erit quàm ut datam aliquam rationem gerat. Sint igitur ſpiræ eâ ſpecie prædítæ, quam in § 11. definivimus. Jam tempus tranſlationis de loco v in *v* per circulum tempori tranſlationis per ſpiras æquale ſit, ſecundum ea quæ in § 11. demonſtravimus. Tempus igitur tranſlationis de loco v in *v* per circulum ei æquale erit, quod magis quàm pro datâ quâvis ratione exſuperare debet. Quo nihil quidem abſurdius excogitari poteſt. Quid igitur? An nos in temporum per circulum ſpiraſque comparatione falſi ſumus, quàm antè in § 10. facere inſtituimus, an tunc potius in lubrico ſumus verſati, cùm tempus caſûs recti definire inciperemus, ex figuræ illius conſideratione, quam, evaneſcente angulo contactûs, Spiræ, ſpeciem uſque mutantes, ultimò quaſi induerent, quamque rectam eſſe pronuntiavimus? Neutrum horum quidem. Sed in § 10. comparatio temporum rectè inſtituta eſt, rationumque concluſiones veriſſimè ſunt ſubductæ; et ſpiras, evaneſcente contactûs angulo, in rectam ultimò abire veriſſimè pronuntiatum eſt; et ex eo quòd in rectam eæ ultimò abierint, haud temerè nobis eſt incepta Temporis caſûs recti æſtimatio. Ille verò temerè & imperitè fecerit, qui ex eo quòd increſcente contactûs angulo ſpiræ ultimò, cùm rectus ille fiat, in Circuli figuram quodammodo abeant, Tempus converſionis in circulo ſimiliter æſtimare velit. Is enim ſimilitudinem ſibi finxerit, ubi reverâ nulla eſt. Licet enim increſcente angulo contactûs cv*b*, ultimò quidem, cùm in recti amplitudinem ille increverit, pro omni Spirarum figurâ ſola Circuli, radio cv ſcripti, figura remanebit, ut nos ipſi ſupra § 6. monuimus, haud tamen eodem modo Spiræ in Circulum abeunt, atque angulo cv*b* evaneſcente in Rectam. Etenim in Rectam abeuntes in ſimplicem rectam abeunt, nimirum ſpiræ vc in rectam ſimplicem vc; ſpiræ alteræ c*v* in ſimplicem c*v*; totaque adeo oppoſitarum ſpirarum figura in rectam ſimplicem

plicem vc*v*; cui innumeri ſpiræ utriuſque orbes, qui loca illa v, *v* interjacent, ultimò æquales fiunt. Licet enim utraque ſpirarum oppoſitarum, qualiſcunque ſit anguli cv*h* amplitudo, gyris innumeris centrum cingat, atque adeo punctis innumeris radium cv ſecet; angulo tamen illo infinitè imminuto, orbes omnes utriuſque interiores infinitè quidem anguſti fiunt; adeo ut radii interiores c*i*, c*h* (fig. 2) omni datâ rectâ minores uterque fiant. Orbes igitur utriuſque ſpiræ interiores in ipſum quaſi centrum ſeſe contrahunt, et ex punctis innumeris in quibus ſpira utraque radiis occurrat, ne unum quidem inveniatur, quod non propiùs quàm pro datâ quâvis diſtantia à centro abſit. Sinus igitur curvarum v*i*, *vh*, Curvis totis (inter loca v, *v*) ultimò fiunt æquales. Angulo autem contactûs infinitè decreſcente, ſinûs utriuſque latitudo in omni parte infinitè imminuitur. Rectæ ſcilicet, quæ ab hoc vel illo in rectam v*v* ad perpendiculum deducantur, datis quibuſlibet minores fiunt. Fieri igitur nequit, quin ſinus v*i* ad rectam vc, ſinus alter, *hv* ad rectam c*v* ultimò ſe applicet, & ſinus illi ſimul ſumti, hoc eſt, ſpirarum oppoſitarum orbes innumeri, qui locis v, *v* interjacent, in rectam vc*v* abeant, atque illi æquales fiant.

Jam verò creſcente angulo cv*h*, ſpiriſque contrario, atque antè fecerunt, modo ſpeciem uſque mutantibus, videamus quid ultimò illis accidat, cùm angulus ille rectus fiat. Diximus eas in figuram Circulorum abiiſſe. Abierint verò. Haud verò in Circulum ſimplicem; ſed in innumeros, circum centrum commune c ſcribendos, eâ quidem orbium ſpiſſitudine, ut circuli v*v*x, qui omnium extimus erit, aream circuitus interiorum planè compleant. Etenim angulo contactûs infinitè aucto, ſpirarum oppoſitarum, è locis v, *v* egredientium, orbes omnes interiores ampliores fiunt, adeo ut radius quiſque interior v*i* datâ quâlibet rectâ major evadat, quæ ipſa radio primo cv, vel c*v*, minor ſit; & in rectâ cv nequeat dari punctum infra ipſum v, quo punctum illud ubi primâ vice, ubi ſecundâ, ubi tertiâ, ubi quotâcunque denique, Curva ex v egreſſa radium primum, cv, redux tranſierit, non propiùs tandem à puncto v remotum ſit. Neque innumeris modò gyris Spira utraque centrum cinget, atque adeo punctis innumeris radios cv, c*v* ſecabit, ſed innumera tandem erunt interſectionum puncta, quæ datam quamlibet radii utriuſque, cv vel c*v*, portionem occupabunt; gyri pariter erunt innumeri, qui ſpatia ampliora, quàm eſt area cujuſvis circuli, qui ipſo v*vx* minor ſit, ſingulatim intùs continebunt. Gyri autem illi innumeri ultimò in circulos abibunt innumeros, quorum omnium ambitus integri ſimul ſumti, infinitam quandam efficient longitudinem, cui ſpiræ oppoſitæ ultimò æquales fiunt. Creſcente igitur angulo cv*h* ut rectus fiat, Spiræ, quas in puncto v recta mobilis v*h* contingit, ſpeciem uſque mutantes, in figuram circularem longè alio modo abeunt, atque illæ in rectam abierunt, quæ ſpecies ſuas contrario modo uſque mutavere, dum angulus ille ſenſim evaneſceret. Siquidem illæ in Rectam abiere ſimplicem, longitudine finitâ præditæ. Hæ verò in Circulos abeunt innumeros, immenſam planè longitudinem affectantes. Jam verò tempus quod attinet tranſlationis de loco v in *v* per Spiras, cùm in omni id ſpirarum ſpecie ex temporibus converſionum omnium in innumeris ſpirarum oppoſitarum orbibus conflatum

tum ſit, ſiquidem corpus per ſpiras de loco V in locum *v* non aliter transferatur, niſi cùm orbes innumeros locis V, *v* interſcriptos emenſum ſit; cùm præterea, angulo CV*h* in rectum aucto, ex ſpirarum orbibus innumeri tandem ſint, qui circulum quemvis exſuperent ipſo V*v*X minorem; cùm converſionibus ſingulis, per orbes circulo V*v*X non minores, tempora etiam tribuenda ſint tempore converſionis integræ per circulum V*v*X non minora; cùm denique tempora illa innumera, quæ dato ſingulatim non minora ſint, ſimul ſumpta infinitam quandam durationem conficiant: hæc inquam cùm ita ſint, certè tempus tranſlationis de loco V in *v*, per ſpiras figuram ſuam ultimam circularem induentes, quod innumeris illis converſionum in dato circulo temporibus minus eſſe nequit, id dato quovis tempore neceſſariò majus erit. Neque magis nos rationes illæ fefellerunt, quæ ex eo quòd, creſcente ſenſim contactûs angulo, ſpirarum figura ultimò, cùm rectus ille factus fuerit, in circularem abierit, tempus tranſlationis ultimum infinitum prodiderunt; quàm illæ, quæ tranſlationi per ſpiras, evaneſcente contactûs angulo & ad nihilum redacto, in rectam abeuntes, tempus ultimum finitum aſſignârunt. Næ ille verò graviter erraverit, qui ultimum illud tranſlationis tempus, per ſpiras in circulos tranſeuntes, tempori dimidiæ converſionis in circulo extimo æquandum judicaverit; cùm revera illud innumera converſionum integrarum tempora in ſe uno contineat. Quod ſi cui videar, dum hæc fuſius diſputarem, longiùs à propoſito divertiſſe, is velim meminerit, me errori arguendo operam dediſſe, qui ex eorum genere eſt, qui incautos facilè irretitos teneant; ſimulque in eam opinionem eos inducant, ut omne id genus argumenti, quod rationibus primis ultimiſque nititur, ſuſpectum habeant. Simul illud oſtendere volui, quod hujus ſeculi hominibus ſatis profecto inculcari nequit, quàm periculoſum ei futurum ſit iter, quàm tenebris caligineque merſum, cui, Phyſicam ingredienti, Geometria facem non prætulerit: quàm claro contrà colluſtrentur omnia lumine, quando ducem viæ atque comitem illa ſe præbuerit. Profecto qui errores, unde ortum ducant, quibus in rebus conſiſtant, optimè expedierit, quâ ratione vitari poſſint certiſſimè monſtrârit, is optimus erit ac certiſſimus, me judice, veritatis magiſter. Ad propoſitum redeo.

PARTIS PRIMÆ CASUS SECUNDUS. (Vid. fig. 10.)

JAM verò è loco V ſecundum rectam VG minore cum velocitate corpus intelligatur emitti, quàm caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum eſſet. Junctâque CV, in rectâ CV productâ detur punctum A, unde ſi corpus rectâ cecidiſſet, velocitatem in loco V adeptum eſſet æqualem ei, quâcum è loco V ſecundum rectam VG exire geſtit. Et manentibus quæ ad analyſin generalem Problematis XXVIII. Libri I. Principiorum in Notâ (f) lineavimus, intelligatur jam AB rectæ AC æqualis. Dataque CA vel AB deſignetur literâ *a*; data CV, literâ *c*; indefinita CD, literâ *y*. Jam cùm è naturâ Curvæ BF, AB ſit ad DF ut vis centralis in loco A ad vim centralem in loco D, hoc eſt, ut cubus ex CD ad cubum ex CA vel AB, erit $DF = \frac{AB^3}{CD^3} AB = \frac{a^4}{y^3}$. Ergo $DF \times -\dot{y}. = -\frac{a^4}{y^3}\dot{y}$. Harum verò

fluxionum

fluxionum fluentes ſunt, alterius quidem area Curvæ BF ad ordinatam DF terminata, alterius ſpatium his notis deſignatum $\frac{a^4}{2y^2}$. Spatium igitur Curvæ BF ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ aut æquale erit, aut alterum altero majus dato. Cùm verò rectæ, quæ poſſint ſpatia BADF, ſint ſemper ut velocitates corporis caſu recto centrum C petentis; quando ordinata DF eum ſitum obtineat, ut corporis ad punctum D, unde illa educta ſit, velocitas ad nullam fuerit redacta, tum profecto recta quæ poterit aream BADF, atque area adeo ipſa, in nihilum abierit. Fluat igitur recta CD, uſquedum punctum mobile D in locum A perveniat, ordinataque DF cum ipſâ AB congruat. Tum demum velocitate corporis ad nullam redactâ, quippe cùm corpus ex ipſo loco A caſum rectum occeperit, area BADF in nihilum abierit. At verò in eo ſitu puncti D ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ dimidio quadrati ex a, vel AC, fit æquale; nempe cùm y, vel CD, ipſi CA æqualis facta fuerit. Spatium igitur $\frac{a^4}{2y^2}$ areâ BADF dato $\frac{1}{2}a^2$ ſemper majus erit. Ut ſit area BADF $=\frac{a^4}{2y^2}-\frac{1}{2}a^2$. Hinc efficietur $UQ^2=\frac{a^4}{2CV^2}-\frac{1}{2}a^2=\frac{CA^2}{2CV^2}CA^2-\frac{1}{2}CA^2$. Et $RS^2=\frac{a^4}{2y^2}-\frac{1}{2}a^2$.

Sed $ST=\frac{q^2}{y}$ (Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. [f]). Ergo $ST^2=\frac{2q^4}{2y^2}=\frac{2CV^2\times QW^2}{2y^2}$. Hinc $RT^2=\frac{a^4-2q^4}{2y^2}-\frac{1}{2}a^2$.

Deſignet b rectam, quæ datarum illarum CV, $\sqrt{2UW^2+CA^2}$ proportione media ſit. Erit igitur quadratum ex b rectangulo $CV\times\sqrt{2UW^2+CA^2}$ æquale. Sive algebraicè $b^2=CV\times\sqrt{2UW^2+CA^2}$; et $b^4=CV^2\times\overline{2UW^2+CA^2}=CV^2\times\overline{2UQ^2-2QW^2+CA^2}$. At verò ex eo quòd inventum eſt $UQ^2=\frac{CA^2}{2CV^2}CA^2-\frac{1}{2}CA^2$, efficitur $2CV^2\times UQ^2=CA^4-CV^2\times CA^2$. Atque hinc rurſum $b^4=CA^4-2CV^2\times QW^2=a^4-2q^4$. Cùm igitur inventum eſt $RT^2=\frac{a^4-2q^4}{2y^2}-\frac{1}{2}a^2$, erit idem $RT^2=\frac{b^4}{2y^2}-\frac{1}{2}a^2=\frac{b^4-a^2y^2}{2y^2}$. Quare $2RT=\frac{\sqrt{2b^4-2a^2y^2}}{y}$. Sed $Db=\frac{q^2}{2RT}$. Et $Dc=\frac{CV^2}{y^2}\times\frac{q^2}{2RT}$ (per formulas generales Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. [f], traditas.)

Quare $Db=\frac{q^2\times y}{\sqrt{2b^4-2a^2y^2}}$. Et $Dc=\frac{CV^2\times q^2}{y\sqrt{2b^4-2a^2y^2}}$. Hâc ultimâ formulâ definitur Curva acx; atque hæc eſt illa, cujus facilem quadraturam in Corollario tertio Propoſitionis quadrageſimæ primæ Libri Primi Principiorum Newtonus prædicavit. Reverâ ex earum genere eſt, quas in formam primam Claſſis quartæ Tabulæ ſecundæ Libri ſui de Quadraturâ Curvarum Newtonus concluſit. Datâ igitur VD, ope illius Tabulæ dabitur area AVDc, ex relatione quæ illi cum datâ quâdam areâ conicâ intercedat. Datâ autem areâ AVDc, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut in caſu ſuperiori,

ANALYSIS CASUS SECUNDI PARTIS PRIMÆ.

Pars Prima. Casus Secundus. riori, dabitur; aſſumptiſque diſtantiis aliis, alia definientur Curvæ VIK puncta. Q. E. I.

COMPOSITIO CASUS II. PARTIS I.

In rectâ CV, infinitè producendâ (fig. 5), capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam AB, ſeu CA, proportionem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ b. Jungatur CB, & à puncto C ad perpendiculum cum rectâ CA educatur ce, quæ junctæ CB fiat æqualis. Centro C ſemiaxe tranſverſo ca, ſecundo ce, ſcribatur hyperbola asr. Punctum V non erit extra hanc hyperbolam. Cùm enim ea ſit recta b, cujus quadratum rectangulo $CV \times \sqrt{2UW^2 + CA^2}$ æquale ſit, certè non minus erit quadratum ex illâ b quàm rectangulum $CV \times CA$. Haud minus igitur erit quadratum ex b, quàm ut habeat ad quadratum ex CV rationem eam, quam rectangulum $CV \times CA$ ad quadratum ex CV; ſive eam, quam recta CA ad rectam CV. Sed talis ſumpta eſt recta ca, ad quam illa CA haberet proportionem eam, quam quadratum ex b ad quadratum ex CV. Habet igitur CA ad ca rationem quam b^2 ad CV^2. Non minor igitur erit illa CA quàm ut habeat ad ca proportionem eam quam CA ad CV. Invertendo, ca non erit major quàm quæ habeat ad CA proportionem quam CV ad eandem CA. Quare ca non major erit quàm CV. Sed major eſſe deberet, ſi punctum V extra hyperbolam eſſet. Non eſt igitur extra hyperbolam punctum V. Recta igitur ab illo V ordinatim ad axem tranſverſum educta hyperbolæ occurret. Educatur, & hyperbolæ in s occurrat.

Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum x intra ſectionem, quod à vertice ſectionis conicæ a longius ſit remotum, quàm eſt punctum V. Educatur xr ad axem ca ordinatim, quæ hyperbolæ in r occurrat. Jungantur cs, cr. Centro C, radio CV, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector Vcp, qui habeat ad ſectorem hyperbolicum acr rationem eam quam q^2, ſive rectangulum $CV \times QW$, ad quadratum ex CA. Ducatur recta rt, quæ hyperbolam in r contingens, axi ca in t occurrat. In rectâ cp capiatur CP quæ ad ct eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex ca. Si è loco V (fig. 10) ſecundum rectam VG corpus quodpiam emiſſum fuerit, eâ cum velocitate quam in loco V adeptum eſſet, ſi à loco A, nullâ vi inſitâ præditum, caſum rectum, centrum verſus, occepiſſet, hoc corpus feretur per Curvam, ejus quam punctum P (in fig. 5) perpetuò tangit per omnia ſimilem & æqualem.

DEMONSTRATIO.

In figura 10ª capiatur CD, duarum CX, CV in figurâ 5ª proportione tertiâ, exiſtentibus illis CV, necnon illis CA, illiſque AB, utriuſque figuræ inter ſe æqualibus. Et cùm CX (fig. 5) major ſit quàm CV, erit CV major quàm CD. Quare circulus centro C radio CD ſcriptus in figurâ 10ª curvum corporis tramitem ſecabit. Secet in I, reliqua verò omnia maneant quæ ad Problematis in hoc caſu reſolutionem lineavimus. Jam cùm ſit ca ad CA ut

ut quadratum ex CV ad quadratum ex b (ita enim factum eſt) capiatur β (fig. 10) duarum CV, b proportione tertia. Erit igitur ca ad CA ut CV ad β. Quare quadratum ex ca erit ad quadratum ex CA ut quadratum ex CV ad quadratum ex β. Et permutando $ca^2 : CV^2 = CA^2 : \beta^2$. Quare $ca^2 : CV^2 = 2CA^2 : 2\beta^2$. Atque rurſum permutando $ca^2 : 2CA^2 = CV^2 : 2\beta^2$. Sed propter æquales CA, AB & angulum ad A rectum, quadratum ex cB, ſive ejus æquali ce (fig. 5), quadrati ex CA duplum erit. Quapropter, cùm ſit $ca^2 : 2CA^2 = CV^2 : 2\beta^2$, erit quadratum ex ca ad quadratum ex ce ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Quapropter in hyperbolâ asr, ſpatium quo quadratum ex CX exſuperat quadratum ex dimidio axe ca erit ad quadratum ex ordinatâ Xr, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. COMPOSITIO

In figura 10ª, juncta CB occurrat rectæ Db in M. Et capiatur γ, duarum CM, b proportione tertia. Rectangulum igitur $CM \times \gamma$ æquale erit quadrato ex b, cui etiam rectangulum $CV \times \beta$ æquale erit. Rectangula igitur $CM \times \gamma$, $CV \times \beta$ inter ſe æqualia erunt. Quare γ erit ad β ut CV ad CM, & quadratum ex γ ad quadratum ex β ut quadratum ex CV ad quadratum ex CM. Eſt autem quadratum ex CD quadrati ex CM dimidium; nimirum propter æquales CD, DM, angulumque ad D rectum. Quare duplum quadratum ex γ erit ad quadratum ex β ut quadratum ex CV ad quadratum ex CD; hoc eſt, cùm tribus illis CX (fig. 5), CV, CD (fig. 10), ac proinde earum quadratis, perpetua ſit proportionis convenientia, ut quadratum ex CX ad quadratum ex CV. Quadratum igitur ex CX erit ad quadratum ex CV, ut duplum quadratum ex γ ad quadratum ex β, ſive ut quadruplum quadrati ex γ ad duplum quadratum ex β. Permutando quadratum ex CX erit ad quadruplum quadrati ex γ, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Sed oſtenſum eſt quadratum ex ca eſſe ad quadratum ex ce, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Quare illud quo quadratum ex CX (fig. 5) exſuperat quadratum ex ca, erit ad illud quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex ce ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Idem autem illud quo quadratum ex CX exſuperat quadratum ex ca eſt ad quadratum ex Xr, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Id enim jam oſtenſum eſt. Illud igitur quo quadratum ex CX exſuperat quadratum ex ca ad illud quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex ce eandem, quam ad quadratum ex Xr, proportionem habet. Quadratum igitur ex Xr æquale eſt ei quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex ce. Illud autem quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex ce quadruplum eſt quadrati ex RT in fig 10. Nam cùm tribus illis, CM, b, γ (fig. 10) perpetua ſit proportionis convenientia, idcirco quadratum ex γ erit ad quadratum ex b ut quadratum ex b ad quadratum ex CM, hoc eſt ad duplum quadrati ex CD. Verùm ut quadratum ex b ad duplum quadrati ex CD, ſic eſt quadratum ex RT, dimidio quadrati ex CA auctum, ad quadratum ex b. Namque hoc ipſum declarant notæ illæ, quas analyſis nobis expromebat, $RT^2 = \frac{b^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$. Quadratum igitur ex γ ad quadratum ex b eandem quam quadratum ex RT, dimidio quadrati ex CA auctum, proportionem habet. Quare quadrato ex γ æquale erit quadratum ex RT dimidio quadrati ex CA auctum. Et quadruplo

Pars Prima. Casus Secundus.

quadrati ex γ æquale erit quadruplum quadrati ex RT duplo quadrati ex CA, hoc eſt quadrato ex C*e*, auctum. Illud igitur quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex C*e*, quadruplum eſt quadrati ex RT. Idem verò quadrato ex X*r* jam antè oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex X*r* quadruplum eſt quadrati ex RT, ac proinde recta X*r* dupla erit recta RT.

Jam verò propter perpetuam tribus illis CX (fig. 5) CV, CD (fig. 10) proportionis convenientiam, rectangulum CX × CD, quadrato ex CV, hoc eſt dato ſpatio, æquale erit. Quare fluxio hujus rectanguli, CX × CD, nihilo æqualis erit; cujus tamen latera CX, CD, modis contrariis fluunt. Rectangula igitur $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}\times\mathrm{CD}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\overline{\mathrm{CD}}}$ erunt inter ſe æqualia, ut differentiam nullam habeant. Eorum enim differentia, ſi ulla eſſet, ſpatii CX × CD fluxio eſſet: hoc eſt, ſpatium datum flueret. Quod eſt abſurdum. Sunt igitur $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}\times\mathrm{CD}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\overline{\mathrm{CD}}}$ inter ſe æqualia. Rectarum autem AX, CX fluxiones, propter datam CA, ſunt inter ſe æquales. Hoc eſt $\dot{\overline{\mathrm{AX}}}$, $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}$ ſunt inter ſe æquales. Rectangulum igitur $\dot{\overline{\mathrm{AX}}}\times\mathrm{CD}$ æquale erit illi $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}\times\mathrm{CD}$, cui etiam illud $\mathrm{CX}\times\dot{\overline{\mathrm{CD}}}$. Quare rectangula $\dot{\overline{\mathrm{AX}}}\times\mathrm{CD}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\overline{\mathrm{CD}}}$ erunt inter ſe æqualia. Quare $\dot{\overline{\mathrm{AX}}}$ erit ad $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}$ ut CX ad CD. Quare rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{AX}}}\times\mathrm{X}r$, ſive fluxio ſpatii hyperbolici AX*r*, erit ad rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{X}r$ ut CX ad CD.

Præterea cùm ſit X*r* (fig. 5) dupla recta RT (fig. 10), dimidium rectanguli CX × X*r*, ſive triangulum CX*r*, æquale erit rectangulo CX × RT. Verùm rectæ CX, RT eodem modo fluunt. Nam RT neceſſariò fluet eodem modo, quo X*r*, cujus illa RT eſt ſemiſſis. Et X*r*, quæ ordinatim applicata eſt ad axem tranſverſum hyperbolæ, eodem modo, quo abſciſſa CX fluet. Fluunt igitur, ſicut dixi, illæ CX, RT eodem modo. Illis autem eodem modo fluentibus, fluxio rectanguli CX × RT, cujus eæ ſunt latera, ſummæ rectangulorum $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$ æqualis erit. Erit autem $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}\times\mathrm{RT}$ ad $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$, ut $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}$ ad $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}$. Sed oſtenſa eſt $\dot{\overline{\mathrm{AX}}}$, vel $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}$, eſſe ad CD ut CX ad CD. Rectangulum igitur $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}\times\mathrm{RT}$ ad rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$ rationem habet eam quam CX ad CD. Sed rectangulum etiam $\mathrm{CX}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$ ad rectangulum $\mathrm{CD}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$ rationem habet quam CX ad CD. Summa igitur rectangulorum $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$, ſive fluxio trianguli CX*r* (fig. 5), ad ſummam rectangulorum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CD}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$ rationem habebit eam quam CX ad CD. Sed oſtenſum eſt fluxionem ſpatii hyperbolici AX*r* ad rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{X}r$, ſive ad duplum rectanguli $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$, rationem habere eam quam CX ad CD. Quare & illud quo fluxio ſpatii hyperbolici AX*r* abeſt à fluxione trianguli CX*r*, hoc eſt fluxio ſectoris hyperbolici CA*r*, ad illud quo duplum rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$ à ſummâ rectangulorum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CD}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$ abeſt, hoc eſt, ad differentiam rectangulorum $\mathrm{CD}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$, $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$, eandem etiam rationem geret, quam CX ad CD. Fluxio inquam ſectoris hyperbolici CA*r* ad rectangulorum $\mathrm{CD}\times\dot{\overline{\mathrm{RT}}}$, $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}\times\mathrm{RT}$ differentiam

rentiam rationem habebit quam CX ad CD. Rectangulorum autem $\text{CD}\times\dot{\overline{\text{RT}}}$, $\dot{\overline{\text{CD}}}\times\text{RT}$ differentia fluxio eſt rectanguli CD × RT. Nempe cùm illæ CD, RT modis contrariis fluant. Fluit enim CD (fig. 10) contrario modo atque CX (fig. 5), cùm illæ CD, CX datum ſpatium contineant. Sed oſtenſa eſt illa CX eodem modo fluere quo RT. Quare CD, RT modis contrariis fluunt, rectangulorumque $\text{CD}\times\dot{\overline{\text{RT}}}$, $\dot{\overline{\text{CD}}}\times\text{RT}$ differentia fluxio erit rectanguli CD × RT. Erit igitur fluxio ſectoris hyperbolici car (fig. 5) ad fluxionem rectanguli CD × RT (fig. 10) ut CX (fig. 5) ad CD (fig. 10). COMPOSITIO

Jam verò ex æquatione illâ, quam analyſis nobis expromebat, $\text{RT}^2 \doteq \frac{b^4 - a^2y^2}{2y^2}$, deſignante utique literâ y rectam CD, veniet $\text{RT} = \frac{\sqrt{b^4 - a^2y^2}}{\sqrt{2}\times y}$; et $\text{RT}\times\text{CD} = \sqrt{\frac{b^4 - a^2y^2}{2}}$. Unde rurſum $\dot{\overline{\text{RT}\times\text{CD}}} = \frac{-a^2y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Quare $\dot{\overline{\text{CD}\times\text{RT}}} \times \frac{q^2\text{CV}^2}{a^2y^2} = \frac{q^2\text{CV}^2}{y\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}} \times -\dot{y} = \text{D}c \times -\dot{y}$. Notis autem $\text{D}c \times -\dot{y}$ deſignatur fluxio areæ $a\text{VD}c$, in figurâ 10[a]. Quare $\dot{\overline{\text{CD}\times\text{RT}}} \times \frac{q^2\text{CV}^2}{a^2y^2} = \dot{\overline{a\text{VD}c}}$. Hoc eſt, fluxio areæ $a\text{VD}c$ ad fluxionem rectanguli CD × RT rationem habet compoſitam è rationibus ſpatii q^2, ſive rectanguli CV × QW, ad a^2, ſive quadratum ex CA; quadratique ex CV ad quadratum ex y, vel CD; compoſitam igitur è rationibus rectanguli CV × QW ad quadratum ex CA, rectæque CX (fig. 5) ad rectam CD; eam igitur quæ eſt Solidi CV × QW × CX ad Solidum $\text{CA}^2 \times \text{CD}$. Sed ex ſuprà oſtenſis, fluxio rectanguli CD × RT (fig. 10) erit ad fluxionem ſectoris hyperbolici car (fig. 5) ut CD (fig. 10) ad CX (fig. 5); ſive ut Solidum $\text{CA}^2 \times \text{CD}$ ad Solidum $\text{CA}^2 \times \text{CX}$. Cùm igitur fluxio areæ $a\text{VD}c$ ſit ad fluxionem rectanguli CD × RT ut Solidum CV × QW × CX ad Solidum $\text{CA}^2 \times \text{CD}$, fluxio autem rectanguli CD × RT ad fluxionem ſectoris hyperbolici car ut Solidum $\text{CA}^2 \times \text{CD}$ ad Solidum $\text{CA}^2 \times \text{CX}$; ex æquo, fluxio areæ $a\text{VD}c$ erit ad fluxionem ſectoris hyperbolici car, ut rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA. Et cùm hæc data ſit fluxionum inter ipſas ratio, fluentibus etiam aut eadem interveniet, aut altera earum dato quodam ſpatio major erit quàm pro hâc ratione. (Geometr. Flux. Th. IV.)

Fluat igitur CD (fig. 10) donec ipſi CV æqualis evadat. Jam in fig. 5[a] ſector hyperbolicus fit cas, area autem $a\text{VD}c$ (fig. 10) in nihilum abierit. Quare ſector hyperbolicus car dato cas ſemper major erit, quàm ut habeat ad aream $a\text{VD}c$ rationem eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Sector igitur csr ad aream $a\text{VD}c$, ſive illi æqualem ſectorem ACX datam illam rationem habebit. Capiatur in fig. 5. ſector circularis $\text{VC}f$ qui ad ſectorem hyperbolicum acs rationem eam habeat, quam rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA. Punctum ipſum f erit ad Curvam, quam punctum P perpetuò tangit. Nam ſi recta, quæ hyperbolam in s contingat, axi ca in σ occurrat, erit CV ad $c\sigma$ ut quadratum ex CV ad quadratum ex ca. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLIX.) Quare cf, cùm æqualis ea ſit

 rectæ

rectæ cv, erit ad cσ ut quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Punctum igitur *f* ad Curvam eſt, quam punctum P perpetuò tangit. Præterea cùm ſector hyperbolæ a*cs* ad ſectorem circuli v*cf*, ſector item hyperbolæ a*cr* ad ſectorem circuli v*cp* rationem habeat eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum cv × QW; idcirco ſector etiam hyperbolæ *scr* ad ſectorem circuli *fcp* eandem illam rationem habebit. Hoc eſt, eandem quam ſector ille hyperbolæ *scr* ad ſectorem circularem VCX (fig. 10) oſtenſus eſt habere. Sectores igitur circulares VCX (fig. 10) *fcp* (fig. 5) inter ſe æquales. Æquales autem radii vc, *f*c. Quare anguli quoque VCX, *fcp* inter ſe æquales erunt. Rurſum cùm rectangulum CD × CX (fig. 10) æquale ſit quadrato ex cv (fig. 5) ita enim factum eſt, rectangulum autem c*t* × cx (fig. 5) æquale quadrato ex ca (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLIX.) idcirco erit CD × CX ad c*t* × cx ut cv^2 ad ca^2. Quare CD : c*t* = cv^2 : ca^2. Eſt autem CP : c*t* = cv^2 : ca^2. (Ita enim factum eſt.) Erunt igitur CP (fig. 5), CD ſeu CI (fig. 10) inter ſe æquales. Et ſimili argumentatione Curvarum VK, *f*P, radii omnes qui cum primariis illis cv, c*f* angulos æquales faciant, oſtendentur inter ſe æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter ſe ſimiles erunt & æquales. Q. E. D.

*De naturâ Curvæ f*P; *de Apſidibus ejus inveniendis, perficiendâque ejus figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus ſpatia corpora abſolvant. De Tempore converſionis integræ per Curvam perfectam, ejuſque ad tempus converſionis in Circulo, necnon ad tempus caſûs recti, ratione.*

§ I. DEFINITIO.

Puncta r & P (fig. 5), cognata dico Hyperbolæ Curvæque.

2. Curva *f*P centrum ſuum C gyris innumeris cinget, quorum arctiſſimi propiùs idem accedent quam pro datâ quâlibet diſtantiâ.

3. Capiatur CM (fig. 5) duarum ca, cv proportione tertia. Erit M punctum ubi Curva P*f*Π axi hyperbolæ ca producto occurret. Etenim fluente arcu hyperbolæ a*r*, Curvæque P*f*, arcu a*r* tandem ad nihilum redacto, radius CP congruet cum axe ca producto, punctaque *r*, X cum puncto a congruent; & ca ultima erit rectæ cx magnitudo. Jam verò cùm CD (fig. 10), ſive illi æqualis CP (fig. 5) duarum CX, cv ſemper ſit proportione tertia, cùm cx æqualis facta fuerit datæ ca, fiet CP, quam poſitione cum ca congruere oſtendimus, fiet ea duarum ca, cv proportione tertia. Rectæ igitur CM æqualis ea fiet, et punctum P cum puncto M congruet.

4. Scriptâ modo quo diximus Spirâ CP*f*M, ſi à quolibet ejus puncto Π in axem hyperbolæ ca ad perpendiculum demittatur ΠN, & in ΠN productâ, ad alteram partem axis capiatur NO ipſi ΠN æqualis, atque hoc ſemper fiat; nova efformabitur Spira MOC, prioris per omnia ſimilis & æqualis, ſed ab alterâ parte axis poſita, ſinubuſque adverſis. Hanc autem ex ſemihyperbolâ aw eodem modo efformare licet, quo alteram ex ſemihyperbolâ a*r* efformare docuimus. Jam ſi junctæ ΠC, OC ultra centrum producantur,

tur, & in productis capiantur ch, cl ipſis cπ, co æquales, atque hoc ſemper fiat; novæ rurſum exſiſtent Spiræ, priorum per omnia ſimiles & æquales, quæ priorum Oppoſitæ haud immeritò nominentur; quippe quibus eædem planè cum Hyperbolâ oppoſitâ, quæ prioribus cum hyperbolâ as*r*, cognationes intercedunt. Quo enim modo priores ex hyperbolâ as*r* efformatæ ſunt, eodem hæ ex oppoſitâ efformari poterunt. SPIRÆ HYPERBOLICÆ OPPOSITÆ.

5. Hæ Spiræ Oppoſitæ unam tantummodo figuram conſtituere cenſendæ ſunt, ſicut Hyperbolæ Oppoſitæ, ex quibus illæ ſunt efformatæ, unam.

6. Radius quiſque cp, à centro c Spiras uſque eductus, angulum cum Curvâ faciet, qui hoc modo definietur (vid. fig. 6.) Anguli radiorum cum Curvâ.

A puncto hyperbolæ cognato *r* ad axem tranſverſum deducatur *r*x ordinatim, quæ in puncto d media dividatur. In abſciſſâ cx capiatur x*g*, quæ habeat ad cx rationem eam, quam (in fig. 10) qw ad cv. Junctâ d*g*, angulus xd*g* æqualis erit ei, quo radius cp inclinatur ad Curvam.

Nam, in fig. 10, rectangulum st × cd rectangulo cv × qw æquale eſt. Id enim in demonſtratione noſtrâ Propoſitionis xli. Libri primi Principiorum oſtenſum eſt. Et in fig. 6, rectangulum cx × cp quadrato ex cv æquale eſt. Quare rectangulum st × cd (fig. 10) erit ad rectangulum cx × cp (fig. 6) ut rectangulum cv × qw ad quadratum ex cv. Quare st (fig. 10) ad cx (fig. 6) ut qw ad cv. Eſt autem x*g* ad cx ut qw ad cv. Quare st eandem quam x*g* ad illam cx rationem habet. Erunt igitur st, x*g* inter ſe æquales. Sed & xd, rt inter ſe ſunt æquales. Nimirum cùm illa xd facta eſt, & illa rt oſtenſa eſt, ſemiſſis rectæ x*r*. Anguli quoque *g*x*d*, str inter ſe æquales, rectus enim uterque. Quare & angulus x*dg* (fig. 6), angulo trs (fig. 10) æqualis erit. Sed angulus trs æqualis eſt ei, quo radius ci ad Curvam vik inclinatur, ita enim factus eſt; & propter Curvarum vik (fig. 10) *f*p (fig. 6) æqualitatem & ſimilitudinem, radii ci, cp qui æquales angulos cum primariis uterque ſuis, cv, c*f*, conſtituunt, ad Curvas item uterque ſuas æqualiter erunt inclinati. Angulus igitur x*dg* æqualis erit ei quo radius cp ad Curvam inclinatur. Q. E. D.

7. Per a verticem hyperbolæ ducatur recta a*k* quæ hyperbolam in vertice a contingat, et aſymptotarum alteri in *k* occurrat. Media dividatur a*k* in puncto *l*. Capiatur a*q*, quæ ad ſemiaxem tranſverſum eam rationem habeat, quam qw ad cv; et jungatur *ql*. Angulus quo radius quilibet Spirarum cp ad Curvam inclinatur angulo *ql*a major erit: ſed radio mobili cp circum centrum c circumacto, et infinitè imminuto, angulus inclinationis ille uſque minuetur, ut ad æqualitatem cum dato *ql*a propiùs tandem redactus erit, quàm pro datâ quâvis differentiâ. Occurrat enim x*r* aſymptotæ c*k* in v. Media dividatur xv in *h* & jungatur *gh*. Propter parallelas a*k*, xv, erit cx ad xv ut ca ad a*k*. Et cx ad ſemiſſem illius xv, ut ca ad ſemiſſem ipſius a*k*, hoc eſt ad a*l*. Eſt autem x*g* ad xc, ut qw ad cv, ſive ut a*q* ad ca. Angulus minimus.

Cùm igitur ſit x*g* : xc = a*q* : ac

et xc : x*h* = ac : a*l*

ex æquo erit x*g* ad x*h* ut a*q* ad a*l*. Anguli autem *g*x*h*, *qal* inter ſe æquales, nempe cùm uterque rectus ſit. Triangula igitur *g*x*h*, *qal* inter

ſe

Pars Prima. Casus Secundus.

ſe ſimilia, angulique gbx, qla inter ſe æquales erunt. Sed recta xr minor eſt quàm xv. Quare ſemiſſis rectæ xr minor eſt quàm ſemiſſis rectæ xv, hoc eſt xd minor eſt quàm xb. Quare angulus gdx angulo gbx, atque ejus æquali q a major (El. I. 21.) Quare et angulus quo radius CP ad Curvam inclinatur, cùm oſtenſus ſit æqualis angulo gdx, idem angulo qla major erit.

Jam verò radio CP infinitè imminuto, CX infinitè augebitur; propter perpetuam trium CP, CV, CX proportionis convenientiam. Infinitè autem auctâ CX, illæ xr, xv, atque earum proinde ſemiſſes, æqualitatem infinitè accedent, et triangula xdg, qla ſimilitudinem. Angulus igitur gdx minuetur uſque, et illi qla ultimò æqualis fiet. Quare et angulus inclinationis radii CP ad Curvam, qui eâ lege fluit ut fluenti gdx ſemper ſit æqualis, illo modò æqualis erit. Conſtat igitur propoſitum.

Spirarum Apſides.

8. Puncta a, M Hyperbolæ Spiræque ſunt cognata (per § 3. & Def.) Angulus igitur, quo radius CM ad Spiram inclinatur, æqualis erit angulo gdx, qualis tunc ille factus fuerit, cùm, radio CP in CM aucto, puncta r, x locum a, ipſum utique verticem hyperbolæ, devenerint. At verò decreſcente arcu hyperbolico ar, angulus gdx augetur uſque; et tunc cùm, arcu illo ad nihilum redacto, puncta r, x locum a devenerint, rectus ille factus erit. Radius igitur CM Curvam ad perpendiculum inſiſtit. Hoc eſt punctum M Spirarum Apſis erit. Et ſi capiatur Cm æqualis rectæ CM erit m Oppoſitarum Apſis.

Velocitas motûs in Spiris Hyperbolicis.

9. Velocitas corporis per has Spiras lati in loco quovis P erit ut recta gd. Et velocitas in Apſide erit ad velocitatem in alio quovis loco P ut qa ad gd. Namque ex iis quæ § 7. oſtendimus, liquet illam gd rectæ RS in figurâ 10 æqualem eſſe. Eſt autem RS ut velocitas in loco I illius figuræ, vel P hujus. Præterea puncto P in M tranſlato, puncta x, r transferentur in a, & gd æqualis fiet illi qa.

10. Si è loco f, in alterâ Spirarum Oppoſitarum dato, corpus aliquod ſecundum rectam, quæ ſpiram ibi loci contingat, juſtâ cum velocitate emiſſum fuerit, urgentibus utique viribus centripetis, quæ rationem inter ſe triplicatæ diſtantiarum contrariam conſtanter ſervent; corpus illud per Spiram fPC delatum gyris innumeris circum centrum C circumagetur; atque intra certum quoddam temporis ſpatium, cujus definiendi rationem mox ſumus tradituri, centrum illud propiùs quidem acceſſerit, quàm pro datâ quâvis diſtantiâ; ipſum verò nunquam attinget: at elapſo tempore illo, centrum quod tranſire ei non licuit, prætergreſſum Spiram Oppoſitam invaſerit, cujus ductum ſequens, Apſidem uſque m aſcendet. Ubi paulatim converſo rurſum, centrum verſus, itinere per Spiram mLC deferetur, centrumque ut antè prætergreſſum per ſpiram COM Apſidem uſque alteram, M, aſcendet. Inde rurſum per ſpiram AMC deferetur, eaſdemque in perpetuum ibit redibitque vias.

11. Quadraturam ſpatiorum, quæ Spirarum de quibus agimus datæ partes claudant, hâc ratione perficio.

Jam

Spirarum Hyperbolicarum Quadratura.

Jam antè per analyſin obtinuimus $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2ay^2}}$. Hinc $Db \times -\dot{y} = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}} \times -\dot{y}$. Atque hæc erit fluxio areæ aVDb, ſive illi æqualis VCI, in figurâ 10, vel areæ fCP in figurâ illâ 6, quam modò lineavimus. Area igitur VCI, vel fCP ($= \overline{|Db \times -\dot{y}|}$) ſpatio $\frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}$, ſive $\frac{q^2}{\sqrt{2} \times a}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} - y^2}$, vel æqualis erit, vel eo major minorve dato (Newton. Tab. Curv. I. Claſſ. IV. Form. 1.) idque quæcunque aſſumpta fuerit diſtantia CV, vel Cf, modo datâ CM non ſit major, quâ utique majori eſſe non licet. Ponatur igitur Cf, ipſi CM æqualis, ut area fCP in aream MCP tranſeat, et angulus CVG (in fig. 10, & illi æqualis QUW) rectus fiat. Et in figurâ 10, capiatur CM rectæ CM in figurâ ſextâ æqualis. Tum q^2 fiet CM × UQ (fig. 10), ſive CM × qa (fig. 6), et b^2 fiet CM × CA (fig. 10, ſive CM × CA (fig. 6); rectâ utique UW ad nihilum redactâ. Notæ autem $\sqrt{2} \times a$ rectam Ce ſemper ſignificant. Area igitur MCP (fig. 6) ſpatio $\frac{\text{CM} \times qa}{\text{C}e}\sqrt{\text{CM}^2 - \text{CP}^2}$ vel æqualis vel eo major minorve dato erit. Fluat y, vel CP, donec ipſi CM evaſerit æqualis. Tum puncto P in ipſum M tranſlato, area MCP in nihilum abiert. In nihilum etiam ſpatium illud $\frac{\text{CM} \times qa}{\text{C}e}\sqrt{\text{CM}^2 - \text{CP}^2}$. Area igitur MCP ſpatio iſto, quod ſimul cum eâ in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur C, radio CM, ſcribatur circulus (fig. 7) qui rectæ Ce, radium CM ad perpendiculum inſiſtenti, in punctis O, o occurrat. Ad rectam Ce (= CB fig. 5) applicetur rectangulum eZ rectangulo CM × qa æquale. In CM capiatur CΠ ſpirarum radio CP æqualis. Educatur ad perpendiculum ΠΦ, quæ circulo in Φ occurrat, et in Oo deducatur ad perpendiculum ΦΨ. Si punctum P in eâdem ſpirâ ſit, in quâ eſt apſis M, ſector ſpiræ MCP, axe CM radioque CP interceptus, rectangulo CZ × CΨ æqualis erit: area verò quæ inter brachium ſpirarum totum MPC axemque MC eſt concluſa, rectangulo CZ × CO: pars illius areæ, à loco P centrum uſque, rectangulo CZ × ΨO. Area verò MPCπ, ab apſide M per brachium ſpiræ MPC centrum uſque atque à centro rurſum uſque punctum π brachii oppoſiti, quod à centro pari diſtantiâ cum ipſo P remotum ſit, hæc inquam area rectangulo CZ × $\overline{\text{CO} + \text{O}\Psi}$ æqualis erit: atque ſpatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ intus habent, duplum erit rectanguli CZ × Oo.

Tempora movendi in Spiris Hyperbolicis definiuntur.

12. Hinc parte quartâ temporis converſionis integræ, per Spiras quo ſuprà § 11. expoſuimus modo perficiendæ, corpus ab Apſide M, per ſpiram MPC delatum, propiùs centrum C acceſſerit quàm pro datâ quâvis diſtantiâ. Tempus autem quo conficitur area, quæ, à dato ſpirarum puncto P initium ſumens, circa centrum deſinat, erit ad tempus, quo conficitur area, quæ, ab apſide M initium ſumens, circa centrum item deſinat, hoc eſt ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut ſinus verſus arcûs ejus cujus ſinus eſt CP pro radio CM ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apſide M initium ſumens, ad radium CP ejuſdem ſpiræ in quâ eſt M terminetur, erit ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut coſinus

Pars Prima. Casus Secundus.

ſinus arcûs ejus, cujus ſinus eſt CP pro radio CM, ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apſide M initium ſumens, ad punctum π ſpiræ oppoſitæ terminetur, erit ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut ſumma radii et ſinûs verſi ejus arcûs, cujus ſinus eſt $C\pi$ pro radio CM, ad radium. Atque horum ope facilis erit Temporum æſtimatio, quibus conficiantur areæ, quæ datis quibuſcunque ſpirarum radiis interceptæ ſint.

Velocitas in Spiris Hyperbolicis confertur cum Velocitate in Circulis.

13. Velocitas corporis per Spiras lati in loco quovis V (fig. 10), eſt ad velocitatem corporis quod, urgentibus eiſdem viribus centripetis, circumagitur in Circulo, cujus radius CV, ut recta quæ poſſit ſpatium illud, quo quadratum ex CA exſuperat quadrum ex CV ad rectam ipſam CA. Occurrat enim VA rectæ CB in μ. Recta VQ eſt ad rectam, quæ poteſt ſpatium illud quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CV, ut CA ad $C\mu$. Nimirum hoc ipſum vult æquatio illa, quam analyſis nobis expromebat, $VQ = \frac{CA}{\sqrt{2} \times CV} \sqrt{CA^2 - CV^2}$. At verò ſi corpus à diſtantiis infinitis cecidiſſet, ut adeptum eſſet in V velocitatem illam quæ eſt corporis in Circulo ad diſtantiam CV circumacti, VQ habuiſſet ad ipſam CA rationem eam quam CA ad $C\mu$. Id quod quivis intelliget, qui Propoſitionis XXXIX. Newtonianæ Doctrinam perceptam habeat, quique noſtram ſimul caſûs tum ſuperioris tum hujuſce analyſin memoriâ teneat. Quare illa VQ, quæ velocitatem corporis per ſpiras lati in loco V repræſentat, ad rectam, quæ poteſt ſpatium quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CV, eandem rationem habet quam altera VQ, quæ corporis in Circulo velocitatem refert, ad ipſam CA. (El. V. 11.) Permutando illa prior VQ erit ad hanc alteram ac proinde velocitas illa prior in puncto ſpirarum V, erit ad hanc alteram in circulo velocitatem, ut recta, quæ poteſt ſpatium quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CV, ad ipſam CA.

Tempora converſionum integrarum in Spiris conferuntur cum Temporibus converſionum in Circulis.

14. Scriptis Spiris quarum centrum C, apſides M, *m* (fig. 8), ſi centro C, radio CM ſcribatur Circulus, et à puncto A agatur recta AF quæ circulum illum contingat, et ſi ſit F punctum contactûs; velocitas corporis per Spiram lati in Apſide ipſâ M, ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius CM, circumacti, rationem habebit eam quam recta AF ad CA. Namque quadratum ex AF æquale eſt rectangulo $mA \times AM$ (El. III. 36.) Et hoc rectangulum eſt illud quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CM (El. II. 5.) Recta igitur AF ea eſt, quæ poteſt ſpatium quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CM. Conſtat igitur propoſitum ex ſuperiore.

15. E loco M exire intelligantur corpora duo, quorum alterum per Circulum, centro C, radio CM ſcriptum, feratur, alterum per Spiras Hyperbolicas Oppoſitas, quarum centrum C, Apſides M, *m*; urgentibus utique viribus quæ centrum C reſpiciant, et rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervent. Tempus converſionis integræ per Spiras ad Tempus converſionis integræ in Circulo rationem habebit, quæ componetur è rationibus rectæ CA ad CM, radiique circuli ad partem quartam circuitûs. Hoc eſt, ſi circuitus circuli qui radium habet CM, rectæ *p* æqualis ſit, erit Tempus converſionis per Spiras ad tempus converſionis in Circulo ut CA ad $\frac{1}{4}p$.

Exponatur

Fig. 1.

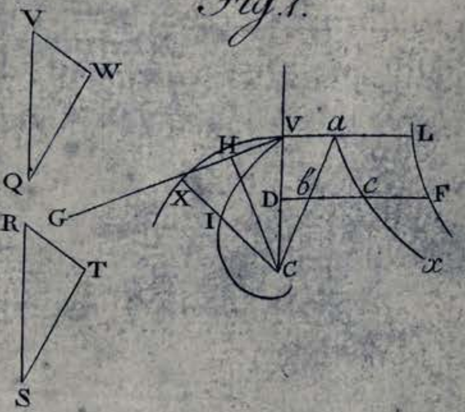


Fig: 2.

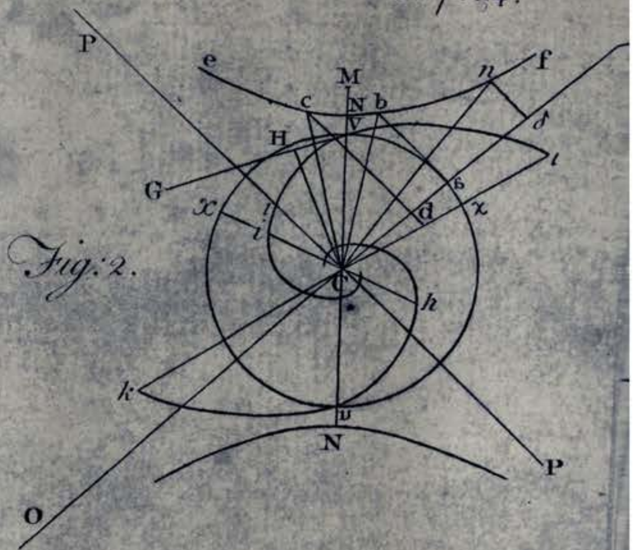


Fig: 3.

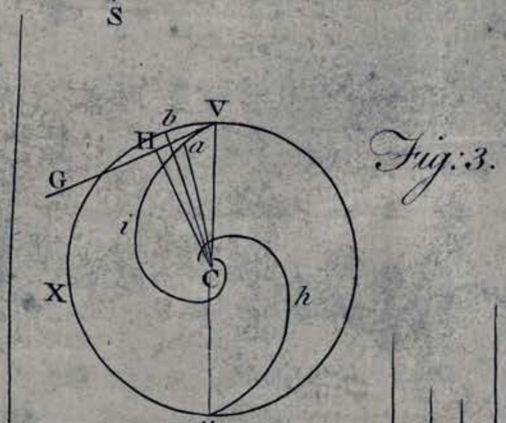


Fig: 4.

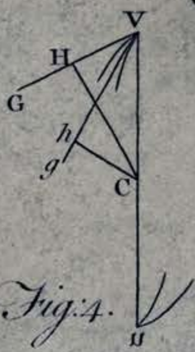


Fig: 5.

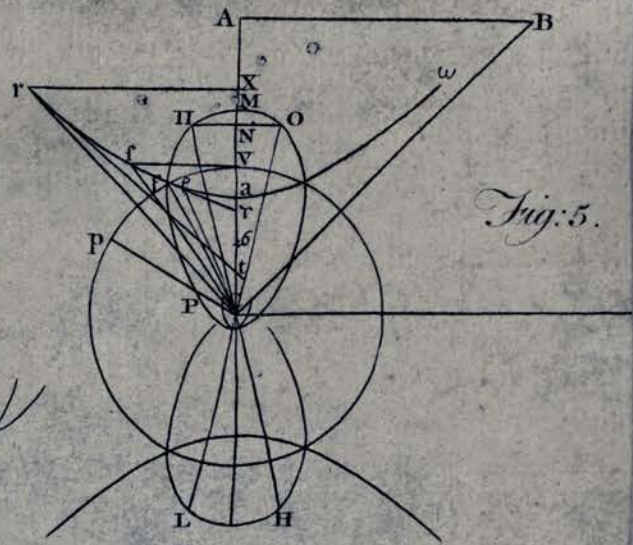


Fig: 6.

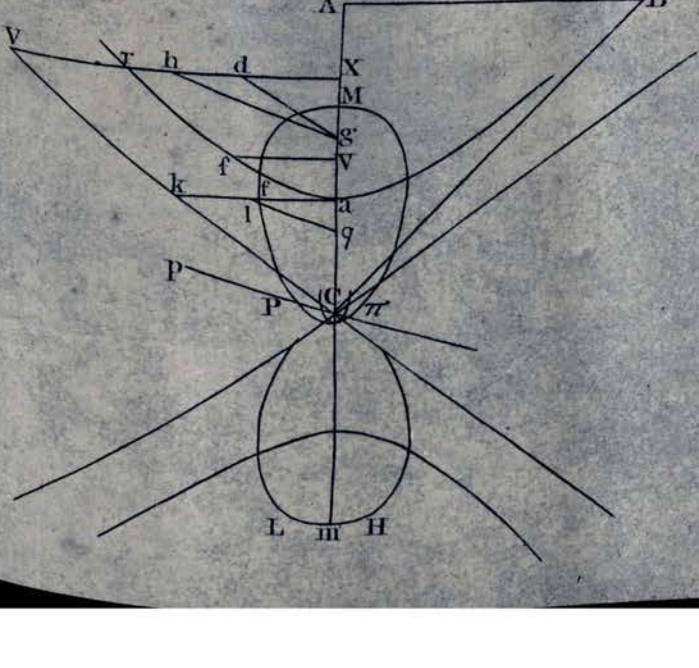
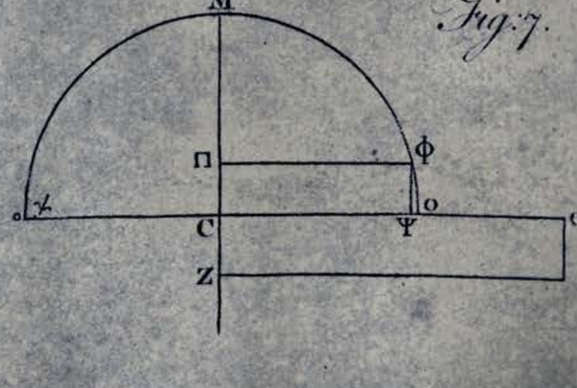


Fig: 7.



Exponatur recta T datæ cujuſvis longitudinis. Sit alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus converſionis per Circulum ad tempus converſionis per Spiras. Dico illam T ad hanc Θ rationem habere eam quam CA ad $\frac{1}{4}p$. Sint MCE, MCD ſectores Circuli Spiræque motûs initio ſimul confecti, et habeat recta t ad rectam T rationem illam, quam tempus quo conficiuntur ſectores illi ad tempus converſionis integræ per Spiras. Habeat autem t ad aliam rectam v, rationem eam quam ſector Spiræ MCE ad ſectorem Circuli MCD. Deſignet denique litera A ſpatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ intus habent. Casus Secundus.

Jam ſpatium A ad aream circuli MmF rationem habet, quæ eſt rectanguli T × t ad rectangulum Θ × v. Id enim eiſdem planè argumentis oſtendi poteſt, quibus in § 10 caſûs ſuperioris oſtendimus A eſſe ad aream circuli VvX ut T × t ad Θ × v. Jam verò t ad v rationem habet, quam ſector ſpiræ MCE ad ſectorem circuli MCD, hoc eſt, eam quam AF ad CA. Nam velocitates quibuſcum corpora duo, quorum alterum per Spiras, alterum per Circulum feratur, è loco M exeant, ſunt inter ſe ſicut rectæ FA, CA (per § 14). Et arcus naſcentes ſpiræ circulique, ME, MD, erunt primò quidem inter ſe ſicut velocitates illæ. Sectoribus igitur MCE, MCD naſcentibus prima ratio, cùm ea ſit illa quæ rectangulis etiam naſcentibus CM × ME, CM × MD eſt prima, ea erit, quæ rectis datis FA, CA intercedat. Quæ verò ſectoribus MCE, MCD prima fuerit ratio, ea quidem, dummodo ſimul conficiantur, ſemper inter eos manet. Habet igitur, ſicut modò aſſeveravimus, recta t ad v rationem illam quam FA ad AC. Rectangulum igitur T × t ad rectangulum Θ × v rationem habet, eam quam rectangulum T × FA ad rectangulum Θ × CA. Sed oſtenſum eſt ſpatium A ad aream circuli MQF rationem habere eam, quam T × t ad Θ × v. Habebit igitur ſpatium A ad aream circuli MQF rationem eam, quam rectangulum T × FA ad rectangulum Θ × CA. Atqui ſpatium A duplo rectangulo CZ × Oo æquale eſt (ſecundum ea quæ nos, § 12, oſtendimus). Et area circuli MQF rectangulo $\frac{1}{2}p$ × CM æquale eſt (ſecundum ea quæ demonſtravit Archimedes). Rectangulum igitur 2CZ × Oo erit ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × FA ad rectangulum Θ × CA. Hoc eſt, cùm recta Oo dupla ſit rectæ CM, rectangulum 4CZ × CM erit ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ſive 8CZ × CM ad p × CM, ſive denique 8CZ ad p, ut T × FA ad Θ × CA. Quare rectangulum 8CZ × Ce ad rectangulum p × Ce, ſive CZ × Ce, ad $\frac{1}{8}p$ × Ce, ut T × FA ad Θ × CA. Permutando CZ × Ce ad T × FA ut $\frac{1}{8}p$ × Ce ad Θ × CA. Rectangulum autem CZ × Ce rectangulo CM × qA æquale eſt (§ 9 & 11). Erit igitur CM × qA ad T × FA ut $\frac{1}{8}p$ × Ce ad Θ × CA. Invertendo T × FA ad CM × qA, ut Θ × CA ad $\frac{1}{8}p$ × Ce. Erit autem CM × qA ad CM × FA ut qA ad FA, hoc eſt ut CA ad MO. (Secundum ea quæ ex formulâ generali, UQ $= \sqrt{\frac{a^4 - a^2c^2}{2c^2}}$, ſuprà diſputavimus, poſito jam c = CM.) Jungatur mO. Triangula CAB, mOM, cùm angulos ad A et O rectos habent, lateraque circa angulos rectos utrumque æqualia, idcirco inter ſe ſimilia erunt. Et CA erit ad CB ut MO ad Mm. Permutando CA ad MO ut CB, vel Ce, ad Mm. Rectangulum igitur CM × qA erit ad rectangulum CM × FA ut Ce ad Mm (El. V. 11.) ſive ut $\frac{1}{8}p$ × Ce ad $\frac{1}{8}p$ × Mm.

Cùm igitur ſit $T \times FA : CM \times qa = \Theta \times CA : \frac{1}{8}p \times ce$,

Atque rurſum $CM \times qa : CM \times FA = \frac{1}{8}p \times ce : \frac{1}{8}p \times Mm$,

ex æquo, erit T ad CM ut $\Theta \times CA$ ad $\frac{1}{8}p \times Mm$. Sive cùm Mm dupla ſit rectæ CM, erit T ad CM ut $\Theta \times CA$ ad $\frac{1}{4}p \times CM$. Quare $T \times CA$ erit ad $CM \times CA$ ut $\Theta \times CA$ ad $\frac{1}{4}p \times CM$. Permutando $T : \Theta = CA : \frac{1}{4}p$. Q. E. D.

16. Hinc ſi capiatur recta CA æqualis arcui MFO, ſive parti quartæ circuitûs circuli cujus radius eſt CM, corpus è loco M ſecundum rectam quæ ſit ad perpendiculum cum radio CM emiſſum, eâ cum velocitate quam caſu recto è loco A locum uſque M adeptum eſſet, converſionem integram eodem temporis ſpatio per Spiras ſuas abſolverit, quo corpus aliud in Circulo MQF.

17. Pars quarta converſionis integræ per Spiras, hoc eſt tempus, quo corpus per Spiras ab apſide M centrum propius fuerit delatum quàm pro datâ quâvis diſtantiâ, ad tempus converſionis in Circulo rationem habebit eam quam CA ad totum circuli MmF circuitum. Nimirum cùm ſit $T : \Theta = CA : \frac{1}{4}p$, erit $\frac{1}{4}T : \Theta = CA : p$.

Tempora caſûs recti è locis datis centrum uſque conferuntur cum temporibus in circulis.

18. Cùm verò, qualiſcunque fuerit rectæ CA longitudo, eâ temporibus proportio intercedat, ut ſit tempus per Spiras ab apſide M, propiorem uſque datâ quâlibet à centro C diſtantiam, ad tempus converſionis integræ in Circulo MmF, ut recta CA ad circuitum circuli MmF; ſi recta CA paulatim decreſcat, uſquedum rectæ CM æqualis fiat, quo facto velocitas etiam corporis, è loco M ſecundùm rectam quæ radium CM ad perpendiculum inſiſtat emiſſi, paulatim decreſcet, punctoque A in ipſum M tranſlato ad nullam planè redigetur; tempus ultimum tranſlationis de apſide M centrum uſque, per ſpiras in ipſam rectam Mm ultimò abeuntes, hoc eſt tempus caſûs recti corporis, quod è loco M, nullâ vi inſitâ præditum, caſum occeperit, tempus inquam caſûs recti hujus corporis, è loco M centrum uſque, erit ad tempus converſionis in circulo MmF ut CM ad circuitum circuli MmO, hoc eſt ut radius circuli ad circuitum.

Tempora definiuntur quibus caſu recto data ſpatia abſolvantur.

19. Tempora denique quibus caſu recto rectæ MC partas datæ abſolventur, ſi corpus è loco M nullâ vi inſitâ præditum caſum occeperit, hâc ratione defnias. A puncto quovis G in rectâ CM educatur ad perpendiculum recta GH, quæ circulo, centro C, radio CM ſcripto, in H occurrat (fig. 9). Et à puncto H in radium CO, qui illum CM ad perpendiculum inſiſtat, deducatur ad perpendiculum recta HK. Tempus caſûs recti è loco M centrum uſque C erit ad tempus caſûs recti locum uſque G ut CO ad CK; ad tempus autem caſûs reliqui à loco G centrum uſque, ut CO ad OK. Hæc autem ex eo patent, quòd ſi recta HG ſpiris quibuſlibet hyperbolicis, quarum centrum C, apſides M, Q, in puncto P occurrat; tum ſi ponatur CΠ junctæ CP æqualis, eductâque ad perpendiculum ΠΦ, quæ circulo MFQ in Φ occurrat, ſi à puncto Φ in radium CO ad perpendiculum deducatur ΦΨ: tempus, quo conficietur Spirarum area quæ ab apſide M initium ſumens circa centrum C deſinat, erit ad tempus quo conficietur area, quæ ab apſide M initium ſumens ad radium CP deſinat, ut CO ad CΨ; ad tempus autem, quo conficitur area ejuſdem ſpiræ à loco P centrum uſque, ut CO ad OΨ (per ea quæ jam ante oſtendimus § 12). Et cùm hæ ſint temporum rationes, qualicunque Spiræ ſint ſpecie præditæ, hoc eſt, qualiſcunque fuerit velocitas corporis per ſpiras lati in

apſide

apſide M; puta velocitatem illam infinitè minui, ut Spiræ, latitudine ipſarum infinitè imminutâ, in rectam MQ tandem abeant. Jam ſpiris in rectam illam abeuntibus, brachium totum MPC in radium totum MC abit; pars brachii MP in radii partem MG; pars reliqua, à puncto P centrum uſque, in partem radii reliquam, GC. Tempus tranſlationis per brachium MPC abit in tempus caſûs recti è loco M centrum uſque, corporis utique quod, nullâ vi inſitâ præditum, caſum è loco M occeperit; tempus tranſlationis per MP in tempus caſûs recti locum uſque G; tempus tranſlationis per ſpiram reliquam, à loco P centrum uſque, in tempus ulterioris caſûs recti è loco G centrum uſque. Præterea, puncto Π cum puncto G conjuncto, punctum Ψ cum puncto K coibit. Ex quibus facilè conſequuntur ea, quæ de temporibus caſûs recti modò aſſeveravimus. CASUS SECUNDUS.

20. Tempus caſûs recti è loco M centrum uſque, corporis utique quod nullâ vi inſitâ præditum caſum è loco M occeperit, duplum erit temporis, quo corpus, quod à diſtantiis infinitis cecidit, ex eodem loco M centrum uſque devenerit. Deſignetur enim tempus primum literâ T, tempus alterum hâc notâ 'T. Tempus autem converſionis integræ in circulo, cujus radius CM, deſignetur literâ Θ; unde tempus tranſlationis per quadrantem ejus circuli deſignabitur his notis, $\frac{1}{4}\Theta$. Erit autem $T : \Theta = CM : p$ (§ 18 hujus) eſt autem $\Theta : \frac{1}{4}\Theta = p : \frac{1}{4}p$, et $\frac{1}{4}\Theta : 'T = \frac{1}{4}p : CM$ (§15 caſûs ſuperioris) ex æquo igitur $T : 'T = \frac{1}{1} : \frac{1}{4} = 4 : 2 = 2 : 1$. Q. E. D.

PARTIS PRIMÆ CASUS TERTIUS.

JAM verò è loco V, ſecundum rectam VG, (fig. 10) majore cum velocitate corpus intelligatur emitti, quam ea eſſet, quâcum corpus, viribus centralibus eiſdem ſollicitatum, in Circulo ferretur, cujus radius eſſet CV. Corporis igitur, è loco V, ſecundum rectam VG exeuntis velocitas major erit, quàm caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum eſſet. Unde nonnulli, magni quidem viri, ſed quibus durè loqui minùs certè quàm nobis odioſum erat, velocitatem eam vocârunt, quam in loco V corpus adeptum eſſet, quod à diſtantiis, ſi Diis placeat, plus quàm infinitis cecidiſſet. Exponatur autem recta $\epsilon\delta$ [vid. fig. 11] datæ cujuſvis longitudinis, cujus capiatur pars $\delta\zeta$, quæ habeat ad datam $\delta\epsilon$ rationem eam, quam velocitas corporis, circum centrum C per circulum cui radius CV lati, ad velocitatem quâcum corpus è loco V ſecundum rectam VG projectum eſt. Centro ϵ, radio $\epsilon\delta$, ſcribatur circulus, cui in puncto η occurrat recta $\zeta\eta$, à puncto ζ ad perpendiculum educta. Tum junctâ CV (fig. 10) capiatur CA ejus longitudinis, quæ habeat ad CV rationem eam, quam $\zeta\eta$ ad $\epsilon\zeta$. Et manentibus quæ ad Analyſin caſûs ſuperioris lineavimus, intelligatur AB rectæ CA æqualis. Dataque CA vel AB deſignetur literâ a, data CV literâ c, indefinita CD literâ y. Jam è naturâ Curvæ BF invenietur DF, ut antè, $= \frac{a^4}{y^3}$. Unde $DF \times -\dot{y} = \frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y}$. Quarum fluxionum fluentes ſunt, alterius quidem area Curvæ BF ad ordinatam DF terminata, alterius verò ſpatium his notis deſignandum, $\frac{a^4}{2y^2}$. Hæc

 igitur

Pars Prima. Casus Tertius.

igitur ſpatia vel ſemper erunt inter ſe æqualia, vel alterum altero majus erit dato. Intelligatur recta CD fluxu continuo infinitè augeri. Jam ſpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$, rectâ CD, ſive y, infinite auctâ, in nihilum ultimò abibit. Haud item area Curvæ DF ad ordinatam mobilem DF terminata; ſiquidem rectæ, quæ poſſint areas Curvæ BF, ſint ut velocitates corporis caſu recto centrum C petentis; quapropter area in nihilum abire neſcit, niſi velocitate illâ ad nullam planè redactâ. Velocitas autem, quæ in dato loco V major fuit eâ, quam corpus caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum eſſet, aſcenſu quidem corporis minuetur uſque; ita tamen ut ad nullam nunquam planè redigatur, ne rectâ quidem CD vel infinitè auctâ. Vires enim centrales quicquid velocitatis in corpore cadente excitaverint, illud omne in aſcendente reſtinguent. Quod vero corpus, è loco V projectum, plus habuit quàm caſus infinitus genuiſſet, id aſcenſus ne infinitus quidem abolere poterit. Rectâ igitur CD infinitè auctâ, manebit corpori aſcendenti velocitas, quæ ad illam, quam in loco V habuit, rationem habebit eam, quam $\epsilon\zeta$ ad $\epsilon\delta$. Ac propterea area DF, puncto D in infinitum abeunte, ejus permanebit magnitudinis, quæ ad Curvæ aream datæ ordinatæ VL conterminam, rationem habeat eam, quam quadratum ex $\epsilon\zeta$ ad quadratum ex $\epsilon\delta$. Hoc igitur ſpatio, quod, ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ in nihilum abeunte, areæ Curvæ remanebit; hoc, inquam, area illa ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ ſemper exſuperabit. Literâ M ſignificetur ſpatium, ſpatio illi ultimò ſuperſtiti æquale. Area igitur, ad ordinatam mobilem CD terminata, his notis deſignanda erit, $M + \frac{a^4}{2y^2}$: id eſt, partibus duabus conſtabit quarum altera dato M, altera ſpatio his notis deſignato, $\frac{a^4}{2y^2}$, æqualis erit. Quare area, quæ ad datam ordinatam VL terminata eſt, his notis deſignanda erit, $M + \frac{a^4}{2c^2}$. Hoc eſt ſi capiatur CN, duarum CV, CA proportione tertia, area Curvæ, ad ordinatam VL terminata, æqualis erit ſpatio M dimidiâ parte quadrati ex CN aucto. Habet autem ſpatium M ad aream illam, ordinatæ VL conterminam, rationem eam, quam quadratum ex $\epsilon\zeta$ ad quadratum ex $\epsilon\delta$. Invertendo et dividendo, dimidium quadrati ex CN ad ſpatium M rationem habebit eam, quam illud quo quadratum ex $\epsilon\delta$ exſuperat quadratum ex $\epsilon\zeta$ ad quadratum ex $\epsilon\zeta$. Hoc eſt, dimidium quadrati ex CN erit ad M ut quadratum ex $\zeta\eta$ ad quadratum ex $\epsilon\zeta$. Verùm ut $\zeta\eta$ ad $\epsilon\zeta$ ita facta eſt CA ad CV. Quare ut quadratum ex $\zeta\eta$ ad quadratum ex $\epsilon\zeta$ ita erit quadratum ex CA ad quadratum ex CV. Quare dimidium quadrati ex CN erit ad M ut quadratum ex CA ad quadratum ex CV. (El. v. 11.) Sive propter continuam tribus illis CN, CA, CV proportionis convenientiam, ut quadratum ex CN ad quadratum ex CA. Cùm igitur ſit $\frac{1}{2}CN^2 : M = CN^2 : CA^2$, erit ſpatium M dimidium quadrati ex CA (El. v. 15.) ſive $M = \frac{1}{2}a^2$. Unde tandem area Curvæ BF, ad ordinatam mobilem DF terminata, his notis generaliter efferenda erit, $\frac{1}{2}a^2 + \frac{a^4}{2y^2}$.

Hinc

Hinc veniet UQ $=\sqrt{\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}}$; et RS $=\sqrt{\frac{a^4+a^2y^2}{2y^2}}$.

Sed ST ut antè $=\frac{q^2}{y}$. Unde ST$^2=\frac{2q^4}{2y^2}$. Unde RT $=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$.

Rectæ CA vel majori eſſe liceat quàm ea, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW, vel minori, vel ei denique æquale eſſe. Major erit, ſi talis ſit angulus CVG, vel QUW, ut quadratum è radio majus ſit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli coſinu rationem habeat rectæ CN + CV ad CV: Minor, ſi talis ſit angulus CVG, ut quadratum è radio minus ſit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli coſinu rationem, quam modo dixi, habeat: Æqualis, ſi talis ſit angulus, ut quadratum è radio ad quadratum ex coſinu ejus rationem illam ipſam, quam CN + CV ad CV, habeat.

Sit enim $R^2 : \overline{\text{coſin. QUW}}|^2 =$ CN + CV : CV $=$ CA^2 + CV^2 : CV^2. Ex eo quòd ſit UQ$^2=\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}$, erit 2UQ^2 : CA^2 $=$ CA^2 + CV^2 : CV^2. Quare $R^2 : \overline{\text{coſin. QUW}}|^2 =$ 2UQ^2 : CA^2.

Sed $R^2 : \overline{\text{coſin. QUW}}|^2 =$ 2UQ^2 : 2UW^2, propter angulum ad W rectum.

Quare 2UQ^2 : CA^2 $=$ 2UQ^2 : 2UW^2. Unde CA^2 $=$ 2UW^2.

At verò ſi R^2 majus ſit, quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{coſin. QUW}}|^2 =$ CN + CV : CV, erit idem R^2 majus quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{coſin. QUW}}|^2 =$ 2UQ^2 : CA^2. Quare et 2UQ^2 majus, quàm ut eſſe poſſit 2UQ^2 : 2UW^2 $=$ 2UQ^2 : CA^2. Quare 2UW^2 minus erit quàm CA^2, ſive CA^2 majus quàm 2UW^2. Et ſimili modo ſi ſit R^2 minus, quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{coſin. QUW}}|^2 =$ CN + CV : CV, oſtendetur CA^2 minus quàm 2UW^2.

Primùm igitur talis ſit angulus CVG, ut quadratum è radio majus ſit, quàm quod habeat ad quadratum ex ejus anguli coſinu rationem eam, quam CN + CV ad CV. Ita major erit CA quàm ea, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW, et quadratum ex CA duplo quadrati ex UW majus. Sit b recta duarum CV, $\sqrt{\text{CA}^2-2\text{UW}^2}$ proportione media.

Itaque $b^2=$ CV $\times\sqrt{\text{CA}^2-2\text{UW}^2}$, et $b^4=$ CV$^2\times\overline{\text{CA}^2-2\text{UW}^2}=$ CV$^2\times$ $\overline{\text{CA}^2-2\text{UQ}^2+2\text{QW}^2}$.

At verò inventa eſt UQ $=\sqrt{\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}}$. Unde veniet 2UQ$^2\times$ CV$^2=$ CA$^4+$ CA$^2\times$ CV^2. Atque hinc rurſum $b^4=2$CV$^2\times$ QW$^2-$ CA$^4=2q^4-a^4$.

Ergo $a^2y^2-b^4=a^4-2q^4+a^2y^2$.

Cùm igitur inventa eſt RT $=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem RT $=\sqrt{\frac{a^2y^2-b^4}{2y^2}}$.

Hinc calculis ſicut in ſuperiore caſu ſubductis,

veniet D$b=\frac{q^2\times y}{\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$. Et D$c=\frac{\text{CV}^2\times q^2}{y\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$.

Harum formularum poſteriore definitur Curva acX, quæ proinde in eodem genere eſt ac prior illa, per cujus quadraturam caſum ſuperiorem confecimus. Datâ igitur VD, dabitur area aVDc ope Tab. II. Claſſ. 4. Form. 1. è relatione nimirum quæ areæ illi cum areâ Sectionis cujuſdam Conicæ, poſitione

ſitione datæ, intercedat. Datâ autem areâ *a*VD*c*, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut antè, dabitur. Aſſumptiſque diſtantiis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvæ VIH puncta. Q. E. D.

COMPOSITIO CASUS III. PARTIS I.

[Fig. 12.]

In rectâ cv infinite producendâ capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam CA (fig. 10, lineatione eâ quam in analyſi præcepimus definiendam) proportionem eam, quam quadratum è rectâ cv ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB in fig. 10, et in fig. 12, à puncto c in rectâ ca ad perpendiculum educatur c*e*, quæ junctæ CB fiat æqualis. Centro c ſemiaxibus ca, c*e* ſcribatur Ellipſis.

Punctum v non erit extra hanc Ellipſin. Nempe cùm ea ſit recta b, cujus quadratum rectangulo $CV \times \sqrt{CA^2 - 2UW^2}$ æquale ſit, certè non majus erit quadratum ex illâ *b*, quàm rectangulum CV × CA. Non majus igitur quàm ut habeat ad quadratum ex CV proportionem eam, quam rectangulum CV × CA ad quadratum ex CV habet; ſive eam quam recta CA ad rectam CV. Sed talis ſumpta eſt recta ca (fig. 12) ut ad eam illa CA (fig. 10) proportionem habeat eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex cv. Habet igitur CA ad *c*a rationem eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex cv. Non major igitur erit illa CA, quàm quæ habeat ad ca rationem illam quam CA ad CV. Invertendo, non minor erit ca, quam ut habeat illa ad CA rationem eam, quam cv ad eandem CA. Illa ca igitur non minor erit quàm cv. Punctum igitur v non erit extra Ellipſin. Recta igitur, à puncto v ordinatim ad axem ca educta, Ellipſi occurret. Educatur vs, & Ellipſi in *S* occurrat. Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum x, intra Ellipſin. Educatur x*r* ad axem ca ordinatim, quæ Ellipſi in *r* occurrat. Jungantur c*S*, c*r*. Centro c, radio cv, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector vc*p*, qui ad ſectorem ellipticum ac*r* rationem habeat eam, quam q^2, ſive rectangulum CV × QW, ad quadratum ex CA. Ducatur recta *rt*, quæ Ellipſin in *r* contingens axi ca in *t* occurrat. In recta c*p* capiatur cP, quæ ad c*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Si è loco v ſecundum rectam vG (fig. 10) corpus quodpiam emiſſum fuerit, cum velocitate quâdam, quæ velocitatem corporis, motu ſuo circum centrum c in diſtantiâ cv circulum ſcribentis, ſuperârit eâ ratione, quâ recta data *εδ* (fig. 11) ſuperet datam *δζ*; ſi hâc inquam velocitate corpus è loco v, ſecundum rectam VG emiſſum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam, in fig. 12, punctum P perpetuò tangit, per omnia ſimilem et æqualem.

DEMONSTRATIO.

In figurâ quam ad analyſin ornavimus, capiatur CD duarum CX, CV in figurâ modò ſcriptâ proportione tertia; exſiſtentibus illis CV utriuſque figuræ

guræ inter ſe æqualibus. Circulus, centro C, radio CD ſcriptus, in fig. 10, curvo corporis tramiti in puncto I occurrat; reliqua verò maneant quæ ad analyſin Problematis in hoc caſu lineavimus. Capiatur β duarum CV, b, proportione tertia. Erit igitur quadratum ex ca ad quadratum ex ce (fig. 12) ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Id enim eodem modo, atque in caſu ſuperiore uſi ſumus, oſtendi poſſit. Quare in Ellipſi, illud quo quadratum ex dimidio axe, ca, exſuperat quadratum ex cx erit ad quadratum ex ordinatâ Xr, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Compositio

Rurſum in figurâ 10, juncta CB occurrat rectæ Db in M. Sumatur γ duarum CM, b, proportione tertia. Erit quadratum ex cx (fig. 12) ad quadruplum quadrati ex γ, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Id enim iiſdem planè rationibus atque in caſu ſuperiore obtinebimus. Atqui oſtenſum eſt quadratum ex ca eſſe ad quadratum ex ce ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Illud igitur, quo quadratum ex ca exſuperat quadratum ex cx, erit ad illud, quo quadratum ex ce exſuperat quadruplum quadrati ex γ ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β; hoc eſt, ut idem illud quo quadratum ex ca exſuperat quadratum ex cx ad quadratum ex Xr. Quadratum igitur ex Xr illud ipſum erit, quo quadratum ex ce exſuperat quadruplum quadrati ex γ.

At verò illud, quo quadratum ex ce exſuperat quadruplum quadrati ex γ, hoc quadrati ex RT (fig. 10) quadruplum eſt. Namque, propter continuam tribus illis CM, b, γ, proportionis convenientiam, quadratum ex γ erit ad quadratum ex b, ut quadratum ex b ad quadratum ex CM, ſive ad duplum quadrati ex CD. Ut verò quadratum ex b ad duplum quadrati ex CD ita eſt illud, quo dimidium quadrati ex CA exſuperat quadratum ex RT, ad quadratum ex b. Id enim declarant notæ illæ quas analyſis nobis expromebat, $RT^2 = \frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}$; ex quibus utique efficietur $b^4 = \overline{\tfrac{1}{2}a^2 - RT^2} \times 2y^2$. Quadratum igitur ex γ ad quadratum ex b eandem quam illud, quo dimidium quadrati ex CA exſuperat quadratum ex RT, rationem habet; quadratum igitur ex γ æquale eſt ei, quo dimidium quadratum ex CA exſuperat quadratum ex RT. Et quadrato ex RT communiter addito; quadrata ex γ & ex RT ſimul ſumpta dimidio quadrati ex CA æqualia erunt. Et quadrato ex γ communiter dempto, quadratum ex RT æquale erit ei, quo dimidium quadrati ex CA exſuperat quadratum ex γ. Ac proinde quadruplum quadrati ex RT æquale erit ei, quo duplum quadratum ex CA, hoc eſt, quo quadratum ex ce (fig. 12) exſuperat quadruplum quadrati ex γ. Eidem verò quadratum ex Xr jam antè oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex Xr quadruplum erit quadrati ex RT. Ex quo efficitur recta Xr, ut in caſu ſuperiore, rectæ RT dupla.

Jam verò eſſe $\dot{\overline{cx}}$, vel $\dot{\overline{ax}}$, ad $\dot{\overline{CD}}$ ut cx ad CD, ac propterea rectangulum $\dot{\overline{ax}} \times \dot{r}x$ ad CD.$\times r$x ut cx ad CD, ea iiſdem prorſus argumentis obtinebimus atque in caſu ſuperiore.

Porro ex eo quòd Xr dupla ſit rectæ RT, ſequetur, ut antè, dimidium rectanguli

PARS PRIMA. CASUS TERTIUS.

rectanguli CX × X*r*, hoc eſt triangulum CX*r*, rectangulo CX × RT æquale eſſe, et fluxionem trianguli fluxioni rectanguli eſſe æqualem. Rectanguli autem CX × RT latera CX, RT, contrà atque in caſu illo ſuperiore obtinuit, contrariè fluunt. Nempe cùm RT eodem modo fluat quo X*r*, cujus eſt ſemiſſis; rectæ autem X*r*, CX in Ellipſi contrariè fluant. Illis autem CX, RT contrariè fluentibus, fluxio rectanguli CX × RT, rectangulorum $\dot{\overline{CX}} \times RT$, $CX \times \dot{\overline{RT}}$ differentiæ æqualis erit. Erit autem rectangulum $\dot{\overline{CX}} \times RT$ ad rectangulum $\dot{\overline{CD}} \times RT$ ut CX ad CD; id enim eodem modo oſtendemus quo antè. Sed et rectangulum $CX \times \dot{\overline{RT}}$ erit ad rectangulum $CD \times \dot{\overline{RT}}$ ut CX ad CD. Quare $CX \times \dot{\overline{RT}} - \dot{\overline{CX}} \times RT$, ſive fluxio rectanguli CX × RT, hoc eſt, trianguli CX*r*, erit ad $CD \times \dot{\overline{RT}} - \dot{\overline{CD}} \times RT$ ut CX ad CD. Sed oſtenſum eſt rectangulum $\dot{\overline{ax}} \times Xr$, ſive fluxionem ſpatii Elliptici *a*X*r*, eſſe ad rectangulum $\dot{\overline{CD}} \times Xr$, ſive ad duplum rectanguli $\dot{\overline{CD}} \times RT$, ut CX ad CD. Fluxiones igitur trianguli CX*r* ſpatiique elliptici *a*X*r* ſimul ſumptæ, ſive fluxio ſectoris elliptici C*ar* ad ſpatia illa $CD \times \dot{\overline{RT}} - \dot{\overline{CD}} \times RT$; $2\dot{\overline{CD}} \times RT$ ſimul ſumpta, hoc eſt ad rectangula $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$ ſimul ſumpta, erit ut CX ad CD. Fluxio inquam ſectoris elliptici C*ar* ad ſummam rectangulorum $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$ rationem habet quam CX ad CD. Rectangulorum autem $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$ ſumma rectanguli $\dot{\overline{CD \times RT}}$ fluxio eſt; nempe illis CD, RT eodem modò fluentibus. Nam CD contrario modo fluere atque CX oſtenſum eſt. Oſtenſum eſt etiam illam RT contrario modo fluere atque CX. Fluunt igitur CD, RT eodem modo, rectanguliqúe CD × RT fluxio ſumma erit rectangulorum $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$. Fluxio igitur ſectoris elliptici C*ar* erit ad fluxionem rectanguli CD × RT, ut CX (fig. 12) ad (fig. 10) CD.

Cæterùm ex æquatione illâ quam analyſis nobis expromebat, $RT = \sqrt{\frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}}$, calculis ut in caſu ſuperiore ſubductis, veniet $\dot{\overline{CD \times RT}} \times \frac{q^2CV^2}{a^2y^2} = DC \times \dot{y} = -\dot{\overline{aVDC}}$. (Notis enim $DC \times \dot{y}$ deſignatur $-\dot{\overline{aVDC}}$, ſive areæ *a*VDC fig. 10 decreſcentis fluxio.) Hoc eſt areæ *a*VDC fluxio ad contrariam rectanguli CD × RT fluxionem rationem habebit compoſitam è rationibus, ſpatii q^2, ſive rectanguli CV × QW ad a^2, ſive quadratum ex CA, quadratique ex CV ad quadratum ex CD. (Contrarias autem eſſe areæ *a*VDC rectanguliqúe CD × RT fluxiones ex eo patet, quòd creſcente CD rectangulum quoque creſcat, area decreſcat, et viciſſim).

Jam verò ex eo quòd fluxio areæ *a*VDC ad contrariam rectanguli CD × RT fluxionem rationem habeat è quibus modò diximus compoſitam, atque ex eo quòd fluxio rectanguli CD × RT ad ſimilem ſectoris elliptici *acr* fluxionem rationem habeat quam CD ad CX, ſequetur fluxionem areæ *a*VD*c* ad contrariam ſectoris elliptici *acr* fluxionem rationem habere quam CV × QW ad

quadratum

quadratum ex CA. Conſequetur inquam eſſe $-\dot{\overline{avdc}}$ ad $\dot{\overline{acr}}$, ſive $\dot{\overline{avdc}}$ ad $-\dot{\overline{acr}}$, ut CV × QW ad quadratum ex CA. Id enim iiſdem planè argumentis probabitur, quibus in caſu ſuperiore oſtendimus fluxionibus ſimilibus areæ *a*VDC et ſectoris hyperbolici *car* rationem eam intercedere. Jam verò ſectorum a*cr*, *ecr* fluxiones ſunt ſemper æquales, ſed contrariæ. Hoc eſt $-\dot{\overline{acr}} = \dot{\overline{ecr}}$, et viciſſim. Quare fluxio areæ *a*VDC erit ad ſimilem ſectoris elliptici *ecr* fluxionem ut CV × QW ad quadratum ex CA. Et cùm hæc data ſit fluxionum ratio, fluentibus etiam aut eadem intercedet, aut altera dato major erit quàm pro hâc ratione. (Geom. Flux. Prop. IV.) — *Casus Tertius.*

Fluat igitur CD, (fig. 10) donec ipſi CV evadat æqualis. Jam ſector ellipticus (fig. 12) ſit *ecS*, area autem *a*VDC (fig. 10) in nihilum abierit. Quare ſector ellipticus *ecr* dato *ecS* ſemper major erit, quàm ut habeat ad aream *a*VDC rationem eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Sector igitur *Scr* (fig. 12) ad aream *a*VDC (fig. 10) ſive illi æqualem ſectorem circularem VCX rationem illam habet. Capiatur in fig. 12, ſector circularis VC*f*, qui ad ſectorem ellipticum ac*S* rationem habeat eam, quam rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA. Punctum ipſum *f* erit ad Curvam, quam punctum P perpetuò tangit: id enim eodem modo probabitur quo in caſu ſuperiore. Jam verò cùm ſector ellipticus ac*S* ad ſectorem circuli VC*f*, item ſector ellipticus a*cr* ad ſectorem circuli VC*p*, rationem habeat quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW; idcirco et ſector ellipticus *Scr* ad ſectorem circuli *fcp* eandem illam rationem habebit. Atque hinc efficitur, ut in caſu ſuperiore, ſectores circulares VCX figuræ decimæ et FC*p* hujus eſſe inter ſe æquales. Quare et anguli VCX, *fcp* inter ſe æquales erunt.

Porro oſtendentur CP, CI inter ſe æquales eodem planè modo atque in caſu ſuperiore. Et ſimili argumentatione Curvarum VK, *f*P radii omnes, qui cum primariis illis, CV, *ef*, angulos æquales faciant, oſtendentur inter ſe æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter ſe ſimiles et æquales. Q. E. D.

De naturâ Curvæ FP, *de Aſymptotis ejus et Apſidibus inveniendis; de temporibus etiam, quibus corpora data ejus ſpatia abſolvant, definiendis, et cum temporibus converſionum in circulis conferendis.*

§ I. DEFINITIO.

Puncta r et P *Ellipſeos Curvæque cognata dico.*

2. Capiatur ſector circularis VCN, qui ad Ellipſeos quadrantem a*ce* rationem illam habeat, quam rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA. Punctum Curvæ quod ellipſeos verticis ſecundi *e* ſit cognatum, in rectâ CN quærendum erit; ſiquidem puncto *r* in *e* tranſlato, punctum *p* in N tranſlatum erit, et radius C*p* cum illo CN congruet. At verò puncto *r* in *e* tranſlato, — *Aſymptotæ.*

CONCHOIDES recta et infinitè augetur. Quapropter infinitè augebitur etiam CP, quæ ad illam et datam rationem habet. Punctum igitur Curvæ, puncti *e* cognatum, in infinitum abiit; hoc eſt, Curva PF infinitè quidem protenſa rectæ CN nullibi occurret, quam tamen propiùs accedet quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ.

3. Si capiatur CM, duarum CA, CV proportione tertia, erit M punctum ubi Curva PF axi Ellipſeos *ca* occurret. Demonſtrabitur eodem modo quo § 3 caſûs ſuperioris.

Anguli Radiorum cum Curvâ.

4. Radius quiſque CP, à centro C Curvam uſque eductus, angulum cum curvâ faciet, qui ſimili lineatione, ac in caſu ſuperiore uſi ſumus, definiatur. Nimirum à puncto Ellipſeos cognato *r* ad axem *ca* deducatur *r*x ordinatim, quæ in puncto d media dividatur. In abſciſſâ cx capiatur xg, quæ habeat ad cx rationem eam, quam (in fig. 10) QW ad CV. Junctâ dg, angulus xdg æqualis erit ei, quo radius CP inclinatur ad Curvam. Demonſtratur eodem modo atque in caſu ſuperiore (vid. § 6 ſuperioris.)

Apſides.

5. Punctum M curvæ Apſis erit: demonſtratur ad modum § 8 caſûs ſuperioris.

6. Radio mobili CP circum centrum circumacto, et infinitè aucto, angulus inclinationis radii ad Curvam infinitè imminuitur; ſiquidem puncto *p* in N tranſlato, punctum *r* in ipſum verticem ſecundum *e*, punctum x in centrum Ellipſeos tranſlatum erit. Unde xd dimidio axi ſecundo æqualis facta fuerit; cùm illa cx, et quæ ad cx datam rationem habeat *g*x, in nihilum abierit.

Conchoidum Ellipticarum Species Variæ.

7. Fiat angulus NCM angulo NCV æqualis, et capiatur CM æqualis rectæ CM. Rurſum fiat angulus NC*p* angulo NC*p* æqualis, et capiatur CP = CP. Punctum 'P erit ad novum quoddam Curvæ PF brachium, quod Aſymptotam habebit rectam CN, Apſidem verò punctum M. Et ſi fiat angulus 'VCN' æqualis angulo 'VCN, et angulus 'VC*p* æqualis angulo 'VC*p*, et capiatur CP = CP, erit punctum "P ad tertium Curvæ brachium, quod Apſidem habebit punctum 'M, Aſymptotam rectam CN. Curva igitur MPF, pro variâ quæ Ellipſin inter & Circulum V*p*M proportio interceſſerit, varias ipſa ſpecies induet; quarum hæ ſunt ferè ſimpliciſſimæ.

Primùm quidem, ſi Ellipſeos ad Circulum, adeoque quadrantis Ellipſeos ad quadrantem Circuli, ea ſit proportio, quæ quadrati ex CA ad rectangulum CV × QW, Curvæ figura erit qualem in 13ª ſcriptam vides. Quæ brachiis quatuor conſtat ſecundum communem Aſymptotam NN infinitè utrinque protenſis, Apſides autem duas habet ad rectam illam conſtitutas, quæ brachiorum aſymptotam communem ad perpendiculum decuſſat.

Si quadrans Ellipſeos ad ſemicirculum proportionem habeat quam CA^2 ad CV × QW, Curva figuram 14 induet; brachiis utique duobus conſtans, quæ tam Apſide quàm Aſymptotâ gaudent communi, et Apſidem in ipſâ Aſymptotâ conſtitutam habent.

Sin quadrans Ellipſeos ad Circulum integrum rationem habet quam CA^2 ad

ad CV × QW, Curva brachiis rurſum quidem duobus conſtabit, quæ Apſide et Aſymptotâ gaudebunt communibus, atque apſidem habebunt in Aſymptotâ conſtitutam. [Vide fig. 15.] Longè tamen diverſa erit hujus figura ab illâ ſuperiore; quippe cujus brachia niſi in Apſide communi nuſquam conveniant, cùm hujus brachia tribus omninò punctis. Nodorum autem unus ad ipſam Aſymptotam erit, duo reliqui æqualibus ab Aſymptotâ diſtantiis hinc inde remoti. ELLIPTICÆ.

Generaliter autem ſi ſector Circuli, VCN, qui ad quadrantem Ellipſeos rationem habet quam CV × QW ad CA^2, ſi ille ad aream circuli totius rationem habeat quam numerus ad numerum; Curva brachiis conſtabit numero definitis, quarum duæ quælibet proximæ vel Aſymptotam vel Apſidem communem habent; eâ quidem lege ut Apſidis et Aſymptotæ communio alternis fiat. Nimirum ſi brachium primum et ſecundum Aſymptotam communem habuerint, ſecundo et tertio Apſis communis erit; tertio & quarto communis rurſum Aſymptotos, quarto & quinto Apſis; atque ſic deinceps. Brachia verò Curvæ, Apſides item et Aſymptotæ quot ſint, hâc ratione cognoſcatur. Habeat ſector circularis VCN ad aream totius circuli rationem eam, quam numerus *n* ad numerum *m*. Numeri verò *n*, *m*, minimi ſint omnium, qui proportione cum ipſis conveniant. Si numerus *m* ſit impar, Curva tot quidem Apſides habebit, Aſymptotas tot, bis tot brachia, quot ſint in numero $2m$ unitates, et in ſingulis Aſymptotis Apſides ſingulas habebit conſtitutas. Si par ſit numerus *m*, vel pariter vel impariter pari eſſe ei liceat. Si impariter par ſit numerus *m*, jam Curva totidem habebit brachia quot in numero *m*, Apſides autem totidem, totidem item aſymptotas, quot in dimidio *m* unitates; et Apſides ſingulas in ſingulis Aſymptotis conſtitutas. Si pariter par ſit numerus *m*, Curva brachia quidem, ſicut antè, totidem habebit quot ſunt in numero *m*; Apſides totidem quot in dimidio *m*; Aſymptotas autem haud plures quàm ſunt in quadrante numeri *m* unitates. Apſides autem in rectis conſtitutæ erunt, à centro ad perpendiculum cum Aſymptotis eductis. Quòd ſi ſector circularis VCN, qui ad quadrantem Ellipſeos rationem habeat quam CV × QW ad CA^2, nullum areæ totius circuli commenſum accipiat, ſive ad eam nullius numeri ad numerum rationem habeat, innumera erunt Curvæ brachia, innumeræ etiam Apſides et Aſymptotæ. Apſidum autem et Aſymptotarum communionem brachia Curvæ alternis ſemper accipient.

8. Ad quadraturam partium Curvæ FP, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, analyſis hanc æquationem expromebat; $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a y^2 - 2b^4}}$. Hinc Quadratura Conchoidum Ellipticarum,

$Db \times \dot{y} = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}} \dot{y}$. Area igitur ICV (fig. 10), vel PCf (fig. 12) ($= \overline{|Db \times \dot{y}|}$)

ſpatio $\frac{q^2}{2a^2} \sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}$, ſive $\frac{q^2}{\sqrt{2} \times a} \sqrt{y^2 - \frac{b^4}{a^2}}$, vel æqualis erit, vel eo major minorve dato (Newton. TAB. Curv. I. Claſſ. IV. Form. I.) idque qualiſcunque aſſumpta fuerit diſtantia CV (fig. 10) vel Cf (fig. 12), modò datâ CM non ſit minor. Ponatur igitur Cf (fig. 12) ipſi CM æqualis, ut fCP in aream MCP tranſeat, et angulus CVG in fig. 10 rectus fiat. Tum q^2 fiet CM × UQ, et b^2 fiet CM × CA. Notæ autem $\sqrt{2} \times a$ rectam *ce* ſemper ſignificant.

 nificant. Area igitur MCP ſpatio $\frac{CM \times UQ}{Ce}\sqrt{CP^2 - CM^2}$ vel æqualis, vel eo major minorve dato erit. Fluat y vel CP, donec ipſi CM evadat æqualis. Tum puncto P in ipſum M tranſlato, area MCP in nihilum abierit. In nihilum etiam ſpatium illud $\frac{CM \times UQ}{Ce}\sqrt{CP^2 - CM^2}$. Area igitur MCP ſpatio iſto, quod ſimul cum eâ in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur C radio CM (vid. fig. 16), ſcribatur circulus, qui rectæ Ce in punctis O, o occurrat. Ad rectam Ce applicetur rectangulum eZ rectangulo CM X UQ æquale. Circulum modò ſcriptum in puncto M recta MΠ contingat. In illam MΠ, à circuli centro C, deducatur CΠ radio Curvæ CP æqualis. Et à puncto Π in rectam Oo ad perpendiculum deducatur ΠΥ. Sector curvæ MCP rectangulo CZ X CΥ æqualis erit. Quæ autem brachio Curvæ MP£ et Aſymptotâ ejus CN, infinitè protenſis, axeque CM intercluſa eſt area, ea quidem infinita erit.

Tempora movendi in Conchoidibus Ellipticis.

9. Tempora, quibus conficiuntur ſectores quilibet Curvæ, MCP, MCf, qui ab axe CM communiter incipientes ad radios CP, Cf terminantur, erunt inter ſe ut tangentes arcuum, quorum CP, Cf ſunt ſecantes pro radio CM. Corpus autem ab apſide M, vel alio quovis puncto f emiſſum, per brachium infinitum in ipſam aſymptotam ne infinito quidem tempore devenerit.

10. Corpus igitur, quod per harum Curvarum aliquam feratur, ad punctum unde primùm emiſſum fuerit, vel quod ſemel prætererit, nunquam redibit. Neque ex alio Curvæ brachio in aliud tranſibit, niſi forte à dato brachii alicujus puncto ita emiſſum fuerit, ut verſus apſidem curſum faciat. Ita enim apſidem illam prætergreſſum per brachium alterum deferetur, cui cum primo apſis illa communis eſt.

Velocitas motûs in Conchoidibus Ellipticis.

11. Velocitas corporis per Curvam lati, in loco quovis V (fig. 10) eſt ad velocitatem corporis, quod, urgentibus eiſdem viribus centripetis, circumagitur in circulo cujus radius CV, ut recta quæ poſſit quadrata ex CA, CV ſimul ſumpta ad rectam ipſam CA. Demonſtrabitur eodem modo quo § 13 caſus ſuperioris.

12. Si centro C, radio CM, ſcribatur circulus (fig. 17) qui rectæ Ce, quæ radium CM ad perpendiculum inſiſtat, in O occurrat; velocitas corporis per Curvam lati, in apſide M, erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius CM, circumacti, ut AO ad CA.

Tempora tranſlationum per Conchoides Ellipticas conferuntur cum Temporibus converſionum in Circulis.

13. Tempus tranſlationis ab Apſide M ad locum quemvis Curvæ P ad tempus converſionis integræ in Circulo, cujus radius CM, rationem habebit compoſitam è rationibus tangentis arcûs ejus circularis, cujus ſecans eſt CP pro radio CM, ad integrum circuli circuitum, rectæque CA ad rectam CM.

A centro C in rectam MΠ, quæ circulum in Π contingat, deducatur CΠ illi CP æqualis. Et à Π in diametrum Oo demittatur ad perpendiculum recta ΠΥ. Exponatur recta T datæ cujuſvis longitudinis. Sumatur alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus converſionis integræ per circulum, cujus radius CM, ad tempus tranſlationis ab apſide M in locum P per Curvam. Circuitus autem circuli, cujus radius CM, æqualis ſit rectæ p. Dico T ad Θ rationem habere eam, quæ compoſita eſt è rationibus rec-

tæ

tæ CΨ ad p, rectæque CA ad CM: ſive eam, quam rectangulum CΨ × CA ad rectangulum p × CM. ELLIPTICÆ.

Nam primùm quidem ſector curvæ MCP ad aream circuli, cujus radius eſt CM, rationem habebit eam, quam rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × AC. Id enim eiſdem planè rationibus efficiatur, quibus in caſu ſuperiore oſtendimus, aream illam omnem quam Spiræ intus habuere, eſſe ad aream circuli cujus radius CM, ut rectangulum T × AF ad rectangulum Θ × CA. Jam verò ſector Curvæ MCP æqualis eſt rectangulo CZ × CΨ (per § 8 hujus). Et area circuli, cujus radius CM, dimidium eſt rectanguli p × CM (per ea quæ demonſtravit Archimedes). Rectangulum igitur CZ × CΨ erit ad dimidium rectanguli p × CM, ſive ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Sed propter rectangulum CZ × Ce rectangulo CM × VQ æquale (ita enim factum eſt) erit CZ ad VQ ut CM ad Ce. Quare rectangulum CZ × CΨ erit ad rectangulum VQ × CΨ ut rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce. Permutando rectangulum CZ × CΨ erit ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM ut rectangulum VQ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce. At verò rectangulum CZ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Quare rectangulum VQ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Permutando, rectangulum VQ × CΨ erit ad rectangulum T × AO ut rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce ad rectangulum Θ × CA. Invertendo, rectangulum T × AO ad rectangulum VQ × CΨ ut rectangulum Θ × CA ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce.

Præterea junctis OM, Om, recta VQ ad AO rationem habet quam CA ad MO; ſecundum ea quæ è formulâ generali, VQ $=\sqrt{\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}}$, ſuprà diſputavimus, poſito utique c = CM. At verò CA ad MO rationem habet quam Ce ad Mm. Id enim eodem modo probare liceat, quo in caſu ſuperiore probavimus CA eſſe ad MF ut Ce ad Mm. Quare VQ ad AO rationem habet quam Ce ad Mm. (El. v. 11.) Quare et rectangulum VQ × CΨ ad rectangulum AO × CΨ rationem habet quam $\frac{1}{2}p$ × Ce ad $\frac{1}{2}p$ × Mm, ſive ad p × CM. Cùm igitur ſit T × AO : VQ × CΨ = Θ × CA : $\frac{1}{2}p$ × Ce, atque rurſum VQ × CΨ : CΨ × AO = $\frac{1}{2}p$ × Ce : p × CM; ex æquo erit T ad CΨ ut Θ × CA ad p × CM. Quare et rectangulum T × CA erit ad rectangulum CΨ × CA, ut rectangulum Θ × CA ad rectangulum p × CM. Permutando, erit T ad Θ ut CΨ × CA ad p × CM. Q. E. D.

PARTIS PRIMÆ CASUS QUARTUS.

JAM verò in fig. 10, reliquis ut in caſu ſuperiore permanentibus, angulus CVO talis ſit, ut quadratum è radio ad quadratum ex coſinu ejus anguli illam ipſam rationem habeat quàm CN + CV ad CV. Itaque recta CA æqualis erit ei, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW. Quadratum igitur ex CA duplum erit quadrati ex UW, ſive duplum ejus quo quadratum ex VQ exſuperat quadratum ex QW. Quadratum igitur ex CA, duplo quadrati ex QW auctum, duplo quadrati ex VQ æquale fiet. Hoc eſt $a^2+2QW^2=\frac{a^4+a^2c^2}{c^2}$. Unde a^2c^2+

$2c^2QW^2$,

Pars Prima. Casus Quartus. $2c^2QW^2$, ſive $a^2c^2 + 2q^4 = a^4 + a^2c^2$. Unde rurſum $2q^4 = a^4$, et $a^4 - 2q^4 = 0$.

Cùm igitur inventa eſt $RT = \sqrt{\frac{a^4 - 2q^4 + a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem $RT = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Unde $2RT = CB$. Quare $Db = \frac{q^2}{CB}$; hoc eſt, cùm ſit $q^2 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$, et $CB = \sqrt{2} \times a$, $Db = \frac{1}{2}a$. Et $Dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y^2 \times CB} = \frac{CV^2 \times a}{2y^2}$.

Datâ igitur CD, dabitur ſector circularis VCX per quadratum Curvæ, cujus ordinata his notis deſignatur, $\frac{CV^2}{2y^2} \times a$, exſiſtente abſciſſâ VD. Dato autem ſectore VCX, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut antè, dabitur. Aſſumptiſque diſtantiis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvæ VIK puncta.

COMPOSITIO CASUS QUARTI PARTIS PRIMÆ.

In rectâ CV fig. 18, capiatur diſtantia quævis CD. Capiatur CM, duarum CD, CV proportione tertia. Circuli, centro C radio CV ſcripti, capiatur ſector VCp, dimidio rectanguli MV × CA æqualis. Quod ita fiat, ſi capiatur arcus Vp, qui habeat ad rectam MV rationem eam quam data CA ad radium CV, et jungatur Cp. Denique capiatur CP rectæ CD æqualis. Si corpus è loco V ſecundum rectam VG eâ cum velocitate, quam ſuprà poſuimus, emiſſum fuerit, per Curvam feretur ejus quam punctum P perpetuo tangit per omnia ſimilem et æqualem.

DEMONSTRATIO.

Fluxio ſectoris VCP rectangulo $\dot{\overline{MV}} \times \frac{1}{2}CA$ æqualis eſt. Cùm verò CD ſit ad CV ut CV ad CM, rectangulum CM × CD quadrato ex CV æquale erit. Sed datum eſt quadratum ex CV, propter latus CV datum. Rectangulum igitur CM × CD datum; cujus tamen latera, CM, CD, fluunt. Omnino igitur contrariè illa fluunt; atque eâ quidem lege, ut rectangula $\dot{\overline{CM}} \times CD$, $CM \times -\dot{\overline{CD}}$, ſive $CM \times \dot{\overline{VD}}$, ſemper ſint inter ſe æqualia. Erit igitur $\dot{\overline{CM}} : \dot{\overline{VD}}$ ut CM : CD. Rectangulum igitur $\dot{\overline{CM}} \times \frac{1}{2}CA$ erit ad rectangulum $\dot{\overline{VD}} \times \frac{1}{2}CA$ ut CM ad CD. Sed propter datam CV, fluxiones $\dot{\overline{CM}}$, $\dot{\overline{MV}}$ erunt inter ſe æquales. Rectangulum igitur $\dot{\overline{MV}} \times \frac{1}{2}CA$ rectangulo $\dot{\overline{CM}} \times \frac{1}{2}CA$ æquale erit. Quare $\dot{\overline{MV}} \times \frac{1}{2}CA$, hoc eſt, fluxio ſectoris VCp, erit ad $\dot{\overline{VD}} \times \frac{1}{2}CA$ ut CM ad CD. Jam in figurâ quam ad analyſin ornavimus, ponatur CD æqualis ipſi CD hujus, exſiſtentibus etiam illis CV figuræ utriuſque inter ſe æqualibus; et manente reliquâ omni iſtius figuræ lineatione, recta Dc habet ad $\frac{1}{2}$CA rationem eam quam quadratum ex CV ad quadratum ex CD. Id enim ſignificant notæ illæ, quas analyſis nobis expromebat $Dc = \frac{CV^2 \times a}{2y^2}$, hoc eſt

Dc =

$DC = \frac{VC^2}{2CD^2}$ CA. Quare et rectangulum DC × $\overline{VD}$, hoc eſt fluxio areæ *a*VDC, erit ad rectangulum ½CA × $\overline{VD}$ ut quadratum ex CV ad quadratum ex CD, ſive ut recta CM ad rectam CD. Atqui oſtenſa eſt fluxio ſectoris VC*p* eſſe ad idem rectangulum ½CA × $\overline{VD}$ ut CM ad CD. Fluxiones igitur areæ *a*VDC fig. 10 ſectoriſque VC*p* fig. 18 inter ſe æquales erunt. Quare et fluentes vel æquales erunt inter ſe, vel altera alterâ dato major. Fluat CD ut ipſi CV æqualis fiat. Jam area *a*VDC in nihilum abierit. Et in nihilum etiam ſector VC*p*. Puncto enim D in V tranſlato, ut æquales ſint CD, CV, æquales fient etiam CM, CV; punctum igitur M cum ipſo V coierit, et recta MV in nihilum abierit. Quare et arcus V*p*, qui ad illam MV datam rationem habet, in nihilum etiam abierit; et cum illo ſector VC*p*. Area igitur *a*VDC ſectorque VC*p*, cùm ſimul in nihilum abierint, dato utique haud different. Erunt igitur inter ſe æquales. Quare et ſector VCX fig. 10 ſectori VC*p* fig. 18 æqualis. Radii autem CV inter ſe æquales. Anguli igitur VC*p*, VCX inter ſe æquales. Sed et CP, CI inter ſe æquales (ex conſtructione). Et ſimili argumentatione Curvarum V*p*, VK radii omnes, qui inter ſe ſint æquales, angulos cum primariis CV æquales facient. Curvæ igitur illæ per omnia inter ſe ſimiles & æquales ſunt. Q. E. D. Compoſitio.

De natura Curvæ VP; *perficiendâque ejus figurâ; de temporibus, quibus data ejus ſpatia abſolvantur, definiendis, et cum temporibus converſionum per circulos conferendis.*

1. Si capiatur arcus VI rectæ CA æqualis, et jungatur CI, recta CI Curvæ Aſymptotos erit. Cùm enim, propter æquales VI, CA, ſit arcus VI ad rectam CV, ut recta CA ad CV (ex conſtruct.) et è naturâ Curvæ, arcus etiam V*p* ad MV ut CA ad CV, erit arcus VI ad rectam CV ut arcus I*p* ad rectam MC. Puncto igitur *p* in I tranſlato, punctum M cum ipſo C ultimò coierit, rectaque CM in nihilum abierit. Et cùm in omni ſitu puncti *p* rectangulo CM × CD ſua conſtet magnitudo, nempe ut quadrato ex CV æquale ſit, puncto *p* in I tranſlato, rectâque CM in nihilum abeunte, recta CD, atque huic æqualis CP, infinita fiet. Q. E. D. Aſymptotos.

2. Radii curvæ angulorum, quos cum aſymptotâ ipſi faciunt, rationem inter ſe contrariam gerunt. Cùm enim ſit arcus IV ad CV ut arcus V*p* ad MV, erit arcus I*p* ad rectam CM ut arcus IV ad CV (El. V. 11.) hoc eſt ut CA ad CV. Eſt autem CM ad CV ut CV ad CD vel CP. Quare ex æquo erit I*p*:CV = CA : CP. Rectangulum igitur ſub radio CP arcuque I*p* æquale eſt dato rectangulo CV × CA. Ac proinde radii CP, arcuum I*p*, ſive angulorum IC*p*, contrariam inter ſe rationem gerunt. Q. E. D.

3. Curva V*p* gyris innumeris centrum cingit; quorum arctiſſimi, licet per centrum non tranſeant, propiùs tamen illud accedunt quàm pro datâ quâvis diſtantiâ. Nimirum hæc eſt Spira illa, quam, propter contrarias illas radiorum angulorumque rationes, nonnulli jure optimo Archimedeæ reciprocam vocârunt. Spira Archimedeæ Reciproca.

4. De-

Apſis Spirarum in Centro.

4. Decreſcente radio mobili CP, angulus, quo radius ad Curvam inclinatur ſenſim augetur. Radioque illo infinitè imminuto, angulus ille ultimò recto æqualis erit: quaſi ſcilicet Curva apſidem in ipſo centro haberet conſtitutam. Nam radius eſt ad ſinum anguli illius, quo CP ad Curvam inclinatur, ut RS ad ST; hoc eſt, ut $\sqrt{a^2+y^2}$ ad $\frac{\sqrt{2}\times q^2}{a}$, ſive ut $\sqrt{CA^2+CP^2}$ ad $\frac{\sqrt{2}\times q^2}{CA}$: hoc eſt, cum $\sqrt{2}\times q^2$ quadrato ex CA æquale ſit, id enim ſuprà oſtendimus, ut $\sqrt{CA^2+CP^2}$ ad CA. Decreſcente igitur CP, minor fit ratio radii ad ſinum illum, ac proinde angulus ipſe major; donec illâ CP in nihilum abeunte, ratio radii ad ſinum in ipſam æqualitatem abierit, et angulus in recti amplitudinem creverit.

Spiræ reciprocæ oppoſitæ.

5. Si in PC productâ capiatur punctum π, pari diſtantiâ atque ipſum P à centro remotum, ſed in partes contrarias, erit punctum π ad Curvam, Curvæ VPC per omnia ſimilem et æqualem ſed ſitu contrario, quæ rectam IC productam aſymptotam habet. Hæ Curvæ unius quidem figuræ brachia ſunt oppoſita; et Spiræ Reciprocæ Oppoſitæ haud ineptè dicendæ ſunt.

Motus per Spiras reciprocaſ.

6. Si corpus è loco V, ſecundum rectam VG, eâ cum velocitate emiſſum ſit, ut per Spiram VP deferatur; dato quodam tempore, cujus ſpatium quâ ratione definiatur mox docebo, propiùs quidem centrum acceſſerit quàm pro datâ quâvis diſtantiâ. Elapſo autem tempore illo, Spiram Oppoſitam invaſerit, cujus ductum ſequens neque infinito tempore in Aſymptotam ci deveniet; quam tamen propiùs accedet quàm pro datâ quâvis diſtantiâ; neque in Spiram VPC, per quam primùm delata eſt, unquam redibit.

Quadratura Spirarum reciprocarum.

7. Quadraturam partium Spirarum, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, ope hujus æquationis abſolvimus, quam analyſis expromebat; $Db=\frac{q^2}{CB}=\frac{a^2}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}.a}=\frac{1}{2}a$. Hinc enim fluxio areæ $aVDb$ fig. 10, ſive ſectoris ſpirarum $\dot{VCP}=Db\times\dot{\overline{VD}}=\frac{1}{2}a\times\dot{\overline{VD}}$. Quamobrem fluentes VCP, $\frac{1}{2}CA\times VD$ vel æquales ſunt inter ſe, vel altera alterâ dato major. Fluat CD, donec ipſi CV æqualis fiat; jam puncto D cum ipſo V coeunte, recta VD in nihilum abierit. Rectâ autem VD in nihilum abeunte, area $aVDb$, atque unà cum eâ ſector VCP, in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt quæ ſimul in nihilum abierint. Erunt igitur inter ſe æqualia. Sector inquam Spiræ VCP ſpatio $\frac{1}{2}CA\times VD$ æqualis erit.

Hinc ſpatium illud omne, quod Spiræ VPC infra locum V centrum uſque intus habent, hoc inquam ſpatium rectangulo $\frac{1}{2}CA\times CV$, ſive ſectori circulari ICV, inter punctum V & Aſymptotam Curvæ, æquale erit. Spatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ VIC, $v\pi C$ intra loca V, v, quæ æqualiter à centro hinc inde ſint remota, intus habent, hoc inquam ſpatium rectangulo $CA\times CV$, ſive duplo ſectoris circularis ICV, æquale erit.

Et ſi capiatur $Cd=C\pi$, ſpatium illud, quod Spiræ Oppoſitæ inter loca v, π intus habent, $=\frac{1}{2}CA\times Vd$.

8. Hinc tempus, quo corpus per has Spiras latum ſectorem VCP abſolverit

verit erit ad tempus, quo è loco v diſtantias à centro devenerit datâ quâvis minores, ut vD ad cv. Idem verò tempus erit ad illud, quo è dato loco v emiſſum ad oppoſitum *v* corpus tranſlatum fuerit, ut vD ad 2cv.

Spira Archimedeæ reciproca.

9. Velocitas corporis per has Spiras lati, in loco quovis v, erit ad velocitatem corporis, viribus eiſdem circulum, radio cv, circum c ſcribentis, ut recta quæ poſſit quadrata ex CA, cv ſimul ſumpta ad rectam ipſam CA: hoc eſt, ſi circulus, centro c, radio cv ſcriptus, occurrat radio, qui illum cv ad perpendiculum inſiſtit, in puncto o, jungaturque AO, ut AO ad CA. Probanda ſunt hæc, iiſdem argumentis quibus § 11 & 12, caſûs ſuperioris.

Velocitas motus in Spiris Archimedeæ reciprocis.

10. Sectores Circuli VvO Spiræque Vv, qui motu corporum æquali tempore conficiuntur, erunt inter ſe æquales. Et qui ſunt æquales æquali tempore conficientur.

Tempora movendi in Spiris Oppoſitis conferuntur cum temporibus converſionum in circulis.

Sint VCN, VCP ſectores, Circuli ille, hic Spiræ, qui æquali tempore conficiuntur. Dico areas VCN, VCP eſſe inter ſe æquales. A centro c in rectam VG, quæ Spiras in puncto v contingit, deducatur ad perpendiculum recta CG. Sector VCP ad ſectorem VCN, qui æquali tempore conficitur, rationem habebit, quæ componitur è rationibus velocitatis corporis per ſpiras lati in loco v ad velocitatem corporis in circulo VvO circumacti, rectæque CG ad rectam CV. Nam hæc erit naſcentium prima ratio, et quæ naſcentium prima fuerit, ea ſemper inter illos manebit. Id enim eiſdem argumentis, quæ in § 10 caſûs primi uſurpavimus, probandum erit. Velocitas autem corporis per Spiras lati, in loco v, ad velocitatem corporis in Circulo VvO circumacti rationem habet quam AO ad CA (§ 10 hujus). Quare ſector ſpiræ VCP ad ſectorem circuli VCN rationem habet, quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CG ad CV. Sed propter angulum CVG angulo QUW (fig. 10) æqualem, anguloſque etiam ad G, W æquales, quippe quorum uterque rectus eſt; triangula CVG, QUW erunt inter ſe ſimilia, et CG erit ad CV ut QW ad QU; hoc eſt, ſecundum ea quæ in § 4 oſtendimus, ut CA ad AO. Ratio igitur quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CG ad CV, ea componetur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CA ad AO. Sector igitur ſpiræ VCP ad ſectorem circuli VCN rationem habet eam, quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CA ad AO. Sed hæc non alia eſt atque ipſa quidem æqualitas. Erit igitur ſector VCP ſectori VCN æqualis.

Rurſum ſi æquales ſunt ſectores VCP, VCN, dico eos æquali tempore confici. Sit enim V*cn* ſector quidam circuli VvO, qui æquali tempore conficiatur atque ſector ſpirarum VCP; cui proinde ille æqualis erit, ſecundum ea quæ modò oſtendimus. At verò ſector ſpirarum VCP ſectori circulari VCN æqualis eſt: ſic enim poſuimus. Sectores igitur circulares VCN, V*cn* inter ſe æquales. Æqualibus igitur temporibus conficiuntur (Prop. I. Lib. 1. Princip.) At verò V*cn* tempore ejus æquali, quo ſector ſpirarum VCP, conficitur. Quare et alter VCN tempore conficietur æquali ejus, quo ſector ſpirarum VCP. Q. E. D.

11. Sint V, v Spirarum Oppoſitarum loca à centro æqualiter remota. Tempus tranſlationis de loco V in locum v per Spiras ad tempus converſionis integræ in Circulo, cujus radius CV, rationem habebit eam quam dupla CA ad totius circuli circuitum.

Pars Prima. Caſus Quintus.

Spatium illud omne quod Spiræ Oppoſitæ inter loca V, v intus habent, duplo ſectori circulari VCI æquale eſt (§ 7 hujus). Tempus igitur tranſlationis de loco V in v per Spiras æquale eſt ei, quo corpus, quod per circulum feratur, confecerit duplum ſectorem VCI (§ 10 hujus). Ac proinde tempus tranſlationis de loco V in v per Spiras eandem ad tempus converſionis integræ in Circulo rationem habet, quam tempus, quo corpus in circulo confecerit duplum ſectorem illum VCI, ad tempus converſionis integræ; ſive eam, quam duplus ſector VCI ad aream totius circuli. Sed duplus ſector VCI ad aream totius circuli rationem habet eam quam duplus arcus VI ad totum circuitum; hoc eſt, cùm arcus VI rectæ CA factus fuerit æqualis, eam, quam dupla CA ad circuitum circuli VvO. Tempus igitur tranſlationis de loco V in v per ſpiras ad tempus converſionis integræ per circulum VvO rationem habet eam, quam 2CA ad circuli circuitum. Q. E. D.

CASUS QUINTUS PARTIS PRIMÆ.

Reliquis (in fig. 10) manentibus quæ priùs poſita ſunt, puta talem eſſe angulum CVG, ut quadratum è radio minus ſit quàm quod ad quadratum ex coſinu ejus anguli rationem habeat, quam CN + CV ad CV. Ita CA minor erit quàm recta, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW. Quadratum igitur ex CA minus erit quàm duplum quadrati ex UW. Sit b recta duarum CV, $\sqrt{2UW^2 - CA^2}$ proportione media. Ita erit $b^2 = CV \times \sqrt{2UW^2 - CA^2}$. Et $b^4 = CV^2 \times \overline{2UW^2 - CA^2} = CV^2 \times \overline{2UQ^2 - 2QW^2 - CA^2}$.

At verò inventa eſt $UQ = \sqrt{\frac{a^4 + a^2c^2}{2c^2}}$. Unde veniet $2UQ^2 \times CV^2 = CA^4 + CA^2 \times CV^2$. Atque hinc rurſum $b^4 = CA^4 - 2CV^2 \times QW^2 = a^4 - 2q^4$.

Cùm igitur inventa eſt $RT = \sqrt{\frac{a^4 - 2q^4 + a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem $RT = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2y^2}}$, et $2RT = \frac{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}{y}$.

Hinc calculis ut antè ſubductis, veniet $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$. Et $Dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$.

Curva igitur, cujus ordinata eſt Dc, in earum genere eſt per quarum quadraturas caſum ſecundum et tertium abſolvimus, et ſimilem quadraturam ipſa ſubitura eſt; et per hujus quadraturam, non modò punctum I ſed et alia dabuntur, quot quis voluerit, Curvæ VIK puncta.

COMPOSITIO CASUS QUINTI.

In rectâ CV infinitè, ſi id opus ſit, producendâ (fig. 19), capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam CA (lineatione eâ quam in analyſi præcepimus definiendam) rationem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ b. Jungatur CB, fig. 10. Et à puncto c, fig. 19, ad perpendiculum cum rectâ ca educatur ce, quæ rectæ CB fiat æqualis. Centro c, ſemiaxibus tranſverſo quidem ce, ſecundo ca, ſcribatur Hyperbola. Huic hyperbolæ recta, à puncto V ad axem ſecundum ca ordinatim educta, in S occurrat, jungaturque cS. Sumatur

Vir Centr. p. 42.

Fig:8.

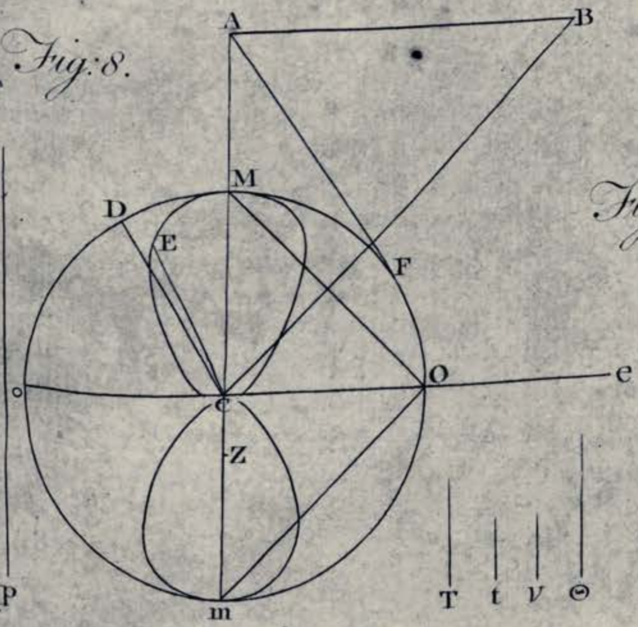


Fig:9.

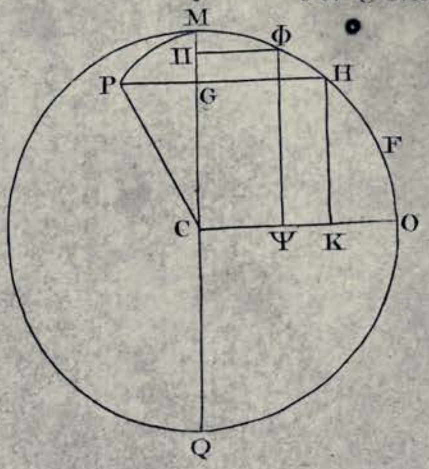


Fig 14



Fig:15.

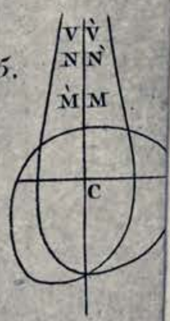


Fig:13.

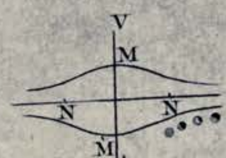


Fig:10.

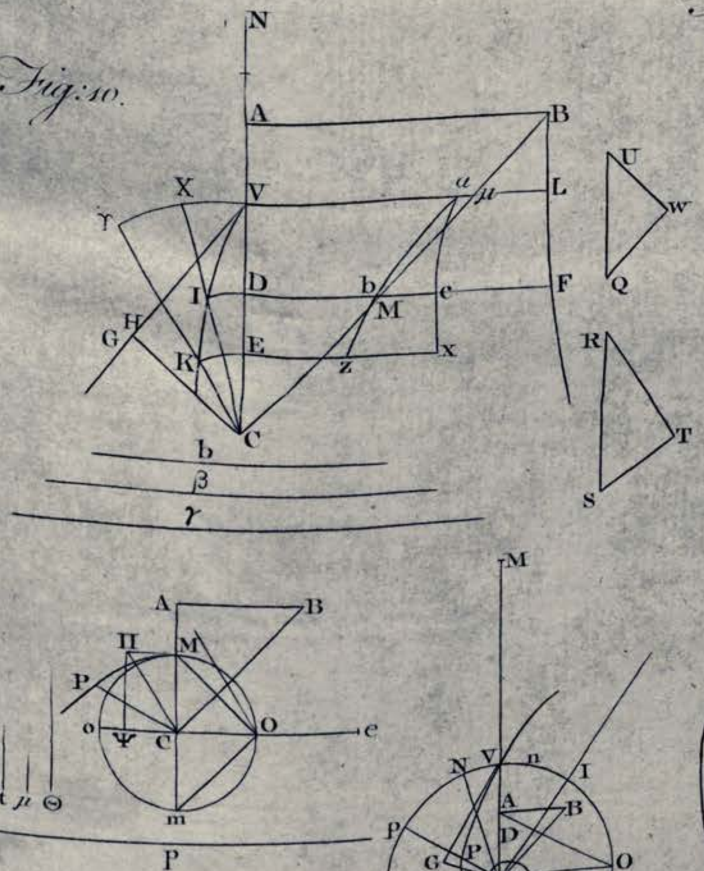


Fig:16

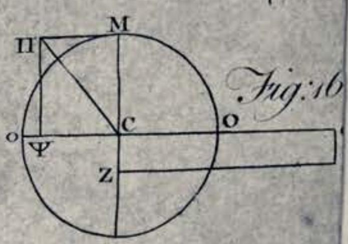


Fig:11.

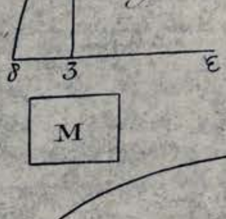


Fig:12

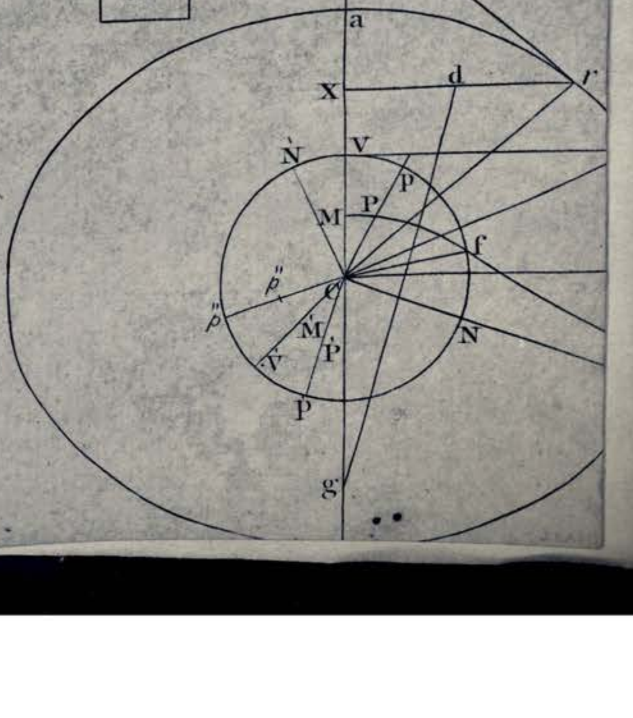




Fig:17.

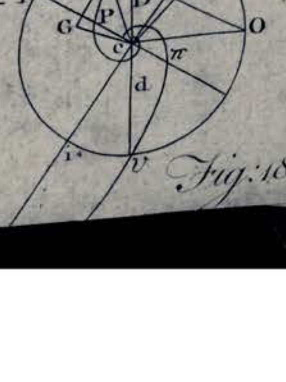


Fig:18.

matur in axe CA aliud quodvis punctum X. Educatur X*r* ad axem CA ordinatim, quæ hyperbolæ in *r* occurrat. Jungatur C*r*. Centro C, radio CV, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector V*cp*, qui ad ſectorem hyperbolicum, *ecr*, rationem habeat eam quam q^2, ſive rectangulum CV X QV, ad quadratum ex CA. Ducatur recta *rt*, quæ hyperbolam in *r* contingens axi CA in *t* occurrat. In rectâ *cp* capiatur CP, quæ ad C*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex CA. Si è loco V ſecundum rectam VG (fig. 10), corpus quodpiam emiſſum fuerit, cum velocitate quâdam, quæ velocitatem corporis, motu ſuo circum centrum C ad diſtantiam CV circulum ſcribentis, eâ ratione ſuperârit, quâ recta data $\epsilon\delta$ (in fig. 11) ſuperat datam $\delta\zeta$: ſi cum hâc inquam velocitate corpus è loco V ſecundum rectam VG emiſſum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam punctum P in fig. 19 tangit, per omnia ſimilem & æqualem. Compositio.

DEMONSTRATIO.

In figurâ 10, quam ad analyſin ornavimus, capiatur diſtantia CD, duarum CX, CV figuræ modò ſcriptæ, id eſt, 19[æ], proportione tertia; exſiſtentibus utique illis CV utriuſque figuræ inter ſe æqualibus. Jam rectam X*r* rectæ RT duplam eſſe, id ſimiliter planè ac in caſu ſecundo & tertio oſtendendum. Tum etiam $\dot{\overline{CX}}$ eſſe ad $\dot{\overline{CD}}$ ut CX ad CD. Unde ſequetur etiam rectangulum $\dot{\overline{CX}} \times Xr$, ſive fluxionem ſpatii hyperbolici *e*CX*r*, eſſe ad rectangulum $\dot{\overline{CD}} \times Xr$ ut CX ad CD. Rurſus fluxionem trianguli CX*r* fluxioni rectanguli CX × RT æqualem eſſe, id quoque ſicut antè patet. Unde eiſdem planè argumentis ac antè efficietur, fluxionem trianguli CX*r* eſſe ad rectangula $\dot{\overline{CD}} \times RT$, $CD \times \dot{\overline{RT}}$ ſimul ſumpta ut CX ad CD. Sed fluxio ſpatii hyperbolici *e*CX*r* ad rectangulum $\dot{\overline{CD}} \times Xr$, ſive $\dot{\overline{2CD}} \times RT$, oſtenſa eſt rationem habere quam CX ad CD. Quare $\dot{\overline{CXr}} - \dot{\overline{eCXr}}$, hoc eſt $-\dot{\overline{ecr}} : CD \times \dot{\overline{RT}} - \dot{\overline{CD}} \times RT = CX : CD$. Hoc eſt, fluxio ſectoris hyperbolici *ecr* ad contrariam rectanguli CD × RT fluxionem rationem habebit eam, quam CX ad CD. Aream autem hyperbolicam *ecr* atque rectangulum CD × RT modis contrariis fluere, inde patet, quòd area hyperbolica *ecr* eodem modo fluit quo recta CX; rectangulum autem CD × RT eodem modo quo recta CD: primum enim exigit hyperbolæ natura; alterum, æquatio illa $RT \times CD = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$. Rectæ autem CX, CD, quæ datum ſpatium comprehendunt, modis inter ſe contrariis fluunt.

Jam verò cùm ex eo quòd ſit $RT = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2y^2}}$ veniat $RT \times CD = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$,

erit $\dot{\overline{RT \times CD}} = \frac{a^2 y \dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$.

Unde $\dot{\overline{RT \times CD}} \times \frac{q^2 CV^2}{a^2y^2} = \frac{q^2 CV^2}{y\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}} \dot{y} = Dc \times -\dot{\overline{VD}}$.

Fluxio igitur areæ *a*VDC (fig. 10) ad contrariam rectanguli RT × CD fluxionem rationem habebit compoſitam è rationibus ſpatii q^2 ad quadratum ex CA, quadratique ex CV ad quadratum ex CD. Jam verò ex eo quòd area *a*VD*c* ad

Pars Prima. Casus Quintus. contrariam rectanguli RT × CD fluxionem rationem habeat ex quibus modò diximus compoſitam; atque ex eo quòd fluxio rectanguli RT × CD ad contrariam ſectoris hyperbolici *ecr* (in fig. 19) fluxionem rationem habeat, quam CD ad CX; efficietur ut antè fluxionem ſpatii *a*VD*c* ad ſimilem ſectoris hyperbolici *ecr* fluxionem rationem habere eam, quam CV × QW ad quadratum ex CA. Unde rurſum ſequetur ſectorem hyperbolicum *ecr*, dato *ecS* majorem eſſe quàm ut habeat ad *a*VD*c*, ſive ſectorem circularem VCX, rationem eam quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Habebit igitur ſector hyperbolicus *Src* (fig. 19) ad ſectorem circularem VCX (fig. 10) rationem eam quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW.

Circuli CV*p* (in fig. 19) capiatur ſector V*cf*, ad quem ſector hyperbolicus *ecS* rationem habeat quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Punctum *f* erit ad Curvam, ad quam eſt punctum P. Id enim ſicut antè oſtendetur. Et cùm ſit ſector hyperbolicus *ecr* ad ſectorem circuli V*cp*, ut quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW (ita enim factum eſt) et ſector hyperbolæ *ecS* ad ſectorem circuli V*cf* ut quadratum ex CA ad CV × QW (nam id quoque factum eſt) idcirco erit ſector hyperbolæ *Scr* ad ſectorem circuli *fcp* ut quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW; id eſt ut ſector idem hyperbolæ *Scr* ad ſectorem circularem VCX in figurâ 10. Sectores igitur circulares VCX iſtius figuræ 10, *fcp* hujus 19, erunt inter ſe æquales. Quare propter radios *cf*, *c*V inter ſe æquales, anguli quoque VCX inter ſe æquales erunt. Jam verò rectas illas CP, hujus figuræ 19ᵃ, ipſis CI iſtius 10ᵃ æquales eſſe, id eodem planè modo ac antè oſtendendum erit. Et ſimili argumentatione alii omnes Curvarum VI, *f*P radii, qui cum primariis CV, *cf* angulos æquales faciunt, oſtendentur inter ſe æquales. Curvæ igitur per omnia inter ſe ſimiles erunt & æquales. Q. E. D.

De Naturâ Curvæ fP perficiendâque ejus figurâ, &c.

DEFINITIO.

Puncta r, P Hyperbolæ Curvæque cognata dico.

2. Curva *f*P gyris innumeris centrum cingit, quorum arctiſſimi propiùs centrum acceſſerint quàm pro datâ quâvis diſtantiâ.

Aſymptota. 3. Curva *f*P rectam *ca*, infinitè protenſam, Aſymptotam habet. Cùm enim ſector circuli *fc*V ſit ad ſectorem hyperbolæ *Sce* ut CA^2 ad CV × QW, tranſlato puncto *p* in V, punctum *r* cum *e* jungetur, & radius *cp* cum radio CV. Quare punctum illud Curvæ, quod puncti *e* ſit cognatum, in rectâ CV quærendum erit. At verò puncto *r* in *e* tranſlato, punctum X cum centro C coierit, & recta XX in nihilum abierit. Quare recta CD, vel illi æqualis CP, finitam omnem longitudinem exſuperabit. Q. E. D.

4. Scribatur hyperbola *ρεμ* hyperbolæ *reM* oppoſita. Si capiatur circuli *p*V*v* ſector V*cπ*, ſectori V*cp* æqualis, et in radio *cπ* pars *cφ*, radii *cp* parti CP æqualis; punctum *φ* ad Curvam erit, Curvæ *f*P per omnia ſimilem & æqualem, ſed ad contrariam partem axis *ea*: quæ quidem eodem modo ex ſemihyperbolâ oppoſitâ *ερ* formari poſſit, quo formata eſt *f*P ex ſemihyperbolâ *er*. Quòd ſi in diametris *pp*, *ππ* capiantur CP, *cφ* rectis CP, *cφ*

æquales, ad contrarias partes centri c; puncta 'p, 'φ erunt ad Curvas, earum quibus inſunt p, φ, per omnia ſimiles & æquales, ſed à contrariâ parte centri ſitas: quæ quidem ex ſemihyperbolis ϵM, $\epsilon\mu$ eodem planè modo formari poſſint, quo priores illæ ex ſemihyperbolis, er, eM. Hæ Curvæ unam quandam figuram conſtituere cenſendæ, ſicut ſemihyperbolæ, ex quibus formantur unam: et Spiræ Hyperbolicæ Secundæ haud immerito vocari poſſunt.

Spiræ Hyperbolicæ Secundæ.

5. Perfecta igitur figura quatuor conſtat brachiis, quorum duo, ab alterâ parte centri infinitè proſerpentia, aſymptotâ gaudent communi ca; ab alterâ parte duo, aſymptotâ cα.

6. Si rectæ cx capiatur pars xg, quæ ad totam cx rationem habeat quam recta qw (fig. 10) ad rectam cv, & à puncto g ad punctum d, quod rectam xr mediam dividat, ducatur gd; angulus gdx inclinatio erit radii cp ad Curvam, exſiſtentibus utique punctis, r, p, Hyperbolæ Curvæque cognatis. Probatur eodem modo quo § 6 caſûs ſecundi.

Anguli Radiorum cum Curvâ.

7. Per a, ſemiaxis hyperbolæ ſecundi verticem, ducatur recta ak cum axe tranſverſo parallela, quæ aſymptotarum alteri in k occurrat. Recta ak media dividatur in puncto l. Capiatur aq, quæ ad ſemiaxem ſecundum ca rationem habeat eam, quam qw ad cv, et jungatur ql. Angulus, quo radius quilibet Spirarum cp ad Curvam inclinatur, angulo qla minor erit. Sed radio mobili cp circum centrum c circumacto, & infinitè imminuto, angulus inclinationis ille uſque augebitur; ut ad æqualitatem dati qla propiùs tandem accedat quàm pro datâ quâvis differentiâ. Probatur ut § 17 caſûs ſecundi.

Angulus Maximus.

8. Hæ ſpiræ Apſidem nullam habent. Radio enim cp infinitè imminuto angulus inclinationis maximus evadit; recto tamen minor eſt, utpote acuto qla æqualis. Radio autem cp infinitè creſcente angulus ille uſque minuetur, ut ultimò omni acuto rectilineari minor fiat.

9. Si corpus è loco f, in alterâ Spirarum dato, ſecundum rectam quæ Spiram ibi loci contingat, eâ cum velocitate emiſſum fuerit, ut per Spiram illam deferatur, intra certum quoddam temporis ſpatium, quod quantum ſit futurum mox definire docebo, propiùs centrum c delatum fuerit quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ. Elapſo autem tempore illo, oppoſitum Spiræ brachium, ad contrarias axis centrique partes, invaſerit, cujus ductum ſequens infinitas uſque longinquitates à centro abibit.

Motus in Spiris Hyperbolicis Secundis.

10. Ad quadraturam partium harum Spirarum, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, hanc nobis æquationem analyſis expromebat. Db $= \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}$. Hinc D$b \times -\dot{y}$, ſive fluxio areæ aVDb, $= -\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}$.

Quadratura harum Spirarum.

Quare area aVDb unà cum fluente fluxionis $\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}$ dato cuidam ſpatio æqualis erit.

Sed fluens fluxionis $\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4+2ay^2}}$ erit $\frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2b^4+2a^2y^2}$ (per Tab. Newton. II. Claſſ. IV. Form. 1.) $= \frac{q^2}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+y^2} = \frac{q^2}{\mathrm{C}e}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+y^2}$. Quare aVDb + $\frac{q^2}{\mathrm{C}e}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+y^2}$ dato cuidam ſpatio æquale erit. Poſitâ igitur CD ſive y=CV, ut

area

Spiræ Hyperbolicæ Secundæ.

area aVDb in nihilum abeat, veniet $\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+\text{CV}^2}$ dato iſti æquale. Hinc area aVDb, ſive ſector fCP, $=\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+\text{CV}^2}-\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+\text{CD}^2}$. Poſitâque y, ſive CD, $=0$, area fPC à loco f centrum uſque $=\frac{q^2}{Ce}\left|\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+\text{CV}^2}-\frac{b^2}{a}\right|$. Et area PC, à loco P centrum uſque, $=\frac{q^2}{Ce}\left|\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+\text{CD}^2}-\frac{b^2}{a}\right|$. Vel pro b^4 ſcripto $\gamma^2\times\text{CM}^2$, ſive $2\gamma^2\times\text{CD}^2$, area PC $=\frac{q^2}{Ce}\left|\sqrt{\frac{2\gamma^2\times\text{CD}^2+a^2\text{CD}^2}{a^2}}-\frac{\gamma\times\sqrt{2}.\text{CD}}{a}\right| = \frac{q^2\times\text{CD}}{Ce\times\text{CA}}\sqrt{2\gamma^2+a^2}-\sqrt{2}\times\gamma$. Cujus æquationis hæc erit conſtructio.

Conſtituatur triangulum Γγſ angulo ad γ recto, lateribus Γγ, ſγ rectæ γ ſingulatim æqualibus (vid. fig. 20). A puncto Γ ad perpendiculum educatur Γα, rectæ CA æqualis; et jungatur αſ, & ab αſ auferatur ſδ rectæ Γſ æqualis. Ad rectam Ce (fig. 19) vel CB (fig. 10) applicetur rectangulum ſpatio dato q^2 æquale, et latus applicati ſit N. Capiatur M quæ ſit ad N ut CD ad CA. Rectangulum M × δα ſpatio PC æquale erit.

Velocitas in his Spiris.

11. Si circulus, centro C, radio CV ſcriptus, rectæ Ce, quæ illam CV ad perpendiculum inſiſtit, in O occurrat, & jungatur AO; velocitas corporis per Spiras lati in loco f erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius Cf, ut AO ad CA. Oſtendetur ut § 12 caſûs 3.

Tempora movendi per Spiras Hyperbolicas Secundas.

12. Hinc tempus, quo corpus è loco Spirarum f diſtantiam à centro datâ quâvis minorem delatum fuerit, ad tempus converſionis integræ in Circulo rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus radii ad integrum circuli circuitum, rectanguli que UQ × δα ad rectangulum AO × CB. Et ſi capiatur illius δα magnitudo illa, quam, angulo QUW infinitè imminuto, ultimò ea adepta fuerit, quando angulus ille ad nihilum redactus fuerit, ita tempus caſûs recti definieris, à loco f centrum uſque; corporis utique quod è loco f, ſecundum rectam ipſam fC, eâ cum velocitate dejectum fuerit, quâcum ſecundum rectam, Spiras in loco f contingentem, projici illud oporteat, ut per Spiras deferatur. Cæterùm ultima illa rectæ δα magnitudo hæc erit; $\sqrt{2}\times\text{UQ}-\sqrt{2\text{UQ}-\text{CA}^2}$.

PROBLEMATIS GENERALIS.

PARS SECUNDA.

Pars Secunda.

JAM verò vires centrales in earum genere ſint, quæ fugam centri corporibus inducant.

E dato loco V (fig. 21) ſecundum rectam VG poſitione datam, emiſſum puta corpus quodpiam, datâ cum velocitate. Oportet definire Curvam, per quam corpus illud deferetur, ſi viribus centrifugis urgeatur, quæ centrum C reſpiciant, & rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervent.

Factum puta, et ſit VK Curva illa quam definire ſuſcepimus. Detur punctum A, unde ſi corpus, nullâ vi inſitâ præditum, propellentibus viribus

ribus centrifugis, aſcenſum rectâ accepiſſet, velocitatem in loco V adeptum eſſet, ejus æqualem quâcum è loco illo V ſecundum rectam VQ exire geſtit. Et manentibus quæ ad demonſtrationem noſtram Prop. XLI. Libri Primi Principiorum à nobis lineata ſunt, intelligatur recta AB ejus lineationis rectæ CA æqualis eſſe. Dataque recta CA vel AB deſignetur literâ a, data CV literâ c, indefinita CD literâ y. Jam cùm è natura Curvæ BF, DF ſit ad AB ut vis centralis in loco D ad vim centralem in loco A, hoc eſt, ut cubus ex CA vel AB ad cubum ex CD, erit $DF = \frac{AB^3}{CD^3} AB = \frac{a^4}{y^3}$. Ergo $DF \times \dot{y} = \frac{a^4}{y^3}\dot{y}$. Harum verò fluxionum ſunt fluentes, alterius quidem area BADF; alterius, ſpatium $-\frac{a^4}{2y^2}$: ubi id ſignificat ſignum $-$, ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ areamque BADF æqualiter quidem ſed contrariè fluere. Area igitur BADF, ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ auctum dato cuidam ſpatio æquale erit. Decreſcat recta CD uſquedum illi CA æqualis fiat; coeunte puncto D cum illo A, area BADF in nihilum abierit, ſpatium autem $\frac{a^4}{2y^2}$ dimidio quadrati ex CA æquale fiet. Totum igitur illud BADF $+ \frac{a^4}{2y^2}$, in hoc ſitu puncti D, dimidio quadrati ex CA æquale erit. Quare dimidium quadrati ex CA eſt datum illud, cui BADF $+ \frac{a^4}{2y^2}$ ſemper eſt æquale. Quare BADF $+ \frac{a^4}{2y^2} = \frac{1}{2}a^2$. Hinc BAVL, ſive $UQ^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^4}{2c^2}$, et $UQ = \sqrt{\frac{a^2c^2 - a^4}{2c^2}}$. $RS = \sqrt{\frac{a^2y^2 - a^4}{2y}}$. Sed $ST = \frac{q^2}{y}$. Quare $ST = \frac{2q^2}{2y^2}$. Et $RT = \sqrt{\frac{a^2y^2 - a^4 - 2q^2}{2y^2}}$. Ex eo quòd inventum eſt $UQ^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^4}{2c^2}$, manifeſtum eſt quadratum ex CA majus eſſe quàm duplum quadrati ex UQ. Majus itaque quàm duplum quadrati ex UW; nempe cùm quadratum ex UW quadrato ex UQ majus eſſe neſciat. Sit igitur b datarum CV, $\sqrt{CA^2 - 2UW^2}$ proportione media. Erit igitur $b^2 = CV \times \sqrt{CA^2 - 2UW^2}$ et $b^4 = CV^2 \times \overline{CA^2 - 2UW^2} = CV^2 \times \overline{CA^2 - 2UQ^2 + 2QW^2}$. Sed ex eo quòd ſit $UQ^2 = \frac{c^2a^2 - a^4}{2c^2}$, efficitur $2CV^2 \times UQ^2 = \overline{CV^2 \times CA^2} - CA^4$. Unde rurſum $b^4 = CA^4 + CV^2 \times QW^2 = a^4 + 2q^2$.

Hinc RT, quæ inventa eſt $= \sqrt{\frac{a^2y^2 - a^4 - 2q^2}{2y^2}}$, eadem inquam $RT = \sqrt{\frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}}$. Unde, calculis ut in ſuperioribus ſubductis, veniet $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}}$. Et $Dc = \frac{q^2 \times CV^2}{y\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}}$.

Curva igitur, cujus ordinata Dc, in eodem genere eſt in quo priores illæ, per quarum quadraturas Caſum 2, 3 & 5 Partis Primæ abſolvimus. Et per ſimilem hujus Curvæ quadraturam, caſus ille Problematis, de quo nunc agitur, conficiatur.

ANALYSIS.

Pars Secunda. Compositio.

COMPOSITIO PARTIS SECUNDÆ.

In rectâ cv (fig. 22) infinitè ſi id opus ſit producendâ, capiatur ca, quæ habeat ad rectam AB, ſeu CA (fig. 21) proportionem eam quam quadratum è rectâ cv ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB; et à puncto c ad perpendiculum cum rectâ CA educatur *ce*, quæ illi CB fiat æqualis. Centro c, ſemiaxibus ca, *ce*, ſcribatur Ellipſis a*ſr*. Punctum v non erit extra hanc Ellipſin. Id enim eodem modo oſtendetur, quo oſtenſum eſt punctum v, in compoſitione caſûs Secundi Partis Primæ, non eſſe extra hyperbolam cujus ope caſum eum compoſuimus.

Recta igitur à puncto v ordinatim cum axe ca educta Ellipſi occurret. Educatur v*ſ*, & ellipſi in *ſ* occurrat.

Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum x intra ſectionem. Educatur x*r* cum axe ca ordinatim, quæ ellipſi in *r* occurrat. Jungantur c*ſ*, c*r*. Centro c, radio cv, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector vc*p*, qui ad ſectorem ellipticum ac*r* rationem habeat eam, quam rectangulum cv × QW ad quadratum ex CA. Ducatur recta *rt*, quæ, ellipſin in *r* contingens, cum axe ca in *t* conveniat. In rectâ c*p* capiatur CP, quæ ad c*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Si è loco v ſecundum rectam vo corpus quodpiam emiſſum fuerit, eâ cum velocitate quam in loco v adeptum eſſet, ſi è loco A nullâ vi inſitâ præditum, propellente vî centrifugâ, aſcenſum rectâ occepiſſet: hoc corpus feretur per Curvam, ejus, quam punctum P perpetuò tangit, per omnia ſimilem & æqualem.

Cor. Si recta x*r* media dividatur in puncto *d*, capiaturque *g*x quæ ad xc rationem eam habeat, quam QW ad cv; junctâ *gd*, angulus *gd*x ei erit æqualis, quo radius CP ad Curvam inclinatur.

2. Si in axe ca capiatur CM, duarum ca, cv proportione tertia, punctum M erit Apſis curvæ *ſ*P.

3. Si circuli, radio cv ſcripti, capiatur ſector vcN, qui ad quadrantem ellipſeos rationem habeat eam, quam rectangulum cv × QW ad quadratum ex CA; recta CN Curvæ M*ſ*P Aſymptotos erit.

Curvarum autem, quæ ex Ellipſi a*ſr*, quo præcepimus modo, formari poterunt, ſicut et earum quas ad compoſitionem caſûs tertii Partis 1ª. formare docuimus, ſpecies ſunt innumeræ, pro variâ ratione quam ſector circularis vcN ad aream totius circuli habere poſſit. Perfecta enim Curvæ M*ſ*P figura brachiis conſtat pluribus, quorum vel certus erit numerus, vel innumera erunt, prout ſector ille aliquem cum areâ totius circuli numerorum commenſum habeat, neve habeat. Apſides autem & Aſymptotæ, quæ brachiis proximis alternè erunt communes, ſimili prorſus lineatione ac in caſu illo tertio partis ſuperioris definiendæ erunt. Reverâ hiſce Curvis cum illis prioribus arctiſſima cognatio intercedit. Nec aliâ ferè re diſſimiles ſunt, præterquam quòd illæ partes ſuas concavas, hæ convexas, centro Ellipſeos obvertunt.

Tædium credo legentibus afferrem, ſi hiſce demonſtrandis immorarer: ſiquidem demonſtrandi ratio neminem, cui ſuperiora intellecta ſunt, latere poſſit.

FINIS.

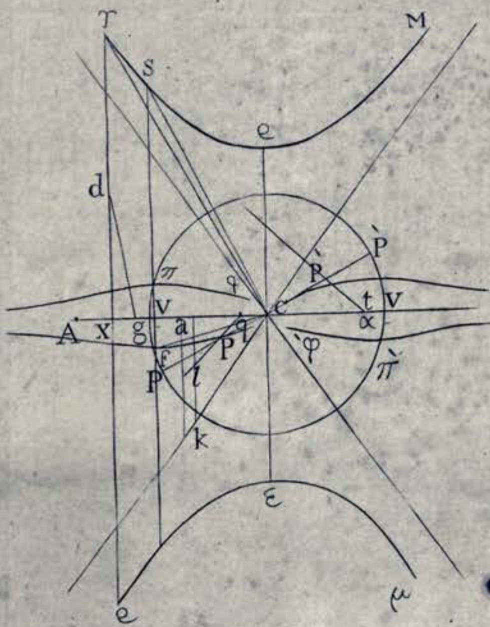
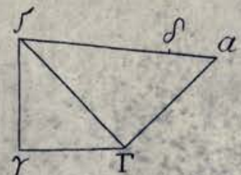


Fig: 19.

Fig: 20.



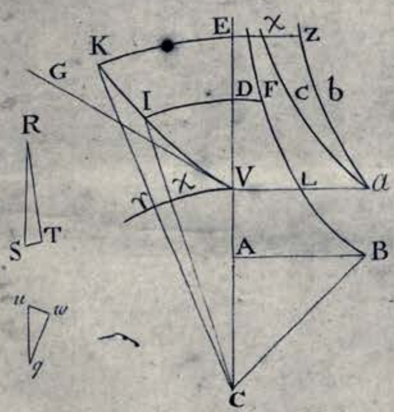


Fig: 21.

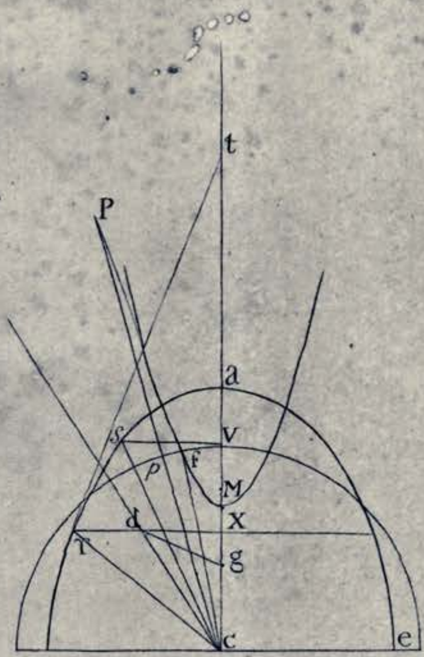


Fig: 22.

00053244

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 02 July, 2018